Teoría y evidencia del crecimiento, comercio y desarrollo:

con referencia especial a México

| Gerardo Ángeles Castro
| Francisco Venegas Martínez
| Horacio Sánchez Bárcenas
(Coordinadores)

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Teoría y evidencia del crecimiento, comercio y desarrollo: con referencia especial a México
Gerardo Ángeles Castro
Francisco Venegas Martínez
Horacio Sánchez Bárcenas
(Coordinadores)

Primera edición 2010

Instituto Politécnico Nacional
Luis Enrique Erro s/n
Unidad profesional "Adolfo López Mateos"
Zacatenco, 07738, México, DF

Dirección de Publicaciones
Tresguerras 27, Centro Histórico
06040, México, DF

ISBN 978-607-414-185-6

Impreso en México / *Printed in Mexico*
http://www.publicaciones.ipn.mx

CONTENIDO

I

CRECIMIENTO Y BIENESTAR ENDÓGENOS: UN MODELO ESTOCÁSTICO

FRANCISCO VENEGAS-MARTÍNEZ[1]

1. Introducción

El buen desempeño de una economía requiere de crecimiento sostenido acompañado de un desarrollo económico que permita mejorar los niveles de bienestar de la población. Este trabajo determina endógenamente la tasa de crecimiento del PIB de una economía y el nivel de bienestar (función de utilidad indirecta) de sus agentes económicos. La economía en cuestión está poblada por consumidores que también son productores con preferencias, dotaciones y tecnologías idénticas. Estos individuos viven para siempre y desean maximizar su satisfacción por un bien genérico de consumo (el supuesto de vida infinita se puede reemplazar por un padre que se interesa por maximizar la satisfacción de sus hijos, nietos, bisnietos y demás descendientes). El modelo propuesto supone que un incremento en el PIB conlleva a una distribución simétrica de los recursos y, por lo tanto, produce el mismo aumento en el bienestar de todos los individuos.

Por mucho tiempo, el impacto de la incertidumbre en el crecimiento económico y su efecto sobre el desarrollo ha sido un tema de gran interés para los encargados del diseño y la instrumentación de la política económica. Uno de los propósitos del presente trabajo es desarrollar un modelo estocástico de crecimiento endógeno con un solo sector, en el cual la tasa impositiva que se aplica a la

[1] Profesor-investigador ESE-IPN. Domicilio para correspondencia: Plan de Agua Prieta [illegible] Col. Plutarco Elías Calles, Del. Miguel Hidalgo, CP 11340, correos electrónicos: fvenegas[illegible] y fvenegas@ipn.mx

[illegible] de los individuos es gobernada por un movimiento geométrico browniano. Asimismo, los agentes tienen expectativas de depreciación en el tipo de cambio conducidas por un proceso de difusión con saltos. Los movimientos pequeños en el tipo de cambio, los cuales siempre están presentes, son modelados a través de un movimiento browniano, y los movimientos extremos y repentinos en el tipo de cambio, que ocasionalmente ocurren, están gobernados por un proceso de *Poisson*. La combinación de estos procesos proporciona colas pesadas y sesgo en la distribución del tipo de cambio, lo que produce un comportamiento más realista en el precio de las divisas.

En el modelo propuesto se examina la dinámica de equilibrio de las variables de decisión del agente representativo y de las variables relevantes que caracterizan a la economía. Asimismo, en esta investigación se discuten varios temas relacionados con las políticas fiscal y cambiaria. En particular, se estudian los efectos sobre el consumo, crecimiento y bienestar económico por cambios permanentes en los parámetros que determinan las expectativas, a saber: la tasa media esperada de depreciación, la volatilidad instantánea del tipo de cambio, la probabilidad de una posible depreciación, el tamaño medio esperado de una posible depreciación, el impuesto medio esperado *ad valorem* al consumo y el impuesto medio esperado sobre la riqueza.

Aunque la incertidumbre es un elemento clave en el estudio del crecimiento, hay pocos estudios en la literatura que consideran un ambiente estocástico. Por ejemplo, con respecto a la política económica y el crecimiento estocástico, se pueden mencionar los trabajos de: Leland (1974), Eaton (1981), Gertler y Grinols (1982), Turnovsky (1993) y (2000), Turnovsky y Grinols (1996), Grinols y Turnovsky (1993), Obstfeld (1994), Asea y Turnovsky (1998), Canton (2001), Gokan (2002), Gong y Zou (2003) y Venegas-Martínez (2006b), (2008a) y (2008b). Por otra parte, en lo que se refiere a estudios empíricos, Ramey y Ramey (1995) han estudiado el nexo entre volatilidad y crecimiento.

El modelo propuesto presenta varios aspectos distintivos que le permiten examinar los determinantes del crecimiento y del desarrollo: *1*) considera factores de riesgo en el tipo de cambio y la política fiscal, proporcionando un ambiente estocástico más realista; *2*) genera soluciones analíticas, haciendo más fácil la comprensión de los elementos clave del crecimiento; *3*) trata al consumo como una variable aleatoria, lo cual está acorde con la realidad;

4) examina los efectos en el crecimiento de diversos tipos de impuestos; y *5*) obtiene el nivel de bienestar económico de un agente representativo de la población.

Este trabajo está organizado como sigue. En la próxima sección se desarrolla un modelo estocástico del tipo de Ramsey para una economía pequeña y abierta que produce y consume un solo bien y cuenta con una restricción del tipo *cash-in-advance*. En la sección 3 se resuelve el problema de decisión del consumidor. A través de la sección 4 se llevan a cabo experimentos de estática comparativa. En la sección 5 se determina el bienestar económico de los agentes y se examinan los efectos de choques exógenos sobre dicho bienestar. En la sección 6 se estudia el comportamiento dinámico de la riqueza y del consumo en el equilibrio. En el transcurso de la sección 7 se especifica la tecnología a fin de obtener la tasa *per capita* de crecimiento del consumo, del capital y de la producción. En la sección 8 se presentan las conclusiones y se establece la agenda futura de investigación. Por último, tres apéndices contienen varios detalles algebraicos.

