Esta obra tiene como finalidad presentar de manera concisa y atractiva, las técnicas de vanguardia para la valuación de diversos activos y la estimación de curvas de rendimiento asociadas a bonos con diferentes características, así como proveer los desarrollos recientes sobre la identificación, medición y control de diversos riesgos. El reto es llevar de la mano al lector por un camino ameno, lleno de intuición y explicaciones didácticas que enriquezcan sus conocimientos sobre distintos temas financieros.

Una característica esencial de este libro es el uso de un lenguaje concreto y claro, sin descuidar el rigor científico y, busca también, proporcionar al lector los instrumentos analíticos y tecnológicos necesarios para desempeñarse como un profesional con los más altos estándares en el manejo de modelos matemáticos, herramientas de análisis y metodologías de valuación en el área financiera. Para ello, el contenido de esta obra proporciona múltiples aplicaciones y ejercicios ilustrativos, los cuales varían en grado de dificultad, desde los muy sencillos, hasta los que llegan a ser todo un desafío para el lector; en la mayoría de ejercicios se incluyen sus soluciones.

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Consejo Editorial

ISBN: 978-607-00-7339-7

9 786070 073397

Ingeniería Financiera Bonos, Acciones y derivados

Ingeniería Financiera

Bonos, Acciones y derivados

Francisco Venegas Martínez
Gerardo J. Gamboa Ortíz
Gilberto Pérez Lechuga

Ingeniería financiera

Bonos, acciones y derivados

Ingeniería financiera

Bonos, acciones y derivados

Francisco Venegas Martínez
Instituto Politécnico nacional
Gerardo J. Gamboa Ortiz
S. D. Indeval, S.A. de C.V.
Gilberto Pérez Lechuga
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Primera edición, 2014
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Mariano Abasolo 600, Col. Centro, Pachuca de Soto, Hidalgo, México. C.P. 42000
editor@uaeh.edu.mx

ISBN: 978-607-482-380-6

Consejo Editorial

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Prólogo

Francisco Venegas Martínez, Gerardo J. Gamboa Ortiz y Gilberto Pérez Lechuga son reconocidos especialistas en la academia y el sector financiero. Sus contribuciones contenidas en diversos modelos, métodos, técnicas y herramientas son ampliamente utilizadas, día a día, en la industria financiera. Una característica relevante de su libro es la presentación accesible de las ideas fundamentales sobre las que descansa el desarrollo de las Matemáticas Financieras Modernas, así como la combinación del rigor científico con la práctica financiera. Esta obra es un compendio, sobre la valuación de diversos instrumentos financieros, la estimación de estructuras de plazo de tasas de interés asociadas a bonos con diferentes características, y la administración de diversos riesgos (mercado, crédito y operativo), lo cual, seguramente, será de gran utilidad para todos aquellos que desean profundizar sus conocimientos sobre los temas de valuación de activos, estimación de curvas de rendimiento y gestión de riesgos.

Humberto Augusto Veras Godoy
Rector de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Junio, 2014.

Prefacio

El objetivo principal de esta obra consiste en presentar de manera concisa y atractiva las técnicas de vanguardia para la valuación de diversos activos y la estimación de curvas de rendimiento asociadas a bonos con diferentes características, así como los desarrollos más recientes sobre la identificación, medición y control de diversos riesgos financieros. El reto es llevar de la mano al lector por un camino ameno, lleno de intuición y explicaciones didácticas que enriquezcan sus conocimientos sobre diversos temas financieros. Una característica esencial de este libro es el uso de un lenguaje concreto y claro, sin descuidar el rigor científico.

Otro de los propósitos del presente libro es proporcionar al lector los instrumentos analíticos y técnicos necesarios para desempeñarse como un profesional con los más altos estándares en el manejo de modelos matemáticos, herramientas de análisis y metodologías de valuación en el área financiera. Para ello, el contenido de esta obra se ha enriquecido con múltiples aplicaciones y ejercicios ilustrativos, los cuales varían en grado de dificultad, desde los muy sencillos hasta los que llegan a ser todo un desafío para el lector; en la mayoría de ejercicios se incluyen sus soluciones.

Este proyecto es el resultado de muchas reuniones con alumnos, investigadores y practicantes, quienes enriquecieron esta obra con diversas observaciones, opiniones y sugerencias. También es importante reconocer la enorme tarea de varios asistentes que leyeron críticamente el contenido y editaron con gran esmero el libro en TEX.

Aun cuando se tuvo mucho cuidado para que la obra no contuviera errores, es probable que subsistan algunos de ellos. Cualquier comentario para corregir o mejorar el texto será siempre bienvenido; los correos electrónicos de los autores son: fvenegas1111@yahoo.com.mx, ggamboa@indeval.com.mx y glechuga2004@hotmail.com.

Francisco Venegas Martínez
Gerardo J. Gamboa Ortiz
Gilberto Pérez Lechuga
Junio, 2014

Índice general

Pág.

IV. Tópicos especiales

Introducción

Los mercados de subyacentes (acciones, bonos, divisas, etc.) y sus productos derivados (futuros, opciones, “warrants”, “*swap*s”, notas estructuradas, “cds”, “borhis”, etc.) han mostrado un crecimiento importante impulsado por al acelerado desarrollo de las tecnologías de información, lo cual, a su vez, ha facilitado su operación y diversificación. De esta manera, las bolsas en las que se negocian y cotizan subyacentes y sus productos derivados proporcionan mayores alternativas de inversión y de cobertura con más y mejor información.

En la actualidad los intermediarios financieros requieren de información oportuna de precios de subyacentes y derivados, así como de la estimación de curvas asociadas a instrumentos de deuda para su operación diaria. Asimismo, estos intermediarios necesitan información confiable sobre los niveles de riesgo de sus posiciones a fin de administrar posibles contingencias financieras. También es importante destacar que las metodologías y modelos existentes en la literatura son muy diversos en cuanto a sus supuestos e insumos y, en consecuencia, no existe un estándar que permita unificar los criterios de evaluación.

Por lo anterior, es indispensable contar con un texto que incorpore de manera consistente y sistemática las diversas técnicas de valuación de activos y estimación de estructuras de tasas de interés en un marco comparativo que destaque las limitaciones y ventajas de las mismas, con ejemplos concretos que destaque en forma clara y sencilla los insumos necesarios para la valuación de los diferentes instrumentos financieros disponibles en el mercado.

Este libro está organizado en cuatro partes, las cuales se resumen a continuación. En la parte I se desarrollan y discuten los conceptos básicos para la construcción de estructuras de plazos de tasas de interés: tasas de interés, interpolación y extrapolación, método “bootstrapping”. En la parte II se analizan y discuten los elementos que intervienen en la construcción de curvas de rendimiento al vencimiento (curvas *yield*), clasificadas de la siguiente manera: curvas domésticas, curvas extranjeras y curvas especiales. En la parte III se describen y discuten los conceptos básicos para la valuación de instrumentos en el mercado de dinero, mercado de capitales y el mercado de derivados. Por último, en la parte IV se analiza y desarrolla el concepto de valor en riesgo, riesgo de crédito (probabilidad de incumplimiento) y riesgo operativo.

Dr. Francisco Venegas Martínez

Posee los doctorados en Matemáticas y Economía por la Washington State University; las maestrías en Economía en el Instituto Tecnológico Autónomo de México, en Matemáticas, en Investigación de Operaciones y licenciatura en Matemáticas en la Universidad Nacional Autónoma de México. Fue ganador de la Presea Lázaro Cárdenas 2012, la más alta distinción que otorga el IPN a un Profesor-Investigador, entregada por el Presidente de la República, y ganador también del Premio a la Investigación Aplicada en el IPN en 2011. Fue ganador del Primer lugar del Premio Nacional en Investigación Económica Maestro Jesús Silva Herzog 2002, que otorga el Instituto de Investigaciones Económicas de la UNAM; ganador del primer lugar del Premio Nacional de Derivados MexDer 2004, en la categoría de investigación; ganador del segundo lugar del Premio Nacional de Derivados MexDer 2005 en investigación.

Es miembro de la Academia Mexicana de Ciencias y miembro de la Comisión de Premios 2012-2013 de la AMC. Ha sido integrante del Jurado del Premio México en Ciencia y Tecnología que otorga el Consejo Consultivo de Ciencias de la Presidencia de la República Mexicana en 2011 y 2012. Ha publicado más de 200 artículos en revistas de investigación, nacionales e internacionales y autor de más de 20 de libros de investigación.

Mtro. Gerardo J. Gamboa Ortiz

Posee la maestría en Ingeniería Económica por la Universidad La Salle; estudios de posgrado en finanzas en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), licenciatura en Ingeniería Civil en la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), y un diplomado en Planeación Estratégica en el Instituto Panamericano de Alta Dirección Empresarial (IPADE). Actualmente se desempeña como Director General Adjunto de Custodia, Compensación y Liquidación del Grupo BMV.

En el sector financiero a desempeñado los puestos de Director General de Valmer, S. A.; Director General de Valuadora GAF; Socio Director de Grupo GAF; Socio Director de ICAF, S. A. de C. V.; Director de Información y Estadística de la Bolsa Mexicana de Valores S. A. B. de C. V. (BMV); Director General del Instituto Mexicano del Mercado de Capitales; Director de Análisis Bursátil y Estudios Financieros de la BMV; Subdirector de Análisis y Vigilancia de Mercado de BMV y Gerente de Operaciones de la BMV.