2. Supuestos básicos del modelo

Con el propósito de obtener soluciones analíticas en un modelo estocástico del tipo de Ramsey, la estructura de economía, pequeña y abierta, será establecida tan simple como sea posible. Algunos de los principales supuestos son hechos de tal forma que los temas relevantes del crecimiento endógeno estocástico sean más fáciles de analizar.[2]

2.1 Dinámica del nivel general de precios

Considere una economía pequeña y abierta con agentes idénticos, los cuales tienen vida infinita. La economía produce y consume un solo bien de carácter perecedero. Se supone que el bien es comerciable internacionalmente sin barreras arancelarias y que el nivel general de precios domésticos, P_t, es deter-

[2] Este modelado extiende las características de la economía estudiada en Venegas-Martínez (2001), (2005) y (2006b).

minado por la condición de poder de paridad de compra, a saber, $P_t = P_t^* E_t$ donde P_t^* es el precio en moneda extranjera del bien en el resto del mundo y E_t es el tipo de cambio nominal. Se supone, por simplicidad, que P_t es igual a 1. También, se supone que el valor inicial del tipo de cambio, E_0 es conocido e igual a la unidad.

Asimismo, se supone que el número de movimientos extremos e inesperados en el tipo de cambio, *ie.*, saltos en el tipo de cambio por unidad de tiempo, sigue un proceso de Poisson N_t con intensidad v (número medio de saltos por unidad de tiempo), por lo que

$$\boldsymbol{P}^{(N)}\left\{\text{un salto unitario durante } \mathrm{d}t\right\} = \boldsymbol{P}^{(N)}\left\{\mathrm{d}N_t = 1\right\} = v\,\mathrm{d}t, \qquad 1)$$

mientras que

$$\boldsymbol{P}^{(N)}\left\{\text{ningún salto en } \mathrm{d}t\right\} = \boldsymbol{P}^{(N)}\left\{\mathrm{d}N_t = 0\right\} = 1 - v\,\mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t\right), \qquad 2)$$

Donde

$$\frac{o\left(\mathrm{d}t\right)}{\mathrm{d}t} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \mathrm{d}t \to 0.$$

Así, $\mathrm{E}^{(N)}\left[\mathrm{d}N_t\right] = \mathrm{Var}^{(N)}\left[\mathrm{d}N_t\right] = v\mathrm{d}t$. El número inicial de saltos se supone igual a cero, es decir, $N_0 = 0$.

Considere un proceso de Wiener $\left(\mathcal{Z}_t\right)_{t\geq 0}$ definido en un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $\left(\Omega^{(\mathcal{Z})}, \mathcal{F}^{(\mathcal{Z})}, \left(\mathcal{F}_t^{(\mathcal{Z})}\right)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P}^{(\mathcal{Z})}\right)$. La filtración $\left(\mathcal{F}_t^{(\mathcal{Z})}\right)_{t\geq 0}$ representa la información relevante en cada instante t. Se supone que el consumidor percibe que la tasa de inflación esperada, $\mathrm{d}P_t/P_t$, y por lo tanto la tasa esperada de depreciación, $\mathrm{d}E_t/E_t$, sigue un movimiento geométrico Browniano con saltos de *Poisson*, de acuerdo con

$$\frac{\mathrm{d}P_t}{P_t} = \pi\,\mathrm{d}t + \sigma_p\,\mathrm{d}\mathcal{Z}_t + \varphi\,\mathrm{d}N_t,$$

donde π es la tasa media esperada de depreciación, condicional en que ningún salto ocurra. σ_p es la volatilidad instantánea del nivel general de precios esperado, y φ es el tamaño medio esperado de un salto en el tipo de cambio.

El proceso Z_t se supone independiente de N_t. En lo que sigue, π, σ_p, v y φ son constantes positivas.

2.2 Saldos monetarios reales

El agente mantiene saldos monetarios reales, $m_t=M_t/P_t$, donde M_t es el acervo nominal de dinero. La tasa de rendimiento estocástica por la tenencia de saldos reales, $\mathrm{d}R_m$, está dada por el cambio porcentual del precio del dinero en términos de bienes (poder adquisitivo). Al aplicar el lema de Itô para procesos de difusión con saltos al inverso del nivel de precios, con la ecuación (3) como el proceso subyacente (véase el apéndice A, fórmula (A.2)), se obtiene

$$\mathrm{d}R_m = \mathrm{d}\left(\frac{M_t}{P_t}\right)\Big/\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \left(-\pi + \sigma_p^2\right)\mathrm{d}t - \sigma_p \mathrm{d}Z_t - \left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)\mathrm{d}N_t,$$

2.3 Acervo de capital

El agente también posee capital, k_t, que paga una tasa de interés real libre de riesgo de incumplimiento r, la cual es constante para todos los plazos y satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\mathrm{d}k_t = rk_t\mathrm{d}t, \quad k_0 \text{ conocido}$$

De esta forma, si el consumidor compra un bono real de k_0 unidades en $t=0$, entonces el valor del bono en t está dado por:

$$k_t = k_0 e^{rt}$$

Se supone que el agente representativo toma r como dada. Se puede suponer alternativamente que existe un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar o pedir prestado a una tasa constante, r, a todos los plazos y, en consecuencia, libre de riesgo de mercado, la cual se aplica en forma continuamente capitalizable. Se supone que este mercado de crédito es libre de riesgo de incumplimiento. Así, si un agente deposita k_0 unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo t, está dado por $k_t = k_0 e^{rt}$.

2.4 Impuestos sobre la riqueza

Considere ahora un proceso de Wiener $(U_t)_{t\geq 0}$ definido en un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración $\left(\Omega^{(U)}, \mathcal{F}^{(U)}, \left(\mathcal{F}_t^{(U)}\right)_{t\geq 0}, \boldsymbol{P}^{(U)}\right)$. Se supone que el consumidor representativo percibe que su riqueza será gravada a una tasa incierta τ_t, de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_t}{\tau_t} = \bar{\tau}\mathrm{d}t + \sigma_\tau \mathrm{d}\tilde{\mathcal{Z}}_t, \quad \tau_0 > 0, \qquad 6)$$

con

$$\tilde{\mathcal{Z}}_t = \rho\mathcal{Z}_t + \sqrt{1-\rho^2}U_t \qquad 7)$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}\mathcal{Z}_t, \mathrm{d}\left(\rho\mathcal{Z}_t + \sqrt{1-\rho^2}U_t\right)\right) = \rho\mathrm{d}t, \qquad 8)$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa media esperada del impuesto sobre la riqueza, σ_τ es la volatilidad de la tasa impositiva a la riqueza, y $\rho \in (-1,1)$ es la correlación entre los cambios en la inflación y los cambios en los impuestos sobre la riqueza. Observe que un incremento en el tipo de cambio deprecia los saldos monetarios reales. Esto, a su vez, reduce el valor real de los activos, situación que puede llevar a la autoridad fiscal a modificar su política fiscal. Los procesos N_t, Z_t y U_t se suponen independientes dos a dos.