Dr. Gilberto Pérez Lechuga

Ingeniero Industrial por la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Cursó la especialidad en Ingeniería de Sistemas en el Departamento de Ingeniería de Sistemas de la Sección de Graduados de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del Instituto Politécnico Nacional, lugar donde también obtiene el grado de Maestro en Ciencias en Investigación de Operaciones. Posteriormente, obtuvo el grado de Doctor en Ingeniería en Investigación de Operaciones por la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Ha realizado estancias posdoctorales en la Universidad de Campiñas, Brasil, en el área de Estadística Bayesiana, en La Habana, Cuba, en el área de Ingeniería de Confiabilidad en Plantas Nucleares; en la Universidad de Lleida, España, en el área de Dinámica de Sistemas no Lineales; en la Universidad de ULM, Alemania, en el área de Modelación y Optimización Estocástica de Sistemas; en la Universidad de Montreal, Canadá, en el área de la Modelación Matemática de Cadenas de Suministro y Sistemas de Transporte.

Ha publicado más de 100 trabajos relacionados con su especialidad en journals especializados y arbitrados. Es fundador y director del despacho Servicios Especializados de Consultoría en Ingeniería Industrial y Optimización Operativa". Actualmente, cuenta con la distinción de Investigador Nacional Nivel 1, otorgado por el Sistema Nacional de Investigadores del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de **México.**

Capítulo 1

Conversión de tasas

Conceptos básicos:

- ✔ **Tasas simples**
- ✔ **Tasas capitalizables**
- ✔ **Tasas continuas**
- ✔ **Principio de tasas equivalentes**
- ✔ **Pago anticipado de intereses**

1.1 Introducción

El presente capítulo está dedicado al problema de conversión entre tasas de interés expresadas en convenciones diferentes. Por ejemplo, si se cuenta con una tasa *yield* de un bono que paga cupones en fechas preestablecidas, entonces se podría estar interesado en calcular una tasa equivalente capitalizable en los periodos entre pagos. Este problema es resuelto si se realiza una conversión mediante el principio de tasas equivalentes, el cual se explica en detalle a continuación.

1.2 Equivalencia de tasas bajo condiciones de no arbitraje

Suponga que se cuenta con una tasa de interés (anualizada), R, que cotiza para un periodo de n días. En lo que sigue, se supone que el año comercial consta de 360 días. De esta manera, el valor futuro, F, de una unidad monetaria dentro de n días está dado por

$$F = 1 + R\left(\frac{n}{360}\right) \tag{1.1}$$

ó

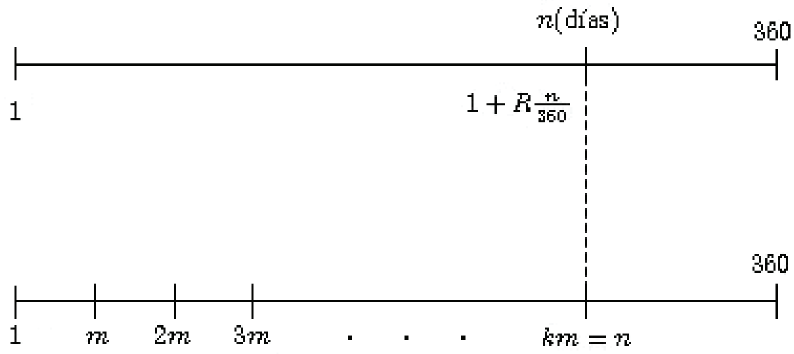
$$F = 1 + R\,(T - t)\,, \tag{1.2}$$

donde $T - t$ expresa la proporción que n días representan en un año. La cantidad $R(T-t)$ expresa los intereses. Considere ahora una tasa (anualizada), $\mathcal{R}_m$ que cotiza para un periodo de m días y que puede ser capitalizable k periodos de tal forma que $n = km$, es decir, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ m)$ (véase la Gráfica 1.1). La constante k es llamada la frecuencia de capitalización. En este caso, el valor futuro, $\mathcal{F}$, de una unidad monetaria es

$$\mathcal{F} = \left(1 + \mathcal{R}_m \frac{m}{360}\right)^k = \left(1 + \mathcal{R}_m \frac{m}{360}\right)^{n/m}. \tag{1.3}$$

Si se supone que el mercado de crédito (mercado donde se puede prestar o pedir prestado a las tasas mencionadas) está en equilibrio, lo cual implica que no hay oportunidades de arbitraje, entonces cualesquiera dos inversiones pagan exactamente el mismo rendimiento (principal más intereses). Por lo tanto, $F = \mathcal{F}$, es decir,

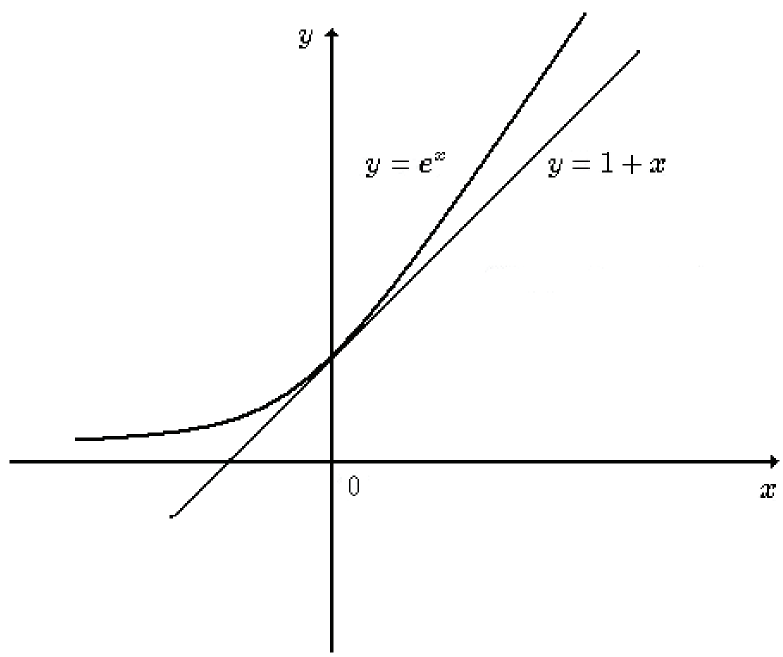
$$1 + R\left(\frac{n}{360}\right) = \left(1 + \mathcal{R}_m \frac{m}{360}\right)^{n/m}, \quad n = km. \tag{1.4}$$



Gráfica 1.1 Relación entre R y $\mathcal{R}_m$.

1.3 Principio de tasas equivalente

En el transcurso de esta sección se presenta y discute el principio de tasas equivalente. En la sección anterior se debe cumplir una relación entre n y m, a saber, $n \equiv 0(\text{mod } m)$, lo cual implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. A continuación, se establece una conexión entre las expresiones (1.1) y (1.3) que no requiere que $n \equiv 0(\text{mod } m)$. Para ello, considere la aproximación $e^x \approx 1 + x$, válida para $|x| << 1$, es decir, que x sea suficientemente pequeña, (véase la Gráfica 1.2).



Gráfica 1.2 Las funciones $y = 1 + x$, $y = e^x$ y su aproximación para $|x| << 1$.

Si se escribe $x = R(T-t)$ en la aproximación $e^x \approx 1 + x$, entonces

$$1 + R(T-t) \approx e^{R(T-t)}. \tag{1.5}$$

Observe que el lado derecho de (1.5) se puede reescribir como:

$$e^{R(T-t)} = e^{R(n/360)} = e^{R(n/m)(m/360)} = [e^{R(m/360)}]^{n/m}, \qquad m \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Si se utiliza de nuevo la aproximación $e^x \approx 1 + x$ en ambos lados de (1.6), se sigue que

$$1 + R(T-t) \approx [e^{R(m/360)}]^{n/m} \approx [1 + R(m/360)]^{n/m},$$

donde m es un número real arbitrario (distinto de cero), dado que sólo interesan los valores positivos. Por lo tanto,

$$1 + R(T-t) \approx [1 + R(m/360)]^{n/m}. \tag{1.7}$$

Dado que la expresión de arriba es una aproximación, se define $\mathcal{R}_m$ de tal forma que al sustituirla en el lado derecho de (1.7), la aproximación se convierta en una identidad (véase la Gráfica 1.1), esto es

$$1 + R(T-t) \equiv [1 + \mathcal{R}_m(m/360)]^{n/m}. \tag{1.8}$$

Evidentemente, si p es cualquier número real distinto de cero, se tiene que

$$1 + R(T-t) \equiv [1 + \mathcal{R}_m(m/360)]^{n/m} \equiv [1 + \mathcal{R}_p(p/360)]^{n/p}. \tag{1.9}$$

Por último, sea $\widetilde{R}$ tal que al sustituirla en el lado derecho de la aproximación $1 + R(T-t) \approx e^{R(T-t)}$, ésta se convierta en una identidad, de tal suerte que

$$e^{\widetilde{R}(T-t)} \equiv 1 + R(T-t) \equiv [1 + \mathcal{R}_{m_1}(m_1/360)]^{n/m_1} \equiv [1 + \mathcal{R}_{m_2}(m_2/360)]^{n/m_2}. \tag{1.10}$$

La expresión anterior representa el principio de tasas equivalentes, también conocido como la "triple igualdad de conversión de tasas". Este principio permite convertir tasas simples en tasas continuamente capitalizables o tasas capitalizables en un cierto número de periodos en tasas simples, y cualquier otra conversión que pueda proporcionar (1.10). Es importante destacar que a partir de (1.9) se cumple que

$$[1 + \mathcal{R}_{m_1}(m_1/360)]^{1/m_1} \equiv [1 + \mathcal{R}_{m_2}(m_2/360)]^{1/m_2},$$

lo cual implica la irrelevancia de n.