2.5 Restricción *cash-in-advance*

Considere una restricción del tipo *cash-in-advance* de la forma:

$$m_t = \alpha c_t, \qquad 9)$$

donde c_t es el consumo y $\alpha > 0$ es el tiempo medio que se debe mantener el dinero para financiar el consumo. La condición (9) es crítica para ligar la política cambiaria con el consumo, pues de esta forma, la depreciación actúa como un impuesto estocástico en los saldos monetarios reales.

3. Problema del consumidor

En esta sección, se caracterizan las decisiones óptimas de consumo y portafolio de un agente representativo. En lo que sigue se considera la función de utilidad logarítmica con el propósito de obtener soluciones sencillas que faciliten el análisis.

3.1 Restricción presupuestal intertemporal

La acumulación de la riqueza del consumidor en términos de las proporciones de sus recursos que asigna a los diferentes activos (dos activos en este caso):

$$\omega_t = m_t / a_t,$$
$$1 - \omega_t = k_t / a_t$$

y del consumo, c_t, está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$\begin{cases} \mathrm{d}a_t = a_t \omega_t \mathrm{d}R_m + a_t (1 - \omega_t) \mathrm{d}R_b - (\tau_t a_t + (1 + \hat{\tau}) c_t) \mathrm{d}t, & a_0 = m_0 + b_0 > 0, \\ \mathrm{d}\tau_t = \bar{\tau}\tau_t \mathrm{d}t + \sigma_\tau \tau_t \left(\rho \mathrm{d}Z_t + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t\right), & \tau_0 > 0, \end{cases} \qquad (10)$$

donde $\mathrm{d}R_k = \mathrm{d}k_t / k_t$ y $\hat{\tau}$ es una tasa impositiva *ad valorem* al consumo. Si se colapsan las ecuaciones (4), (5), (9) y (10), se cumple que

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left[(r - \Phi\omega_t - \tau_t)\mathrm{d}t - \omega_t \sigma_p \mathrm{d}\zeta_t - \omega_t \frac{\varphi}{1+\varphi} \mathrm{d}V_t \right]. \qquad (11)$$

donde

$$\Phi = \left(1+\hat{\tau}\right)\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_{P}^{2}.,$$

3.2 Índice de satisfacción

La función de utilidad esperada, del tipo von Neumann-Morgenstern, al tiempo *t*, *Vt*, del consumidor adverso al riesgo se supone de la forma separable en el tiempo:

$$V_t = \mathrm{E}\left\{ \int_t^{\infty} \log\left(c_s\right) e^{-rs} \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t \right\}, \qquad 12)$$

donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{z} \otimes \mathrm{F}_t^{U}$ representa toda la información disponible en *t*. Observe que la tasa subjetiva de descuento del agente ha sido igualada a la tasa de interés real internacional *r*, para evitar dificultades técnicas innecesarias en la explicación de los diferentes mecanismos de transmisión. Evidentemente, la coincidencia entre la tasa subjetiva de descuento y la tasa real de interés se debe puramente a la casualidad, no existe otra causa para justificar este supuesto.

3.3 Condición de primer orden

La condición de primer orden de la optimización intertemporal del agente representativo adverso al riesgo conducen a una solución, $\omega_t \equiv \omega$, invariante en el tiempo, así como a la relación (ver apéndice B).

$$\frac{1}{\delta_1 \omega} - \frac{v\varphi}{1+\varphi\left(1-\omega\right)} = \left(1+\hat{\tau}\right)\alpha^{-1} + r + \pi - \sigma_P^2 + \omega\sigma_P^2, \qquad 13)$$

donde $\delta_1 = r^{-1}$. La función de utilidad logarítmica conduce a que *w* dependa solamente de los parámetros que determinan las características estocásticas de la economía y, por lo tanto, *w* es constante. Es decir, la actitud del consumidor hacia el riesgo cambiario es independiente de su riqueza, *ie.*, el nivel de riqueza resultante en cualquier instante no tiene relevancia en las decisiones de portafolio. Más aún, debido a la utilidad logarítmica, el coeficiente de correlación, $\rho \in (-1,1)$, no juega papel alguno en el portafolio óptimo del consumidor.

3.4 Una asignación factible del portafolio

La ecuación (13) es cúbica, por lo que tiene al menos una raíz real. De hecho, la ecuación (13) tiene una raíz negativa y dos raíces positivas. Esto se puede ver al intersectar la línea recta definida por el lado derecho de la ecuación (13) con la gráfica definida por el lado izquierdo de (13). En este caso, existe solamente una intersección que define un estado estacionario (único) de la riqueza que el individuo asigna al consumo, $\omega^* \in (0,1)$.

4. Experimentos de política económica, estática comparativa

El primer resultado esperado es que un incremento permanente en la tasa de depreciación, da como resultado un aumento en el costo de oportunidad futuro de comprar bienes, lo cual conduce a una disminución permanente de la proporción de la riqueza destinada al consumo futuro. Para ver esto, se calcula la derivada de la ecuación (13) con respecto de π

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \pi} = -\Psi^{-1} < 0, \tag{14}$$

donde

$$\Psi = \left[\frac{r}{(\omega^*)^2} + \frac{v\varphi^2}{\left[1+\varphi(1-\omega^*)\right]^2} + \sigma_p^2 \right]. \tag{15}$$

El segundo resultado es la respuesta de los saldos monetarios reales de equilibrio, w^*, a cambios permanentes en el parámetro de intensidad, v. Un aumento permanente en el número esperado de saltos en el tipo de cambio por unidad de tiempo, produce un incremento en el costo de oportunidad futuro de la compra de bienes, esto, a su vez disminuye la proporción de la riqueza destinada al consumo futuro. De hecho, después de calcular la derivada de la ecuación (13) con respecto de v, se obtiene

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \nu} = -\frac{\varphi}{\Psi\left[1+\varphi\left(1-\omega^*\right)\right]} < 0. \quad 16)$$

Un efecto similar es obtenido por un cambio permanente en el tamaño medio esperado de un salto:

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \varphi} = -\frac{\nu}{\Psi\left[1+\varphi\left(1-\omega^*\right)\right]^2} < 0. \quad 17)$$

Por último, un aumento en el impuesto *ad valorem* al consumo producirá una reducción permanente en la proporción de la riqueza dedicada al consumo futuro. En efecto,

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \hat{\tau}} = -\frac{1}{\alpha\Psi} < 0 \quad 18)$$

5. Determinación del bienestar económico

Ahora se determina endógenamente el bienestar económico y se evalúan los efectos de choques exógenos sobre el nivel de bienestar de los agentes. Como siempre, el criterio de bienestar, W del individuo representativo es la utilidad maximizada que parte desde la riqueza real inicial, a_0, y la tasa impositiva inicial de la riqueza, τ_0. El bienestar está definido por (ver apéndice B):

$$W\left(\pi,\nu,\varphi,\bar{\tau},\hat{\tau},a_0,\tau_0\right) \equiv \frac{1}{r}\left[1+\log\left(a_0/\tau_0\right)+\log\left(\alpha^{-1}\omega^*\right)\right] \quad 19)$$

$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(\left(1+\hat{\tau}\right)\alpha^{-1}+r+\pi-\sigma_P^2\right)\omega^*+\frac{1}{2}\left(\omega^*\sigma_P\right)^2+\bar{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_\tau^2-\nu\log\left(\frac{1+\varphi\left(1-\omega^*\right)}{1+\varphi}\right)\right].$$

5.1 Efectos de los choques del tipo de cambio en el bienestar económico

A continuación se calculan los impactos en el bienestar económico por cambios permanentes en la tasa media esperada de depreciación, la probabilidad de depreciación y el tamaño esperado de una depreciación. Primero, observe que un incremento en la tasa media esperada de depreciación reduce el bienestar económico. De hecho, al calcular la derivada de la ecuación (19) con respecto de π, se encuentra que τ_0.

$$\frac{\partial W}{\partial \pi} = -\frac{\omega^*}{r^2} < 0 \qquad 20)$$

Análogamente, un aumento en la probabilidad de depreciación producirá una reducción en el bienestar económico. Para ver esto, es suficiente calcular la derivada de la ecuación (19) con respecto de v

$$\frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{r^2} \log\left(\frac{1+\varphi(1-\omega^*)}{1+\varphi}\right) < 0. \qquad 21)$$

Por último, un incremento permanente en el tamaño esperado de una depreciación reduce el bienestar económico, así

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{v\omega^*}{(1+\varphi)(1+\varphi(1-\omega^*))}\right] < 0 \qquad 22)$$

5.2 Efectos de choques de política fiscal en el bienestar económico

En esta sección se calculan los impactos en el bienestar económico de cambios permanentes en la tasa impositiva media esperada en la riqueza y en el impuesto esperado *ad valorem* en el consumo. En este caso, se tiene

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\tau}} = -\frac{1}{r^2} < 0, \qquad 23)$$

y

$$\frac{\partial W}{\partial \hat{\tau}} = -\frac{1}{r^2}\alpha^{-1}\omega^* < 0. \qquad 24$$

Por lo tanto, al aumentar la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza o la tasa impositiva en el consumo, se tendrá una reducción en el bienestar económico.

6. Riqueza y consumo

En el transcurso de esta sección se obtiene el proceso estocástico que genera la riqueza real del consumidor cuando se aplica la regla óptima. Después de sustituir la ω^* óptima en la ecuación (11), se obtiene

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[\left(\frac{v\varphi\omega^*}{1+\varphi(1-\omega^*)} + (\omega^*\sigma_P)^2 - \tau_t\right)\mathrm{d}t - \omega^*\sigma_P\mathrm{d}z_t + \left(\frac{1+\varphi(1-\omega^*)}{1+\varphi} - 1\right)\mathrm{d}N_t\right], \tag{25}$$

donde

$$\tau_t = \tau_0 \exp\left\{\left(\bar{\tau} - \frac{1}{2}\sigma_\tau^2\right)t + \varepsilon\sigma\sqrt{t}\right\}, \qquad \mathrm{E}\left[\tau_t \middle| \tau_0\right] = \tau_0 e^{\bar{\tau}t} \tag{26}$$

y $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$. La función de densidad de τ_t, dado τ_0, es log-normal y satisface

$$f_{\tau_t|\tau_0}(x|\tau_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_\tau x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x/\tau_0) - (\bar{\tau} - 1/2\sigma_\tau^2)t}{\sigma_\tau\sqrt{t}}\right)^2\right\}. \tag{27}$$

Además se tiene

$$\mathrm{E}\left[\tau_t \middle| \tau_0\right] = \tau_0 e^{\bar{\tau}t} \tag{28}$$

y

$$\mathrm{Var}\left[\tau_t \middle| \tau_0\right] = \tau_0^2 e^{2\bar{\tau}t}\left(e^{\sigma_\tau^2 t} - 1\right). \tag{29}$$

La solución a la ecuación diferencial estocástica (25), condicionada por a_0, es (véase el apéndice A, fórmula (A.3))

$$a_t = a_0 e^{\xi_t}, \tag{30}$$

donde[3]

$$\xi_t = \theta_t + \phi_t \qquad \theta_t \left| \tau_t \sim N\left[\left[F(\omega^*) \right] - \tau_t \;\; t, G(\omega^*) t \right] \right. \tag{31}$$

$$\phi_t = L\left(\omega^*\right) N_t, \tag{32}$$

y

$$N_t \sim P(\nu t) \tag{33}$$

Los componentes estacionarios de los parámetros de las distribuciones ya mencionadas son:

y

$$F\left(\omega^*\right) = \frac{\nu \;\; \varphi \;\; \omega^*}{1+\varphi\left(1-\omega^*\right)} + \frac{\left(\omega^* \sigma_P\right)^2}{2},$$

$$\mathrm{G}\left(\omega^*\right) = \left(\omega^* \sigma_P\right)^2,$$

y

$$L\left(\omega^*\right) = \log\left(\frac{1+\varphi\left(1-\omega^*\right)}{1+\varphi}\right).$$

También note que

$$\mathrm{E}\left[\xi_t \middle| \tau_t\right] = \left[F\left(\omega^*\right) - \tau_t + L\left(\omega^*\right)\nu\right] t, \tag{34}$$

y

$$\mathrm{Var}\left[\xi_t \middle| \tau_t\right] = \left[G\left(\omega^*\right) + \left[L\left(\omega^*\right)\right]^2 \nu\right] t \tag{35}$$

---

[3] $x \sim P(a)$ denota una variable aleatoria de tipo Poisson con media a.