1.4 Conversión de tasa capitalizable en m periodos a tasa simple

En esta sección se utiliza el principio de equivalencia entre tasas para pasar de una tasa capitalizable en m periodos a una tasa simple. Suponga que se tiene una tasa $\mathcal{R}_m$ (anualizada) capitalizable k periodos, cada periodo de m días, y se desea convertirla en una tasa simple R a n días, entonces

$$1 + R\left(\frac{n}{360}\right) = \left(1 + \mathcal{R}_m \frac{m}{360}\right)^{n/m},$$

lo cual lleva a

$$R = \left[\left(1 + \mathcal{R}_m \frac{m}{360}\right)^{n/m} - 1\right] \frac{360}{n}. \tag{1.11}$$

A continuación se ilustra a través de un ejemplo la aplicación de la fórmula anterior. Suponga que se tiene una tasa $\mathcal{R}_m = 0.0805$ (8.05%) capitalizable cada $m = 180$ días y se desea convertirla en una tasa simple, R, a $n = 300$ días. De acuerdo con la ecuación (1.11), se tiene que

$$R = \left[\left(1 + 0.0805 \frac{180}{360} \right)^{300/180} - 1 \right] \frac{360}{300} = 0.0815.$$

En el siguiente cuadro se muestra el comportamiento de R cuando el plazo n y la tasa R_m aumentan, manteniendo constante $m = 180$.

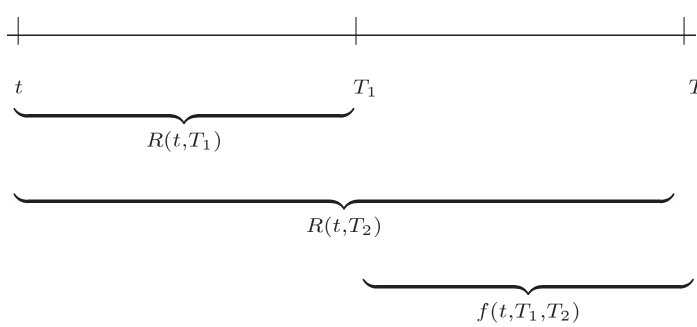
Plazo simple (n días)	Tasa capitalizable cada m=180 días ($\mathcal{R}_m$) %	Tasa simple (R) %
170	7.0000	6.9933
180	8.0000	8.0000
182	8.0200	8.0218
200	8.0300	8.0477
300	8.0500	8.1575

Cuadro 1.2 Comportamiento de R en función de n y R_m, $m = 180$.

Los casos restantes sobre conversión de tasas a través del principio de equivalencia son revisados en la sección de ejercicios.

1.5 Tasa *forward*

La tasa *spot* a T años es la tasa de interés de una inversión efectuada para un periodo de tiempo que empieza hoy,(t), y que termina en T años. Muchas veces, se está interesado en conocer las tasas de interés intermedias entre una tasa *spot* a T_1 años y una tasa *spot* a T_2 años con $T_2 > T_1$. Este tipo de información lo contiene de forma implícita la estructura de plazos y a partir de esto surge el concepto de tasa *forward*, la cual se puede definir como la tasa de interés que esta implícita entre las tasas *spot* actuales para periodos futuros de tiempo. A continuación se ilustra el cálculo de una tasa *forward*, para ello considere las tasas *spot* a T_1 y a T_2 años denotadas por $R(t,T_1)$ y $R(t,T_2)$ respectivamente. De esta forma, la inversión de 1 unidad monetaria a un plazo de T_2 años se puede ver como una inversión a un periodo de T_1 años y al final de T_1 años se reinvierte a la tasa futura en $T_2 - T_1$ prevaleciente dentro de T_1, la Gráfica 1.3 muestra esta situación



Gráfica 1.3 Estructura de plazos y tasa *forward*.

Por lo tanto, bajo argumentos de arbitraje podría esperarse que ambas alternativas de inversión den como resultado el mismo rendimiento en T_2, es decir,

$$1 + R(t,T_2)(T_2 - t) = (1 + R(t,T_1)(T_1 - t)(1 + f(t,T_1,T_2)(T_2 - T_1), \tag{1.12}$$

donde $f(t, T_1, T_2)$ es la tasa que se observa en t para una inversión que comienza en T_1 y termina en T_2, la cual se le conoce como tasa *forward* de T_1 a T_2, observada en t. Por lo que la expresión de la tasa *forward* bajo composición discreta está dada por

$$f(t, T_1, T_2) = \left[\frac{(1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{(1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} - 1 \right] \frac{1}{T_2 - T_1}. \tag{1.13}$$

Análogamente, si la composición de las tasas *spot* es continua, la tasa *forward* puede ser obtenida a través de la ecuación

$$e^{R(t,T_2)(T_2-t)} = e^{R(t,T_1)(T_1-t)} e^{f(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)}.$$

A partir de la expresión anterior, la tasa *forward* bajo composición continua está dada por

$$f(t, T_1, T_2) = \Big[R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t) \Big] \frac{1}{T_2 - T_1}. \tag{1.14}$$

De las expresiones para la tasa *forward* proporcionadas en (1.13) y (1.14) y usando el hecho de que $R(t, t) = 0$, se observa que la tasa *forward* $f(t, t, T)$ es la tasa *spot* $R(t, T)$.

Es importante destacar que existe una gran número de tasas *forwards* asociadas a una curva *spot*. De hecho, si existen n periodos, entonces existen n tasas *spot* (incluyendo $R(t, t)$ la cual se define como cero) y de esta estructura de plazos existen $n(n + 1)/2$ tasas *forward* (incluyendo las tasas *spot* básicas). Sin embargo, todas estas tasas *forward* son derivadas de las n tasas *spot* subyacentes.

1.5.1 Ejemplo de tasa *forward*

A continuación se presenta un ejemplo sencillo del cálculo de una tasa *forward*.

Suponga que se tienen los siguientes nodos:

Plazo	Tasa de interés %
30	6.909819
58	7.045305

La tasa implícita de 28 días que aplicará dentro de 30 días, $f(t = 0, 30/360, 58/360)$ es:

$$\begin{aligned} f(t = 0, 30/360, 58/360) &= \left[\left(\frac{1 + 0.07045305\,(58/360)}{1 + 0.06909819\,(30/360)} \right) - 1 \right] \frac{360}{28} \\ &= 0.071493. \end{aligned}$$

1.6 Pago anticipado de intereses

En esta sección se revisará la valuación de créditos en la que los intereses son pagaderos por adelantado. Esta práctica es común dentro de las instituciones crediticias en América Latina para asegurar el pago puntual de los intereses a clientes que carecen de un historial crediticio.

Suponga ahora que se suscribe un préstamo en el que se acuerda realizar el pago de intereses en t. Esto es, en el momento de la suscripción se deposita cierto capital C_t y se recibe la cantidad I como pago de los intereses que se generarán en el periodo $T - t$. Si se busca el valor futuro de la cantidad con la que se cuenta hoy; la suma del capital inicial con los intereses, multiplicados estos últimos por el factor de actualización correspondiente se llega a:

$$F = C_t + I_{T-t}\left(1 + R\frac{T-t}{n}\right), \tag{1.15}$$

donde $I_{T-t} = C_t\left(R\frac{T-t}{n}\right)$, por lo que al sustituirlo se obtiene que

$$F = C_t\left(1 + R\frac{T-t}{n} + \left(R\frac{T-t}{n}\right)^2\right). \tag{1.16}$$

Para ilustrar este concepto, suponga que se contrata un crédito por \$20,000.00, en el cual se acuerda el pago anticipado de intereses, con un vencimiento de 18 meses y una tasa anual del 5%, ¿cuál es el valor futuro del crédito? La respuesta es:

$$F = 20000\left(1 + 0.05\frac{18}{12} + \left(0.05\frac{18}{12}\right)^2\right) = 21612.5.$$

1.6.1 Obtención de la tasa anual cuando los intereses son pagados por adelantado

Después de analizar el ejemplo anterior, surge la siguiente pregunta ¿es posible conocer la tasa anual a la que se efectúa un préstamo con pago anticipado de intereses? Si los intereses se pagan al inicio del contrato y se desea calcular la tasa efectiva, vigente durante $T-t$, se puede usar el hecho que

$$F = C_t\left(1 + R\frac{T-t}{n} + \left(R\frac{T-t}{n}\right)^2\right).$$

Observe que la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$R^2\left(\frac{T-t}{n}\right)^2 + R\left(\frac{T-t}{n}\right) + \left(1 - \frac{F}{C_t}\right) = 0, \tag{1.17}$$

lo cual puede ser resuelto aplicando la resolución de una ecuación de segundo grado, lo que conduce a:

$$R = \frac{-\left(\frac{T-t}{n}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{T-t}{n}\right)^2 - 4\left(\frac{T-t}{n}\right)^2\left(1 - \frac{F}{C_t}\right)}}{2\left(\frac{T-t}{n}\right)^2}. \tag{1.18}$$

Si se usan los datos y resultado del ejemplo anterior, se llega a

$$R = \frac{-\left(\frac{18}{12}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{18}{12}\right)^2 - 4\left(\frac{18}{12}\right)^2\left(1 - \frac{21612.5}{20000}\right)}}{2\left(\frac{18}{12}\right)^2} = 0.05.$$

1.6.2 Obtención del plazo de un crédito cuando los intereses son pagados por adelantado

Siguiendo con la lógica de la sección anterior, surge además la siguiente pregunta: ¿cómo se puede obtener el plazo de un préstamo donde los intereses deben ser cubiertos en forma anticipada? Para ello se parte de la expresión (1.16) y se despeja el tiempo $T-t$, lo que lleva a una ecuación cuadrática de la forma

$$(T-t)^2\left(\frac{i}{n}\right)^2+(T-t)\left(\frac{R}{n}\right)+\left(1-\frac{F}{C_t}\right)=0, \tag{1.19}$$

cuya solución corresponde a una ecuación cuadrática, de tal forma que:

$$T-t=\frac{-\left(\frac{R}{n}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{R}{n}\right)^2-4\left(\frac{R}{n}\right)^2\left(1-\frac{F}{C_t}\right)}}{2\left(\frac{R}{n}\right)^2}. \tag{1.20}$$

Para ilustrar el concepto, suponga que necesita conocer el tiempo que deberá transcurrir para que de una inversión de \$40,000.00 se obtengan \$60,000.00, suponiendo que los intereses se pagan por anticipado a una tasa del 8% bimestral. Si se sustituyendo estos datos se obtiene que

$$T-t=\frac{-\left(\frac{0.08}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{0.08}{2}\right)^2-4\left(\frac{0.08}{2}\right)^2\left(1-\frac{60000}{40000}\right)}}{2\left(\frac{0.08}{2}\right)^2}=9.15063509.$$

1.7 Bibliografía

Fabozzi, F. J. (2006). Fixed Income Mathematics, McGraw-Hill, New York, 4th. ed.