Más aún, se sigue que

$$\mathrm{E}\left[\xi_t\right] = \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[\xi_t \middle| \tau_t\right]\right\} = \left[F\left(\omega^*\right) + \tau_0 e^{\bar{\tau}t} + L\left(\omega^*\right)\nu\right]t, \qquad 36)$$

y

$$\mathrm{Var}\left[\xi_t\right] = \mathrm{Var}\left\{\mathrm{E}\left[\xi_t \middle| \tau_t\right]\right\} + \mathrm{E}\left\{\mathrm{Var}\left[\xi_t \middle| \tau_t\right]\right\} = t^2\tau_0^2 e^{2\bar{\tau}t}\left(e^{\sigma_\tau^2 t} - 1\right) + \left[G\left(\omega^*\right) + \left[L\left(\omega^*\right)\right]^2 \nu\right]t. \qquad 37)$$

Las dos últimas ecuaciones, de acuerdo con (30), determinan la media y la varianza de la tasa de crecimiento de la riqueza real del individuo.

6.1 Dinámica del consumo

En virtud de las ecuaciones (9) y (30), el proceso estocástico para el consumo se puede escribir como

$$c_t^* = \alpha^{-1}\omega^* a_0 e^{\xi_t}. \qquad 38)$$

Esto significa que, en ausencia de mercados de productos derivados, el riesgo de depreciación tiene un efecto en la riqueza a través de la incertidumbre en ξ_t, es decir, la incertidumbre cambia el conjunto de oportunidades que enfrenta el consumidor. Por último, las ecuaciones (36) y (37), en virtud de (38), determinan la media y la varianza de la tasa de crecimiento del consumo.

7. Especificación de la tecnología

Se supone que la tecnología es de la forma $y_t = Ak_t$ donde $A > 0$. Es decir, el producto marginal del capital es constante e igual a A. Se supone que el capital no se deprecia. La condición para maximizar el beneficio requiere que $r = A$. Puesto que $1\text{-}\omega^* = k_t/a_t$ se tiene que

$$y_t = A\left(1 - \omega^*\right)a_t$$

Ahora bien, a partir de la ecuación (30), se obtiene que

$$y_t = A\left(1-\omega^*\right)a_0 e^{\xi_t}$$

Observe primero que la razón de la producción y el consumo permanece constante de acuerdo con

$$\frac{y_t}{c_t} = \frac{A\alpha\left(1-\omega^*\right)}{\omega^*}, \tag{39}$$

y debido a la restricción *cash-in-advance*, la razón del dinero y el consumo, $m_t/c_t = \alpha$, también permanece constante. Ahora bien, de las ecuaciones (38) y (39), se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}c_t}{c_t} = \frac{\mathrm{d}y_t}{y_t} = \mathrm{d}\xi_t$$

Además, $m_t = w^* a_t$, de donde $m_t = \omega^* a_0 e^{\xi_t}$. Por lo tanto,

$$\frac{\mathrm{d}m_t}{m_t} = \frac{\mathrm{d}c_t}{c_t} = \frac{\mathrm{d}y_t}{y_t} = \mathrm{d}\xi_t = \mathrm{d}\theta_t + \mathrm{d}\phi_t \tag{40}$$

Así, de las ecuaciones (31) a la (33), se tiene en $[t,t+\mathrm{d}t]$ que

$$\mathrm{d}\xi_t = \mathrm{d}\theta_t + \mathrm{d}\phi_t, \qquad d\theta_t\left|\tau_t \sim N\left[\left[F(\omega^*) - \tau_t\right]dt, G(\omega^*)\,dt\right]\right.$$

$$\mathrm{d}\phi_t = L\left(\omega^*\right)\mathrm{d}N_t$$

y

$$dN_t \sim P(vdt).$$

7.1 Tasa de crecimiento del producto

A continuación se determina, de manera endógena, la tasa de crecimiento del PIB. Ahora bien, si $\mathrm{d}t= T\text{-}t$, entonces, en virtud de (34), la tasa de crecimiento esperada del producto, en $[t, T]$, es

$$\psi_{t,T} \equiv \mathrm{E}\left[\frac{y_T - y_t}{y_t}\middle|\tau_t\right] = \mathrm{E}\left[\xi_{T-t}\middle|\tau_t\right] = \left[F\left(\omega^*\right) + \tau_t + L\left(\omega^*\right)v\right]\left(T-t\right) \tag{41}$$

Así, $\Psi_{t,T}$ depende de los parámetros que determinan los factores de riesgo, situación que muestra cambios cualitativos y cuantitativos significativos con respecto del planteamiento determinista. Asimismo, de (35), la varianza de tasa de crecimiento del producto, en $[t, T]$, está dada por

$$\mathrm{Var}\left[\frac{y_T - y_t}{y_t}\middle|\tau_t\right] = \left[G(\omega^*) + \left[L(\omega^*)\right]^2 \nu\right](T-t). \qquad 42)$$

Por último, debido a (40) las tasas esperadas de crecimiento del consumo y de los saldos reales, así como sus varianzas, quedan también determinadas por (41) y (42).

Es importante destacar que el modelo propuesto permite caracterizar la distribución del proceso estocástico de crecimiento del producto de la economía. Como puede observarse, a partir de los resultados anteriores, cuando los agentes son expuestos al riesgo de mercado éste afecta de manera sensible su comportamiento y expectativas. Por ejemplo, en los modelos deterministas se pueden determinar las trayectorias óptima de consumo y crecimiento, mientras que en el caso estocástico, las trayectorias de consumo y producción ya no pueden ser determinadas porque el consumo y el producto se convierte en variables aleatorias; situación que está más acorde con la realidad. En consecuencia, la consideración del riesgo conlleva a cambios cualitativos y cuantitativos drásticos en las decisiones de consumo y producción de los agentes.