Kellison, S. (1991). The Theory of Interest. 2nd. ed., Irwin, Homewood, Il.

Kitter, G. (1999). Investment Mathematics for Finance & Treasury Professionals: a practical approach, The Wiley Treasuries Management Association Series, New York, U. S.

Lyuu, Yuh-Dauh (2002). Financial Engineering and Computation, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S. A. de C. V.

Teall, J. L. and H. Iftekhar (2002). Quantitative Methods for Finance and Investments, Blackwell Publishers, U. K.

1.8 Ejercicios

1.1 Muestre que

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)^m=e^{R(T-t)}.$$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)^m &= \exp\left\{\ln\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)^m\right]\right\}\\
&= \exp\left\{\lim_{m\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)^m\right]\right\}\\
&= \exp\left\{\lim_{m\to\infty} m\ln\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)\right\}\\
&= \exp\left\{\lim_{m\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)}{\frac{1}{m}}\right\}\\
&= \exp\left\{\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial m}\ln\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)}{\frac{\partial}{\partial m}\frac{1}{m}}\right\}\\
&= \exp\left\{\lim_{m\to\infty}\frac{-\frac{R(T-t)}{m^2}}{\left(-\frac{1}{m^2}\right)\left(1+\frac{R(T-t)}{m}\right)}\right\}\\
&= e^{R(T-t)}.
\end{aligned}
$$

1.2 Justifique

$$e^x \approx 1+x, \qquad |x| << 1.$$

Solución: Sea $f(x)=e^x$. Esta función y todas sus derivadas son continuas en todo punto. Si se utiliza el teorema de Taylor alrededor de $x=0$, es decir, si se emplea la serie de Maclaurin de e^x, entonces

$$e^x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n(x,0),$$

donde

$$R_n(x,0)=\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t.$$

En este caso, $f'(x)=e^x$, por lo que $f^{(i)}(0)=1$. Por consiguiente,

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x,0).$$

Si $|x| << 1$, los términos $\frac{x^2}{2!},\ldots,\frac{x^n}{n!}$ son despreciables, entonces $e^x \approx 1+x$.

1.3 Considere una tasa de interés simple del 30% que cotiza para $n = 360$ días y se desea convertir en una tasa capitalizable trimestralmente.

Solución: De acuerdo con la ecuación (1.8) se tiene que

$$\mathcal{R}_m = \left[\left(1+R\frac{n}{360}\right)^{m/n}-1\right]\frac{360}{m}.$$

Si se sustituyen $n = 360$, $m = 90$ y $R = 0.30$, se obtiene

$$\mathcal{R}_m = \left[\left(1 + (0.30)\frac{300}{360}\right)^{90/360} - 1\right]\frac{360}{90} = 27.1160.\%$$

1.4 Suponga que se tiene una tasa capitalizable bimestralmente del 24% y se desea convertir en una tasa capitalizable trimestralmente.

Solución: En virtud de la ecuación (1.10), se sigue que

$$\left(1 + \mathcal{R}_{m_1}\frac{m_1}{360}\right)^{1/m_1} = \left(1 + \mathcal{R}_{m_2}\frac{m_2}{360}\right)^{1/m_2}.$$

Si se despeja $\mathcal{R}_{m_1}$ de la ecuación anterior, se obtiene

$$\mathcal{R}_{m_1} = \left[\left[\left(1 + \mathcal{R}_{m_2}\frac{m_2}{360}\right)^{n/m_2}\right]^{m_1/n} - 1\right]\frac{360}{m_1}$$
$$\mathcal{R}_{m_1} = \left[\left(1 + \mathcal{R}_{m_2}\frac{m_2}{360}\right)^{m_1/m_2} - 1\right]\frac{360}{m_1}.$$

Si se sustituyen $m_1 = 90$ y $m_2 = 60$ en la expresión anterior, se concluye que

$$\mathcal{R}_{m_1} = \left[\left(1 + 0.24\frac{60}{360}\right)^{90/60} - 1\right]\frac{360}{90} = 24.2384\%.$$

1.5 Dada una tasa anual capitalizable cada año y medio del 40%, determine una tasa anual continua.

Solución: De acuerdo con la ecuación (1.10), se obtiene que

$$e^{\widetilde{R}(T-t)} = [1 + \mathcal{R}_m(m/360)]^{n/m}.$$

Si se aplica logaritmo natural en ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que

$$\widetilde{R}(T-t) = \frac{n}{m}\ln\left(1 + \mathcal{R}_m\left(\frac{m}{360}\right)\right).$$

Si se sustituyen n=360 y m=540, se concluye que

$$\widetilde{R}(T-t) = \frac{360}{540}\ln\left(1 + 0.40\left(\frac{540}{360}\right)\right) = 31.3336\%.$$

1.6 Suponga que se tiene una tasa continuamente capitalizable del 12% y se desea convertir en una tasa capitalizable semestralmente.

Solución: Con base en la ecuación (1.10), se obtiene que

$$e^{\widetilde{R}(n/360)} = \left(1 + \mathcal{R}_m\left(\frac{m}{360}\right)\right)^{n/m}.$$

Si se despeja $\mathcal{R}_m$ de la ecuación anterior, se sigue que

$$\mathcal{R}_m = \left(e^{\widetilde{R}(m/360)} - 1\right)\frac{360}{m}.$$

Por último, se sustituyen $m = 180$ y $\widetilde{R} = 0.12$, de tal manera que

$$\mathcal{R}_m = \left(e^{0.12(180/360)} - 1\right)\frac{360}{180} = 12.3673\%.$$

1.7 Dada una tasa simple anual del 25%, determine una tasa continuamente capitalizable.

Solución: De acuerdo con la ecuación (1.5) se obtiene que

$$e^{R(T-t)} = 1 + R\left(\frac{n}{360}\right).$$

Si se despeja $R(T-t)$, se tiene que

$$R(T-t) = \ln\left(1 + 0.25\left(\frac{360}{360}\right)\right) = 22.3144\%.$$

1.8 Suponga que se tienen los siguientes plazos y sus tasas correspondientes:

Plazo	Tasa de interés (%)
56	7.40
84	7.44

Encuentre la tasa *forward* implícita de 28 días que aplicará dentro de 56 días, es decir, $f(t = 0, 56/360, 84/360)$.

Solución:

$$\begin{aligned} f(0, 56/360, 84/360) &= \left[\left(\frac{1 + 0.0744\,(84/360)}{1 + 0.0740\,(56/360)}\right) - 1\right]\frac{360}{28} \\ &= 0.074344. \end{aligned}$$

1.9 Considere un crédito de \$50,000.00 en el que se acuerda el pago anticipado de intereses, además de un vencimiento de 20 meses con una tasa anual de 9%. ¿Cuál es la tasa de interés efectiva asociada en este préstamo?

Capítulo 2

Conceptos básicos de interpolación y extrapolación

Conceptos básicos:

- ✓ **Nodos de mercado**
- ✓ **Interpolación lineal**
- ✓ **Interpolación de alambrada**
- ✓ **Extrapolación**
- ✓ **Splines cúbicos**

2.1 Introducción

El método de interpolación se utiliza frecuentemente en la estimación de tasas de interés entre puntos obtenidos de información directa o indirecta del mercado. El problema por resolver es la obtención de valores intermedios. En este capítulo se presentan varios métodos de interpolación con ejemplos ilustrativos: interpolación lineal, interpolación de alambrada, extrapolación y splines cúbicos.

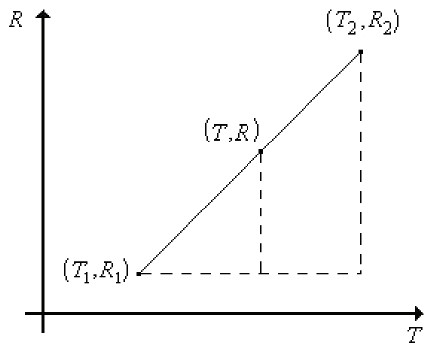
2.2 Interpolación y extrapolación lineal

En el proceso de estimación de curvas asociadas a instrumentos de deuda se utiliza frecuentemente el método de interpolación lineal entre puntos obtenidos de información (directa o indirecta) del mercado.

La interpolación lineal consiste en construir una función lineal por pedazos que pase por un conjunto de puntos conocidos llamados nodos. Evidentemente, una limitación importante de este método es que, en general, el resultado es una función no diferenciable en cada nodo.