8. Conclusiones

Este trabajo se ha concentrado en la determinación endógena de la tasa de crecimiento del producto interno bruto de una economía y del nivel de bienestar económico de sus agentes económicos. La "literatura del crecimiento" hasta ahora ha agotado los modelos deterministas para explicar la dinámica del consumo y del producto. La mayoría de los modelos existentes ignoran la incertidumbre, brindando una justificación elaborada de por qué la incertidumbre no necesita ser considerada. Sin embargo, esta investigación muestra que la incertidumbre tiene un impacto no sólo en el crecimiento, sino también en el desarrollo económico a través de sus efectos en el bienestar económico de los agentes. Por último, es importante destacar que la consideración de una tasa impositiva incierta en la riqueza ha llevado a una dinámica transicional más compleja, pero con resultados definitivamente más ricos en cuanto a la explicación de dinámica del crecimiento y, por ende, del bienestar.

El modelo estudiado supone que un incremento en el PIB conlleva a una distribución simétrica de los recursos y, por lo tanto, produce el mismo aumento en el bienestar de todos los individuos. Por supuesto, es necesario analizar el caso de una distribución asimétrica del producto, situación que ya se contempla en la agenda futura de investigación.

Apéndice A

En este apéndice se establecen dos resultados útiles en el desarrollo de este trabajo:

1. El lema de Itô para procesos combinados de difusión con saltos de *Poisson*, el cual puede ser enunciado de la siguiente manera. Dada la ecuación diferencial estocástica lineal y homogénea

$$\mathrm{d}x_t = x_t\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}z_t + \varphi\,\mathrm{d}q_t\right) \tag{A.1}$$

y una función $g(x_t)$ continua y dos veces diferenciable, entonces la diferencial estocástica de $g(x_t)$ está dada por

$$\mathrm{d}g\left(x_t\right) = \left[g_x\left(x_t\right)\;\; x_t + \frac{1}{2}g_{xx}\left(x_t\right)\sigma^2 x_t^2\right]\mathrm{d}t + g_x\left(x_t\right)\sigma x_t \mathrm{d}z_t + \left[g\left(x_t\left(1+\varphi\right)\right) - g\left(x_t\right)\right]\mathrm{d}q_t. \tag{A.2}$$

2. La solución a la ecuación (A.1) es

$$x_t = x_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\int_0^t \mathrm{d}z_u + \log\left(1+\varphi\right)\int_0^t \mathrm{d}q_u\right\}. \tag{A.3}$$

Es importante tener presente, al usar (A.3), que para $t \geq 0$ las propiedades para z_t y q_t son:

$$\mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{d}z_u\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[\left(\int_0^t \mathrm{d}z_u\right)^2\right] = \int_0^t \mathrm{d}u = t \quad \text{y} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^t \mathrm{d}q_u\right] = vt.$$

Apéndice B

En este apéndice se establece la ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) para el problema de control óptimo estocástico que maximiza la utilidad esperada del agente sujeto a su restricción presupuestal intertemporal. En este caso, la condición de HJB está dada por:

$$\begin{aligned} &vI(a_t,\tau_t,t) - I_\tau(a_t,\tau_t,t) - I_\tau(a_t,\tau_t,t)\bar{\tau}\tau_t - \frac{1}{2} I_{\tau\tau}(a_t,\tau_t,t)\tau_t^2\sigma_t^2 - I_a(a_t,\tau_t,t)a_t(r-\tau_t) \\ &\quad = \max_\omega \left\{ \log(\alpha^{-1}a_t\omega_t)e^{-rt} - I_a(a_t,\tau_t,t)a_t\Phi\omega_t + \frac{1}{2} I_{aa}(a_t,\tau_t,t)a_t^2\omega_t^2\sigma_P^2 \right. \\ &\qquad \left. - I_{at}(a_t,\tau_t,t)a_t\tau_t\omega_t\sigma_P\sigma_\tau\rho + vI\left(a_t\left(\frac{1+\varphi(1-\omega_t)}{1+\varphi}\right),\tau_t,t\right) \right\} \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde $$I(a_t,\tau_t,t) = \max_\omega \mathrm{E}_t\left\{\int_t^\infty \log\left(\alpha^{-1}a_s\omega_s\right)e^{-rs}\mathrm{d}s \,\middle|\, F_t\right\}$$

es la función de utilidad indirecta (o función de bienestar) del agente e $I_a(a_t,\tau_t,t)$ es la correspondiente variable de coestado. Dado el factor de descuento exponencial en la ecuación (12), se define $I_a(a_t,\tau_t,t)$ en forma separable en el tiempo como

$$I(a_t,\tau_t,t) = F(a_t,\tau_t)e^{-rt} \tag{B.2}$$

Por lo tanto, la ecuación (B.1) se transforma en

$$\begin{aligned}&(\nu+r)F(a_t,\tau_t)-F_\tau(a_t,\tau_t)\bar{\tau}\tau_t-\frac{1}{2}F_{\tau\tau}(a_t,\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2-F_a(a_t,\tau_t)a_t(r-\tau_t)\\&=\max_\omega\left\{\log\left(\alpha^{-1}a_t\omega_t\right)-F_a(a_t,\tau_t)a_t\Phi\omega_t+\frac{1}{2}F_{aa}(a_t,\tau_t)a_t^2\,\omega_t^2\sigma_P^2\right.\\&\left.-F_{a\tau}(a_t,\tau_t)a_t\tau_t\omega_t\sigma_P\sigma_\tau\rho+\nu F\left[a_t\left[\frac{1+\varphi(1-\omega_t)}{1+\varphi}\right],\tau_t\right].\right\}\end{aligned} \tag{B.3}$$