En lo que sigue, los nodos se denotarán mediante pares $(T, R(t,T))$, donde t es el tiempo de referencia (hoy), T es el tiempo de vencimiento y $R(t,T)$ es el rendimiento asociado al plazo $T-t$ (como proporción de un año). Con el propósito de hacer la notación más sencilla se supone que $t=0$. También, por simplicidad, los nodos $(T_i, R(0,T_i))$, $i=1,2,\ldots,N$, se denotarán mediante (T_i, R_i).

Considere, por ejemplo, dos nodos (T_1, R_1) y (T_2, R_2) y suponga que se desea encontrar el valor de R asociado a un valor T tal que $T_1 < T < T_2$, como se muestra en la Gráfica 2.1:



Gráfica 2.1 Interpolación lineal con dos nodos.

Si se utiliza la equivalencia de los triángulos en la gráfica anterior, se sigue inmediatamente que

$$\frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} = \frac{R - R_1}{T - T_1}. \tag{2.1}$$

Al despejar el rendimiento R, al tiempo T, de la expresión anterior resulta que:

$$R = \left(\frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1}\right)(T - T_1) + R_1. \tag{2.2}$$

En la fórmula anterior, el término $(R_2 - R_1)/(T_2 - T_1)$ representa la pendiente de la recta que pasa por los puntos (T_1, R_1) y (T_2, R_2). De esta manera, es posible calcular el valor de R asociado a cualquier tiempo T mayor a T_1 y menor que T_2.

2.3 Ejemplo de interpolación con 2 nodos

En esta sección se muestra con un ejemplo sencillo, la aplicación del método de interpolación lineal con dos nodos. Suponga que se cuenta con los nodos del siguiente cuadro:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
28	7.26
91	7.43

Cuadro 2.1 Nodos de mercado a distintos plazos.

El objetivo es obtener las tasas de interés correspondientes a los plazos 50 y 70 días. En este caso, $(T_1, R_1) = (28/360, 0.0726)$ y $(T_2, R_2) = (91/360, 0.0743)$. Observe que si se multiplican ambos lados de la ecuación (2.2) por 100, se obtiene

$$R = \left(\frac{7.43 - 7.26}{91 - 28}\right)(T - 28) + 7.26.$$

Observe también que el factor $1/360$ ya no aparece, éste se incluía tanto en el término de la pendiente como en la diferencia de tiempos que lo multiplican. En consecuencia, es irrelevante utilizar tasas en notación decimal o porcentual. De la misma forma, los plazos se pueden utilizar en días o como proporción de año y el resultado de la interpolación es igual. Si $T = 50$ (días), entonces

$$\left(\frac{7.43 - 7.26}{91 - 28}\right)(50 - 28) + 7.26 = 7.31.$$

Si $T = 70$ (días), entonces

$$\left(\frac{7.43 - 7.26}{91 - 28}\right)(70 - 28) + 7.26 = 7.37.$$

2.4 Ejemplo de interpolación con 4 nodos

En el transcurso de esta sección se ilustra con un ejemplo sencillo la aplicación del método de interpolación lineal con 4 nodos. Suponga que se cuenta con los nodos del siguiente cuadro:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
40	7.29
50	7.34
60	7.35
70	7.38

Cuadro 2.2 Información sobre nodos.

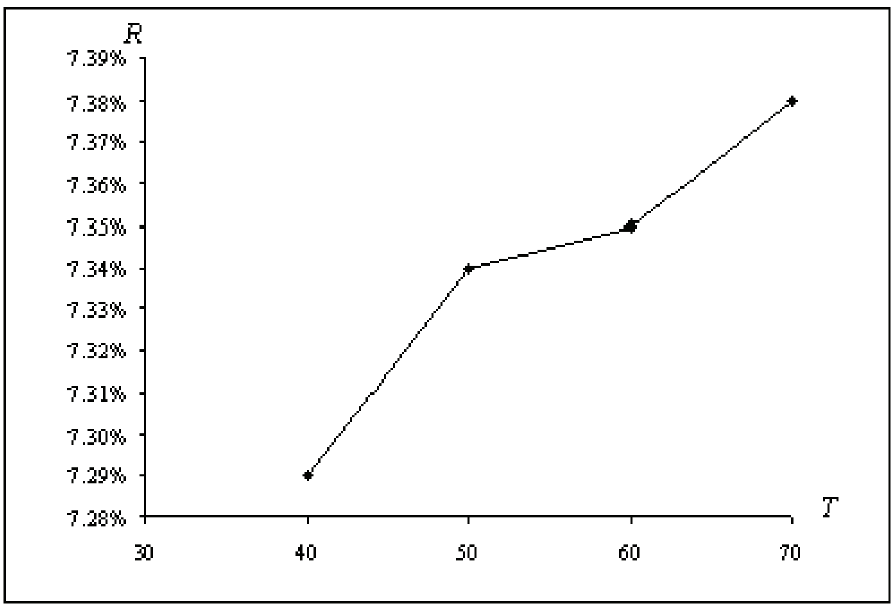
En este caso, como se tienen 4 nodos, existen 3 funciones lineales, dadas por las siguientes expresiones:

$$R = \left(\frac{7.34 - 7.29}{50 - 40}\right)(T - 40) + 7.29 \quad \text{para} \quad 40 < T < 50;$$

$$R = \left(\frac{7.35 - 7.34}{60 - 50}\right)(T - 50) + 7.34 \quad \text{para} \quad 50 < T < 60;$$

$$R = \left(\frac{7.38 - 7.35}{70 - 60}\right)(T - 60) + 7.35 \quad \text{para} \quad 60 < T < 70.$$

La Gráfica 2.2 muestra en su conjunto a las funciones anteriores, las cuales forman una función continua por pedazos.



Gráfica 2.2 Interpolación lineal con 4 nodos.

2.5 Extrapolación lineal

En esta sección se ilustra con un ejemplo el método de extrapolación lineal. Suponga que se cuenta con los nodos del ejemplo anterior. Para extrapolar linealmente se utiliza la última recta generada. Por ejemplo, si se desea obtener el valor de R cuando $T = 75$ (días), la extrapolación lineal conduce al siguiente resultado

$$R = \left(\frac{7.38 - 7.35}{70 - 60}\right)(75 - 60) + 7.35 = 7.39.$$

Es recomendable no aplicar extrapolación lineal a valores lejanos de $T = 70$, ya que no es posible saber de antemano si habrá o no un cambio de pendiente en la próxima observación.

2.6 Interpolación de alambrada

Otro método ampliamente utilizado por las mesas de "trading" y riesgos de mercado es el de interpolación de alambrada. Este método parte del supuesto de que las tasas tienen un crecimiento exponencial y resulta más exacto que la interpolación lineal pues utiliza dos puntos extremos de la curva para encontrar el valor deseado entre ellos.

El procedimiento para estimar una tasa con el método de alambrada es el siguiente:

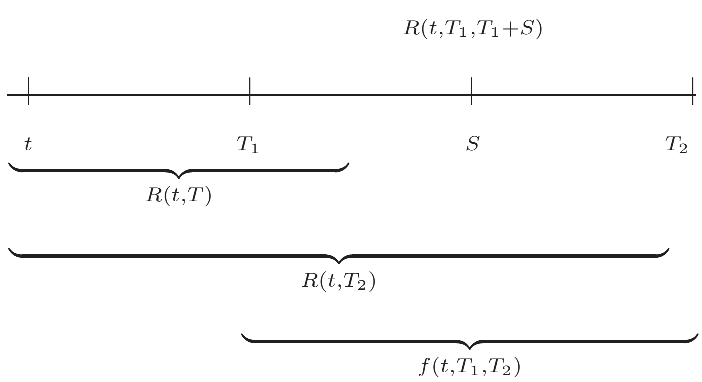
(*i*) Obtener las tasa *forward* $f(t, T_1, T_2)$ considerando los plazos T_1 y T_2 con la siguiente expresión:

$$f(t, T_1, T_2) = \left[\frac{1 + R(t, T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t, T_1)(T_1 - t)} - 1\right] \frac{1}{T_2 - T_1} \tag{2.3}$$

(*ii*) La tasa *forward* es llevada en curva a la diferencia entre el plazo deseado S y el primer punto de la curva T_1, luego se interpola al plazo S componiendo las tasas correspondientes al plazo T_1 y T_2. La ecuación que resume el procedimiento es la siguiente

$$\begin{aligned}\left(1 + R(t, S)\left(\frac{S - t}{360}\right)\right)^{T_2 - T_1/360} &= \left(1 + R(t, T_2)\left(\frac{T_2 - t}{360}\right)\right)^{S - T_1/360} \\ &\times \left(1 + R(t, T_1)\left(\frac{T_1 - t}{360}\right)\right)^{T_2 - S/360}\end{aligned} \tag{2.4}$$

A partir de la Gráfica 2.3 se puede observar que la tasa del plazo deseado S se obtiene considerando la diferencia de los plazos T_1 y T_2. Para la tasa del plazo T_2 se toma la diferencia entre los plazos S y t.



Gráfica 2.3 Interpolación de alambrada

De la ecuación (2.4) se despeja $R(t, S)$

$$R(t,S) = \left\{ \left[\left(1 + R(t,T_2)\left(\frac{T_2 - t}{360}\right)\right)^{S-T_1} \left(1 + R(t,T_1)\left(\frac{T_1 - t}{360}\right)\right)^{T_2 - S}\right]^{1/T_2 - T_1} - 1 \right\} \frac{360}{S - t}. \tag{2.5}$$

(*iii*) Para verificar que la tasa encontrada es correcta se sustituyen las tasas para los plazos T_1, T_2 y S en (2.4).

2.7 Ejemplo de interpolación de alambrada con dos nodos

En esta sección se ilustra a través de un ejemplo la aplicación del método de alambrada con 2 nodos. Suponga que se tiene la información de los nodos en el siguiente cuadro:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
60	5.92
120	?
180	6.29

Cuadro 2.3 Información sobre nodos.

Se desea encontrar la tasa correspondiente al plazo de 120 días. Primeramente se obtiene la tasa *forward* $f(t, 60, 180)$:

$$\begin{aligned} f(t,60,180) &= \left[\frac{1 + 0.0629(180/360)}{1 + 0.0592(60/360)} - 1\right]\frac{360}{120} \\ &= 0.064117. \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de $R(t, T_1)$ y de $R(t, T_2)$ en (2.5) se obtiene la tasa de alambrada

$$\begin{aligned} R(t,120) &= \left\{ \left[\left(1 + R(t,180)\left(\frac{180}{360}\right)\right)^{120-60} \left(1 + R(t,60)\left(\frac{60}{360}\right)\right)^{180-120}\right]^{1/180-60} - 1 \right\} \frac{360}{120} \\ &= \left\{ \left[\left(1 + \frac{0.0629}{2}\right)^{6} \left(1 + \frac{0.0592}{6}\right)^{6}\right]^{1/12} - 1 \right\} \times 3 \\ &= 0.061804. \end{aligned}$$

Por último, se verifica que la tasa anterior es correcta:

$$\begin{aligned} \left(1 + 0.061804\left(\frac{120}{360}\right)\right)^{120/360} &= \left(1 + 0.0629\left(\frac{180}{360}\right)\right)^{60/360} \left(1 + 0.0592\left(\frac{60}{360}\right)\right)^{60/360} \\ 1.00682 &= 1.00682. \end{aligned}$$

2.8 Splines cúbicos

El método de splines cúbicos es utilizado en la construcción de curvas de tasas de interés. Este método podría considerarse como un caso particular de los "splines" suavizados. En esta sección se denotarán los nodos por $(T, R(t,T))$ donde t es el tiempo de referencia (hoy), T es el tiempo de vencimiento y $R(t,T)$ es el rendimiento asociado al plazo $T-t$ (como proporción de un año).

El método de splines cúbicos consiste en la interpolación con n nodos conocidos de la forma $(T_1,R_1),(T_2,R_2),\ldots,(T_n,R_n)$, utilizando una familia de $n-1$ polinomios de tercer grado. El objetivo de éste método es encontrar los valores R_i, $i=1,2,...,n$, tales que

$$R_i = S_i(T) = a_i(T-T_i)^3 + b_i(T-T_i)^2 + c_i(T-T_i) + d_i, \tag{2.6}$$

donde el subíndice i indica un polinomio de tercer grado entre los nodos (T_i,R_i) y (T_{i+1},R_{i+1}). Una vez que se han planteado los polinomios en (2.6) es necesario obtener los coeficientes a_i, b_i, c_i y d_i de cada polinomio a partir de los nodos conocidos.

De manera explícita la familia de los $n-1$ polinomios, satisface:

$$R = S(T)$$

donde

$$S(T) = \begin{cases} S_1(T) = a_1(T-T_1)^3 + b_1(T-T_1)^2 + c_1(T-T_1) + d_1 & \text{si} \quad T_1 \le T \le T_2, \\ S_2(T) = a_2(T-T_2)^3 + b_2(T-T_2)^2 + c_2(T-T_2) + d_2 & \text{si} \quad T_2 \le T \le T_3, \\ \qquad \vdots & \\ S_{n-1}(T) = a_{n-1}(T-T_{n-1})^3 + b_{n-1}(T-T_{n-1})^2 + & \\ + \, c_{n-1}(T-T_{n-1}) + d_{n-1} & \text{si} \quad T_{n-1} \le T \le T_n. \end{cases}$$

En virtud de lo anterior, se tienen $4(n-1)$ incógnitas (los coeficientes de los polinomios) y sólo n valores conocidos para igualar las ecuaciones, los cuales son $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_n$, por lo que no es posible construir un sistema de ecuaciones para determinar el valor de cada coeficiente de los polinomios. Para resolver este problema, se establecen las condiciones necesarias para tener un sistema de $4n-4$ ecuaciones y $4n-4$ incógnitas. Estas condiciones proporcionan a la curva las propiedades de continuidad y suavidad, es decir que la curva no presente cambios bruscos en su estructura.

La primera derivada de estos polinomios es muy importante en la construcción de los splines cúbicos ya que en ésta y en los valores en los extremos de cada polinomio estarán implícitas las condiciones o restricciones que se utilizarán para determinar los coeficientes de cada polinomio. La primera derivada de $R_i = S_i(T)$ con respecto a T es la dada por

$$S_i'(T) = 3a_i(T-T_i)^2 + 2b_i(T-T_i) + c_i,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

2.9 Propiedades de la curva estimada

Como se mencionó anteriormente las condiciones que se necesitan establecer para construir un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas tienen que tomar en cuenta las siguientes propiedades:

2.9.1 Congruencia con los nodos originales

Cada polinomio debe pasar por los nodos o puntos originales que lo generaron, por lo que:

$$S_i(T_i) = R_i, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n-1.$$

En consecuencia se obtienen $n-1$ condiciones (que son las que se tenían originalmente).

2.9.2 Continuidad

La curva debe ser continua, por lo que se incluye la condición de que el último valor del polinomio anterior i debe ser igual al primer valor del polinomio siguiente $i+1$. Dicha condición se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_i(T_{i+1}) &= R_{i+1}, \qquad \text{para } \; i = 1, \ldots, n-2, \\ S_{n-1}(T_n) &= R_n, \qquad \text{para } \; i = n-1, \end{aligned}$$

con lo que se obtienen $n-1$ condiciones.

2.9.3 La curva debe ser suave (diferenciable)

Para los nodos que se encuentren dentro de los nodos extremos, la derivada evaluada con el polinomio anterior debe ser igual a la derivada evaluada con el polinomio siguiente, lo cual se expresa como:

$$S'_{i-1}(T_i) = S'_i(T_i), \qquad \text{para } i = 2, \ldots, n-1,$$

donde la primera derivada está dada por

$$S_i(T) = 3a_i(T - T_i)^2 + 2b_i(T - T_i) + c_i,$$

con lo que se tienen $n-2$ condiciones.

2.9.4 Condiciones de frontera

Las pendientes de la curva en los puntos extremos son definidas como las pendientes de las rectas formadas por los dos primeros y por los dos últimos puntos, respectivamente,

$$S'_1(T_1) = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1} \qquad \text{y} \qquad S'_{n-1}(T_n) = \frac{R_n - R_{n-1}}{T_n - T_{n-1}},$$

con lo que se tienen dos condiciones más.

2.9.5 Estimación lineal de pendientes

Para encontrar el valor con el que se igualan las derivadas de los nodos internos, se define como el promedio ponderado de las pendientes de las rectas formadas con los nodos adyacentes, siempre y cuando cuenten con el mismo signo, en caso contrario, la pendiente será igual a cero. Específicamente, para $i = 2, \ldots, n-1$, el valor se obtiene a partir de:

$$S_i'(T_i) = \begin{cases} \frac{1}{3}m_{i-1,i} + \frac{2}{3}m_{i,i+1}, & \text{para} \quad m_{i-1,i} \times m_{i,i+1} > 0, \\ \\ 0 & \text{para} \quad m_{i-1,i} \times m_{i,i+1} \leq 0, \end{cases}$$

donde:

$$m_{i,i+1} = \frac{R_{i+1} - R_i}{T_{i+1} - T_i},$$

con lo que se tienen los $n-2$ condiciones adicionales. Así pues, con las cinco propiedades anteriores se forma un sistema de $4n-4$ ecuaciones y $4n-4$ incógnitas, por lo que es posible encontrar los coeficientes de cada polinomio.

2.10 El método de splines cúbicos con tres nodos

En esta sección se presenta el método de splines cúbicos con tres puntos o nodos originales, lo cual genera un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas por determinar, las propiedades que debe satisfacer dicho sistema son las siguientes:

2.10.1 Congruencia con los nodos originales

En este caso se tiene 3-1=2 ecuaciones de la forma $S_i(T_i) = R_i$, para $i = 1, 2$. Las ecuaciones de los polinomios son:

$$S_1(T_1) = a_1(T_1 - T_1)^3 + b_1(T_1 - T_1)^2 + c_1(T_1 - T_1) + d_1 = R_1 \tag{2.7}$$

y

$$S_2(T_2) = a_2(T_2 - T_2)^3 + b_2(T_2 - T_2)^2 + c_1(T_2 - T_2) + d_2 = R_2. \tag{2.8}$$

2.10.2 Continuidad

La condición a satisfacer por los polinomios es $S_i(T_{i+1}) = R_{i+1}$, $i = 1, 2$. En consecuencia, las ecuaciones que satisfacen esta propiedad son:

$$S_1(T_2) = a_1(T_2 - T_1)^3 + b_1(T_2 - T_1)^2 + c_1(T_2 - T_1) + d_1 = R_2 \tag{2.9}$$

y

$$S_2(T_3) = a_2(T_3 - T_2)^3 + b_2(T_3 - T_2)^2 + c_2(T_3 - T_2) + d_2 = R_3. \tag{2.10}$$