Se postula como candidato de solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, (B.3), a:

$$F(a_t,\tau_t)=\delta_0+\delta_1\log\left[\frac{a_t}{\tau_t}\right]+H(\tau_t;\delta_2,\delta_3), \tag{B.4}$$

donde δ_0, δ_1 y $H(\tau_t)$, son determinados a partir de la ecuación (B.3). Al sustituir la ecuación (B.4) en (B.3), se tiene

$$\begin{aligned}&r\left(\delta_0+\delta_1\log(a_t)\right)+\delta_1\left[\bar{\tau}-r-\frac{1}{2}\sigma_\tau^2\right]\\&+rH(\tau_t)-H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau}-\frac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2-r\delta_1\log(\tau_t)+\delta_1\tau_t\\&=\max_\omega\left\{\log\left(\alpha^{-1}a_t\omega_t\right)-\delta_1\Phi\omega_t-\frac{1}{2}\delta_1\omega_t^2\sigma_P^2+\nu\delta_1\log\left[\frac{1+\varphi(1-\omega_t)}{1+\varphi}\right].\right\}\end{aligned}$$

Al derivar con respecto de w_t e igualar a cero la expresión anterior se obtiene la condición de primer orden:

$$\frac{1}{\delta_1\omega}-\frac{\nu\varphi}{1+\varphi(1-\omega)}=(1+\hat{\tau})\alpha^{-1}+r+\pi-\sigma_P^2+\omega\sigma_P^2 \tag{B.5}$$

Posteriormente, en el apéndice C, se elige $H(\tau_t)$ como solución de

$$rH(\tau_t)-H'(\tau_t)\tau_t\bar{\tau}-\frac{1}{2}H''(\tau_t)\tau_t^2\sigma_\tau^2-r\delta_1\log(\tau_t)+\delta_1\tau_t=0$$

Los coeficientes δ_0 , y δ_1 son obtenidos después de sustituir la w* óptima en la ecuación (B.3). Esto conduce a $\delta_1 = r^{-1}$ y

$$\delta_0 = \frac{1}{r}\log\left(\alpha^{-1}\omega^*\right)$$
$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(\left(1+\bar{\tau}\right)\alpha^{-1}+r+\pi-\sigma_P^2\right)\omega^*+\frac{1}{2}\left(\omega^*\sigma_P\right)^2+\bar{\tau}-r-\frac{1}{2}\sigma_\tau^2\right.$$
$$\left.-v\log\frac{1+\varphi\left(1-\omega^*\right)}{1+\varphi}\right]. \tag{B.7}$$

El criterio de bienestar, W, del individuo representativo es la utilidad maximizada con una riqueza real inicial, a_0, y una tasa impositiva inicial a la riqueza, τ_0. En virtud de la ecuación (B.2), el bienestar está definido por:

$$W\left(\pi,v,\varphi,\bar{\tau},\hat{\tau};a_0,\tau_0\right)\equiv I\left(a_0,\tau_0,0\right)=F\left(a_0,\tau_0\right)=\frac{1}{r}\left[1+\log\left(a_0/\tau_0\right)+\log\left(\alpha^{-1}\omega^*\right)\right]$$
$$-\frac{1}{r^2}\left[\left(\left(1+\hat{\tau}\right)\alpha^{-1}+r+\pi-\sigma_P^2\right)\omega^*+\frac{1}{2}\left(\omega^*\sigma_P\right)^2+\bar{\tau}-\frac{1}{2}\sigma_\tau^2-v\log\left(\frac{1+\varphi\left(1-\omega^*\right)}{1+\varphi}\right)\right]. \tag{B.8}$$

Apéndice C

En el presente apéndice se resuelve la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden no homogénea que aparece en la ecuación (B.6). Sea $H = H(\tau)$ y considere la ecuación no homogénea del tipo de Euler-Cauchy

$$\tau^2 H''+\frac{2\bar{\tau}}{\sigma^2}\tau H'-\frac{2r}{\sigma^2}H=-\frac{2}{\sigma^2}\log\left(\tau\right)+\frac{2}{r\sigma^2}\tau, \tag{C.1}$$

donde r y σ son constantes positivas. A continuación, la ecuación (C.1) se transforma en una ecuación diferencial con coeficientes constantes, para ello se aplica el método de Euler con el siguiente cambio de variable $\tau = e^t$. Así, $t = \log(\tau)$,

$$\frac{\partial H}{\partial \tau}=\frac{1}{\tau}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{C.2}$$

y

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} = \frac{1}{\tau^2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\partial H}{\partial t}\right] \tag{C.3}$$

Después de sustituir las ecuaciones (C.2) y (C.3) en (C.1), se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \tau^2} + \left[\frac{2\tau}{\sigma^2} - 1\right]\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{2r}{\sigma^2}H = -\frac{2}{\sigma^2}t + \frac{2}{r\sigma^2}e^t. \tag{C.4}$$

La solución general de (C.4) es de la forma:

$$H(t) = H_c(t) + H_P(t) \tag{C.5}$$

donde H_C es la solución complementaria asociada a la ecuación homogénea, y H_P es una solución particular de la ecuación no homogénea. Para determinar H_C, se resuelve la siguiente ecuación característica:

$$\gamma^2 + \left[\frac{2\overline{\tau}}{\sigma^2} - 1\right]\gamma - \frac{2r}{\sigma^2} = 0.$$

Por lo tanto, la función complementaria es

$$H_c(t) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t}$$

C.6

donde las dos raíces están dadas por

$$\gamma_1 = \frac{4r}{\left(2\overline{\tau} - \sigma^2\right) + \sqrt{\left(2\overline{\tau} - \sigma^2\right)^2 + 8r\sigma^2}}$$

y

$$\gamma_2 = \frac{4r}{\left(2\overline{\tau} - \sigma^2\right) - \sqrt{\left(2\overline{\tau} - \sigma^2\right)^2 + 8r\sigma^2}}.$$

Para determinar H_p se utiliza el método de coeficientes indeterminados. Se supone una solución de la siguiente forma:

$$H_p\left(t\right) = At + B + Cte^t, \tag{C.7}$$

así

$$H'_p\left(t\right) = A + C\left(t+1\right)e^t$$

$$H''_p\left(t\right) = C\left(t+2\right)e^t,$$

Después de sustituir la ecuación (C.7), y sus derivadas, en (C.4), se tiene que

$$\left[\frac{2\overline{\tau}}{\sigma^2} - \frac{2r}{\sigma^2}\right]Cte^t + \left[1 + \frac{2\overline{\tau}}{\sigma^2}\right]Ce^t - \frac{2r}{\sigma^2}At + \left[\frac{2\overline{\tau}}{\sigma^2} - 1\right] - \frac{2r}{\sigma^2}B = -\frac{2}{\sigma^2}t + \frac{2}{r\sigma^2}e^t.$$