2.10.3 La curva debe ser diferenciable

Esta condición es expresada como: $S_{i-1}'(T_i) = S_i'(T_i)$. Al tener tres nodos, solamente se tiene un nodo interior, en el que la derivada del polinomio anterior y el siguiente deben ser iguales, lo cual se expresa como:

$$S_1'(T_2) = S_2'(T_2), \tag{2.11}$$

es decir,

$$3a_1(T_2 - T_1)^2 + 2b_1(T_2 - T_1) + c_1 = c_2. \tag{2.12}$$

2.10.4 Condiciones de frontera

Las ecuaciones que satisfacen esta propiedad son:

$$S_1'(T_1) = 3a_1(T_1 - T_1)^2 + 2b_1(T_1 - T_1) = c_1 = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1}$$

y

$$S_2'(T_3) = 3a_2(T_3 - T_2)^2 + 2b_2(T_3 - T_2) + c_2 = \frac{R_3 - R_2}{T_3 - T_2}. \tag{2.13}$$

2.10.5 Estimación lineal de pendientes

Las ecuaciones que cumplen esta propiedad están dadas por

$$S_1'(T_2) = 3a_1(T_2 - T_1)^2 + 2b_1(T_2 - T_1) + c_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{R_3 - R_2}{T_3 - T_2}\right). \tag{2.14}$$

Las cinco propiedades anteriores generan un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas, este sistema se puede expresar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2 \\ R_3 \\ S_1'(T_2) \\ S_2'(T_2) \\ S_1'(T_1) \\ S_2'(T_3) \end{pmatrix}$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (T_2 - T_1)^3 & (T_2 - T_1)^2 & T_2 - T_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (T_3 - T_2)^3 & (T_3 - T_2)^2 & T_3 - T_2 & 1 \\ 3(T_2 - T_1)^2 & 2(T_2 - T_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3(T_3 - T_2)^2 & 2(T_3 - T_2) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_1'(T_1) = \frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1},$$

$$S_2'(T_3) = \frac{R_3 - R_2}{T_3 - T_2},$$

$$S_1'(T_2) = S_2'(T_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{R_2 - R_1}{T_2 - T_1}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{R_3 - R_2}{T_3 - T_2}\right).$$

El sistema anterior se puede expresar como $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$, el cual puede resolverse por algún método como: matrices inversas, descomposición triangular, etc. Al resolver el sistema de ecuaciones anterior se determinan los coeficientes de los dos polinomios y en consecuencia la curva completa.

2.11 Ejemplo de splines cúbicos con tres nodos

Considere los siguientes nodos:

Plazo	Tasa de interés %
1	7.00
7	7.50
28	8.00

Cuadro 2.4 Información sobre nodos.

En este cuadro se tienen 3 nodos, por lo que es necesario construir dos polinomios de tercer grado, lo que implica encontrar los 8 coeficientes de los polinomios. Por simplicidad se trabajarán con las tasas multiplicadas por 100. Por lo tanto, las ocho ecuaciones expresadas en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 216 & 36 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9261 & 441 & 21 & 1 \\ 108 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1323 & 42 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7.5 \\ 7.5 \\ 8 \\ 0.04365 \\ 0.04365 \\ 0.08333 \\ 0.02381 \end{pmatrix}.$$

Al resolver el sistema, se obtiene el vector solución de coeficientes de los polinomios:

Coeficientes del primer polinomio	Coeficientes del segundo polinomio
$a_1 = -0.001102$	$a_2 = 0.000045$
$b_1 = 0.006614$	$b_2 = -0.001890$
$c_1 = 0.083333$	$c_2 = 0.043651$
$d_1 = 7$	$d_2 = 7.5$

Cuadro 2.5 Vector de coeficientes de los polinomios.

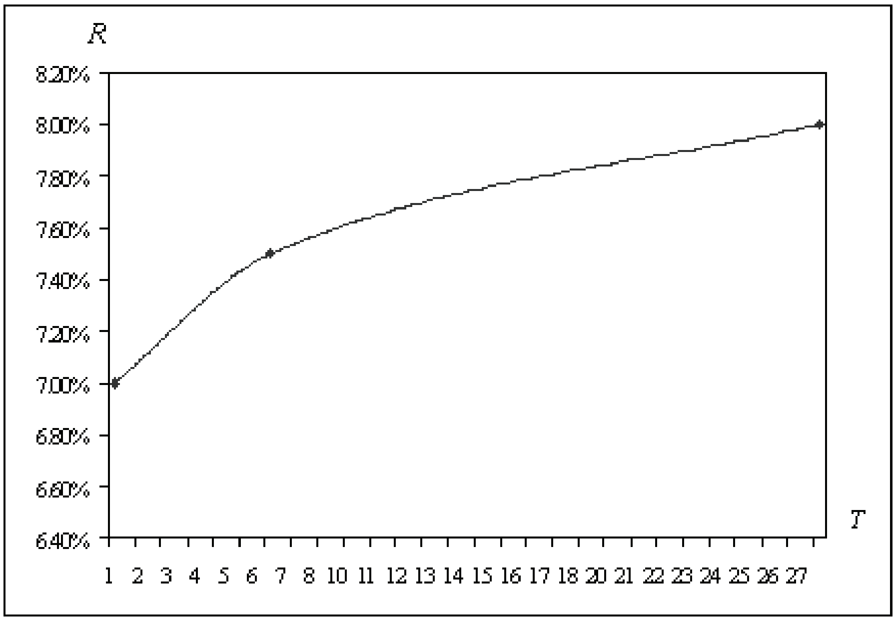
Por lo tanto, los polinomios asociados a los nodos de la curva son:

$$S_1(T) = -0.001102(T-1)^3 + 0.006614(T-1)^2 + 0.083333(T-1) + 7$$

y

$$S_2(T) = 0.000045(T-7)^3 - 0.001890(T-7)^2 + 0.043651(T-7) + 7.5$$

En la Gráfica 2.4 se muestra la curva que generan los polinomios anteriores.



Gráfica 2.4 Interpolación por splines cúbicos usando tres nodos.

2.12 Ejemplo de splines cúbicos con cinco nodos

Considere ahora los siguientes nodos:

Plazo	Tasa de interés %
1	5.00
28	5.80
180	6.50
300	9.00
360	10.00

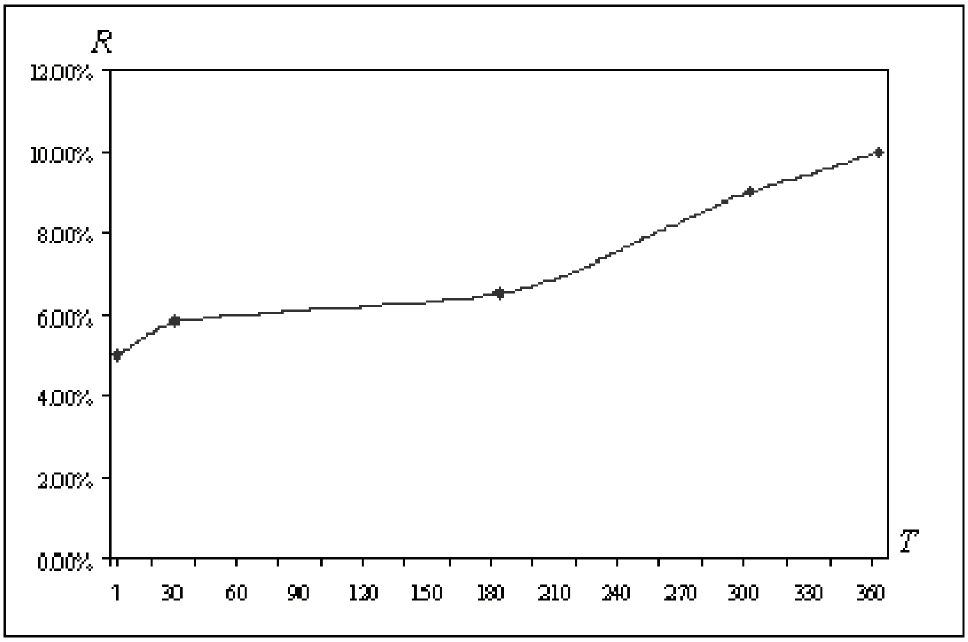
Cuadro 2.6 Información sobre nodos.

Los nodos del cuadro anterior están dispuestos de tal manera que la curva es un poco más accidentada que la del ejemplo anterior. Estos nodos generan 4 polinomios de tercer grado (cuatro coeficientes cada uno) por lo que se debe construir una matriz de 16×16. La construcción de dicha matriz es análoga a la anterior por lo que sólo se presentan los resultados obtenidos en el siguiente cuadro:

	$S_1(T)$	$S_2(T)$	$S_3(T)$	$S_4(T)$
a_i	-0.000023	0.000001	-0.000001	0.000000
b_i	0.000618	-0.000181	0.000113	-0.000046
c_i	0.029630	0.012947	0.015424	0.018056
d_i	5.000000	5.800000	6.500000	9.000000

Cuadro 2.7 Coeficientes de los polinomios.

En la Gráfica 2.5 se muestra la curva que generan los cuatro polinomios:



Gráfica 2.5 Interpolación con splines cúbicos para 5 nodos.

En el plazo de 180 días el nodo está por debajo de una línea recta entre los nodos correspondientes a los plazos de 28 y 300 días. Esta característica en la curva es capturada por el spline cúbico de tal manera que la curva continue siendo suave.

2.13 Bibliografía

Brezinski, C. (2000). Interpolation and Extrapolation, Elsevier 1st. ed., New York.

Burden, R. L. J. D. Faires, (2004). Numerical Analysis, Brooks-Cole Publishing, 8th. ed.

Karris, S. T. (2007). Numerical analysis using Matlab© and excel©; Orchard Publications, 3rd. Ed.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V.

Phillips, G. M. (2003). Interpolation and approximation by polynomials, Springer-Verlag, New York.