Al resolver término a término, los valores de A, B y C, están dados por

$$A = \frac{1}{r},\quad B = \frac{1}{2r^2}\left(2\overline{\tau} - \sigma^2\right), \text{y} \quad C = \frac{2}{r\left(\sigma^2 + 2\overline{\tau}\right)},$$

de donde una solución particular debe cumplir $\tau = r$. Por lo tanto,

$$H_p\left(t\right) = \frac{1}{\overline{\tau}}t - \frac{\sigma^2}{2\overline{\tau}^2} + \frac{1}{\overline{\tau}} + \frac{2}{\overline{\tau}\left(\sigma^2 + 2\overline{\tau}\right)}te^t \tag{C.8}$$

Al sustituir las ecuaciones (C.6) y (C.8) en (C.5), se obtiene que

$$H\left(t\right) = \delta_2 e^{\gamma_1 t} + \delta_3 e^{\gamma_2 t} + \frac{1}{\overline{\tau}}t - \frac{\sigma^2}{2\overline{\tau}^2} + \frac{1}{\overline{\tau}} + \frac{2}{\overline{\tau}\left(\sigma^2 + 2\overline{\tau}\right)}te^t.$$

Como $\tau = e^t$, la solución general de la ecuación (C.1), en términos de τ, está dada por

$$H(\tau) = \delta_2 \tau^{\gamma_1} + \delta_3 \tau^{\gamma_2} + \frac{1}{\bar{\tau}} \log(\tau) \left[1 + \frac{2}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} \tau \right] + \frac{1}{\bar{\tau}} \left[1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right]. \tag{C.9}$$

Los valores de δ_2 y δ_3 que satisfacen las condiciones iniciales $H(\tau_0) = H'(\tau_0) = 0$ son:

$$\delta_2 = \frac{\tau_0^{-\gamma_1}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_2 \left[\log(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right] - \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} \left(1 + \log(\tau_0)(1 - \gamma_2) \right) + 1 \right].$$

y

$$\delta_3 = \frac{\tau_0^{-\gamma_2}}{\bar{\tau}(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\gamma_1 \left[\log(\tau_0) + 1 - \frac{\sigma^2}{2\bar{\tau}} \right] - \frac{2\tau_0}{\sigma^2 + 2\bar{\tau}} \left(1 + \log(\tau_0)(1 - \gamma_1) \right) + 1 \right].$$

La primera condición inicial, $H(\tau_0) = 0$, asegura que el bienestar económico,

$$W \equiv I(a_0, \tau_0, 0) = F(a_0, \tau_0) = \delta_0 + \frac{1}{r} \log\left[\frac{a_0}{\tau_0} \right]$$

sea independiente de la selección de H . La segunda condición inicial, $H'(\tau_0) = 0$, garantiza que el bienestar es afectado negativamente por el impuesto a la riqueza, esto es,

$$\left. \frac{\partial I}{\partial \tau} \right|_{\tau=\tau_0} = -\frac{1}{r\tau_0} < 0,$$

y también asegura que H es la única solución de la ecuación C.1 .

Referencias

Asea, P. K., y S. J. Turnovsky, (1998). "Capital Income Taxation and Risk-Taking in a Small Open Economy" en *Journal of Public Economics*, 68, pp. 55-90.

Eaton, J., (1981). "Fiscal Policy, Inflation, and the Accumulation of Risk Capital, en *Review of Economic Studies*, 48, pp. 435-445.

Canton, E., (2001). "Fiscal Policy in a Stochastic Model of Endogenous Growth" en *Economic Modeling*, 18, pp. 19-47.

Gertler, M. y E. L. Grinols, (1982). "Monetary Randomness and Investment" en *Journal of Monetary Economics*, 10, pp. 239-258.

Gong, L., y H. Zou, (2003). "Military Spending and Stochastic Growth" en *Journal of Economic Dynamics and Control*, forthcoming.

Gokan, Y., (2002). "Alternative Government Financing and Stochastic Endogenous Growth" en *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, pp. 681-706.

Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky, (1993). "Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium" en *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17, pp. 1-36.

Leland, H. E., 1974 . "Optimal Growth in a Stochastic Environment" en *The Review of Economic Studies*, 41, pp 75-86.

Obstfeld, M. (1994). "Risk-Taking, Global Diversification, and Growth" en *American Economic Review*, 84, pp. 1310-1329.

Press, W. H.; S. A. Teukolski; W. T. Vetterling y B. P. Flannery, (1992). *Numerical Recipes in C: The art of scientific computing*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Ramey, G. y V. Ramey, (1995). Cross-Country Evidence on the Link between Volatility and Growth, en *American Economic Review*, 85, pp. 1138-1151.

Rebelo, S., (1991). Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth, en *Journal of Political Economy*, 99, pp. 500-521.

Turnovsky, S. J., (1993). "Macroeconomic Policies, Growth, and Welfare in a Stochastic Economy, en *International Economic Review*, 34, pp 953-981.

Turnovsky, S. J., (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*. 2nd ed., MIT Press, en Cambridge, MA.

———y E. L. Grinols, (1996). "Optimal Government Finance Policy and Exchange Rate Management in a Stochastically Growing Economy" en *Journal of International Money and Finance*, 15, pp. 687-716.

Venegas Martínez, F., (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis" en *Journal of Economic Dynamics and Control*, 25, pp. 1429-1449.

———, (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach" en *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8, pp. 1-12.

———, (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks" en *Economic Modelling*, 23, pp. 157-173.

———, (2006b). "Fiscal Policy in a Stochastic Temporary Stabilization Model: Undiversifiable Devaluation Risk" en *Journal of World Economic Review*, 1, pp. 87-106.

———, (2008a). "Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting When Consumption Can Be Delayed" en *International Journal of Economic Research*, 3, forthcoming.

———, (2008b). "Fiscal Policy in a Stochastic Model of Endogenous Growth: the Mexican Case" en *Indian Development Review*, 6, forthcoming.