Venegas Martínez, F. (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

2.14 Ejercicios

2.1 Suponga que se tienen los siguientes plazos y sus tasas correspondientes:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
7	5.75
91	5.90

Obtenga por medio de interpolación lineal los valores para los plazos de 14, 28, 52 y 76 días.

Solución: En el siguiente cuadro se muestran las tasas obtenidas con interpolación lineal.

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
14	5.76
28	5.79
52	5.83
76	5.88

2.2 Suponga que se cuenta con los nodos del siguiente cuadro:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
40	7.25
50	7.30
60	7.31
70	7.34

Determine funciones lineales para los intervalos: $40 < T < 50$, $50 < T < 60$ y $60 < T < 70$.
Solución: Las funciones lineales para los intervalos son:

$$R = \left(\frac{7.30 - 7.25}{50 - 40} \right) (T - 40) + 7.25, \quad \text{para} \quad 40 < T < 50;$$

$$R = \left(\frac{7.31 - 7.30}{60 - 50} \right) (T - 50) + 7.30, \quad \text{para} \quad 50 < T < 60;$$

$$R = \left(\frac{7.34 - 7.31}{70 - 60} \right) (T - 60) + 7.31, \quad \text{para} \quad 60 < T < 70.$$

2.3 Suponga que se tiene la información de los nodos en el siguiente cuadro:

Plazo (días)	Tasa de interés (%)
60	5.70
120	?
180	6.20

Encuentre la tasa correspondiente al plazo de 120 días con el método de alambrada.
Solución: La tasa de alambrada al plazo de 120 días es 0.060580.

2.4 Suponga que se tiene la información de tres nodos en el siguiente cuadro:

Plazo	Tasa de interés %
1	6.00
7	6.50
28	7.00

Encuentre por el método de splines cúbicos los polinomios asociados a los nodos del cuadro anterior.

2.5 Suponga que se tiene la información de los nodos en el siguiente cuadro:

Plazo	Tasa de interés %
1	4.40
28	5.20
180	5.90
300	7.00
360	9.00

Encuentre por el método de splines cúbicos los polinomios asociados a los nodos del cuadro anterior.

Capítulo 3

Método Bootstrapping

Conceptos básicos:

- ✓ **Bonos cuponados**
- ✓ **Tasa** *yield*
- ✓ **Estimación de la curva de ceros**
- ✓ **Método bootstrapping**

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el método bootstrapping para estimar una curva de rendimiento asociada a un bono cupón cero en plazos más largos de los disponibles en el mercado. En diversos instrumentos de renta fija el plazo más grande que proporciona el mercado es de uno o dos años y, en muchas ocasiones, resulta necesario extender la estructura temporal de tasas de interés a plazos mayores. El método bootstrapping consiste en estimar de manera recursiva las tasas de rendimiento de bonos cupón cero a plazos mayores a los disponibles en el mercado de bonos cuponados.

El principio sobre el que descansa el método bootstrapping es que resulta equivalente el valor de un bono cuponado con tasa cupón constante, traído a valor presente con tasa *yield* de mercado que emplear las tasas simples asociadas a una curva de ceros. Específicamente, el método bootstrapping considera el precio de mercado de un bono cuponado que paga tasa cupón fija, el cual tiene asociada una tasa *yield*. Esto es, una tasa de interés que tiene un plazo de composición igual al plazo de pago entre cupones y que lo iguala al precio de un bono cupón cero, el cual tiene asociada una tasa de interés simple.

3.2 Valuación de un bono con tasa cupón constante

Suponga que se cuenta con el precio de un bono, $\widehat{B}(0,T)$, que paga n cupones cada p días. Dicho bono se emite en $t=0$ y vence en $T=np/360$. Se denota el valor nominal del bono mediante $N>0$. Sea $R_c>0$ la tasa cupón (anualizada), la cual se supone constante. En este caso, los cupones C_i, $i=1,2,...,n$ se calculan mediante

$$C_i \equiv C = N R_c\left(\frac{p}{360}\right), \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Si y es la tasa *yield*, es decir, la tasa que tiene un plazo de composición igual al plazo de pago entre cupones y que es consistente con el precio de mercado del bono, entonces el precio del bono $\widehat{B}(0,T)$, con $T=np/360$, estará dado por el valor presente de sus flujos de efectivo, es decir:

$$\widehat{B}\,(0,T) = C\left[\frac{1}{1+\widehat{y}} + \frac{1}{(1+\widehat{y})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\widehat{y})^T}\right] + \frac{N}{(1+\widehat{y})^T}, \tag{3.1}$$

donde
$$\widehat{y} = y\left(\frac{p}{360}\right).$$
Equivalentemente, si se utiliza una estructura de plazos $R(0,\cdot\,)$, se sigue que
$$\widetilde{B}\,(0,T) = C\left[\frac{1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{1}{1+\widetilde{R}_2} + \cdots + \frac{1}{1+\widetilde{R}_T}\right] + \frac{N}{1+\widetilde{R}_T}, \tag{3.2}$$
donde
$$\widetilde{R}_i = R(0,T_i)(T_i - 0) = R(0,T_i)T_i, \qquad T_i = i\frac{p}{360,} \qquad i = 1,\ldots,n.$$
Es importante señalar, con respecto de la ecuación (3.1), que si se conoce el precio de mercado, $\widehat{B}\,(0,T)$, de un bono cuponado, entonces la tasa *yield* asociada, $\widehat{y}$, se puede calcular como la tasa interna de retorno que iguala los flujos de efectivo con el valor de mercado del bono.

3.3 Método bootstrapping para estimar tasas de rendimiento a plazos mayores de los disponibles en el mercado

En la práctica, muchas curvas de ceros, $R(0,\cdot\,)$, no se encuentran disponibles a plazos mayores de dos a cinco años, lo que sí se observa para dichos plazos son precios de bonos cuponados que pagan una tasa cupón constante. En este caso, el método bootstrapping permite estimar la curva de rendimiento asociada a un bono cupón cero a partir de los precios de bonos que pagan cupones con tasa cupón constante. En efecto, de acuerdo con (3.2) se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $N = 1$. Entonces $C_i = R_c(p/360)$, $i = 1, 2, ..., n$, en cuyo caso se obtiene que
$$\widehat{B}(0,T) = R_c\left(\frac{p}{360}\right)\left[\frac{1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{1}{(1+\widetilde{R}_2)} + \cdots + \frac{1}{(1+\widetilde{R}_T)}\right] + \frac{1}{(1+\widetilde{R}_T)}, \tag{3.3}$$
donde como antes $\widetilde{R}_i = R(0,T_i)T_i, \quad i = 1, ..., n$. Si en la ecuación anterior $\widehat{B}(0,T)$ y algunas de las $\widetilde{R}_i$ son cantidades conocidas, el método bootstrapping consiste en estimar las $\widetilde{R}_j$ desconocidas.

3.4 Ejemplo de bootstrapping para un bono cuponado de tasa constante

Considere un bono que paga cupones en tres fechas futuras a 182, 364 y 546 días con una tasa cupón de 9.50% y con un precio \$99.3123. Se desea estimar la tasa rendimiento asociada al plazo de 546 días cuando se conocen las tasas de rendimiento a plazos 182 y 364. En este caso, se supone que el valor nominal del bono es $N = 100$. Si se calcula el pago del cupón, se encuentra que
$$C = R_c T_1 N = R_c\left(\frac{n}{360}\right)N = 0.095\left(\frac{182}{360}\right)100 = 4.8027.$$
En virtud de la ecuación (3.2), el precio de un bono cuponado está dado por
$$\widehat{B}(0,T) = \frac{C}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{C}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{C+N}{1+\widetilde{R}_3}.$$
Si se restan del precio del bono los valores presentes de los cupones para los plazos de 182 y 364 días, se sigue que
$$\frac{C+N}{1+\widetilde{R}_3} = \widehat{B}(0,T) - \frac{C}{1+\widetilde{R}_1} - \frac{C}{1+\widetilde{R}_2}.$$

Suponga que el valor de mercado del bono es $\widehat{B}(0,T) = 99.3123$, $\widetilde{R}_1$ y $\widetilde{R}_2$[1], asociadas con los plazos 182 días y 364 son, respectivamente, 7.8880% y 8.1974%, entonces

$$\begin{aligned}\frac{C+N}{1+\widetilde{R}_3} &= 99.3123 - \frac{4.8027}{1+0.0788} - \frac{4.8027}{1+0.0819}\\ &= 99.3123 - 4.6185 - 4.4316\\ &= 90.2585\end{aligned}$$

De la expresión anterior se puede despejar la tasa $\widetilde{R}_3$, de tal forma que:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_3 &= \left(\frac{4.8027+100}{90.2585} - 1\right)\left(\frac{360}{546}\right)\\ &= 10.15172693\%.\end{aligned}$$

Es importante destacar que en el ejercicio anterior se ha utilizado la convención de año comercial de 360 días. Sin embargo, en este caso, sería más apropiado considerar un año de 364 días.

3.5 Un segundo ejemplo de bootstrapping para estimar rendimientos a plazos mayores a los disponibles en el mercado

Suponga que se conoce el precio de un bono $\widehat{B}(0,T)$ y la tasa aplicada al plazo del primer cupón $\widetilde{R}_1$, se desean estimar $\widetilde{R}_2$ y $\widetilde{R}_3$. En primer lugar recuerde que la ecuación de una recta que pasa por dos puntos, (x_0, y_0) y (x_1, y_1), está dada por $y - y_0 = ((y_1 - y_0)/(x_1 - x_0))(x - x_0)$. Con base en esta ecuación, se puede escribir la siguiente interpolación lineal de $\widetilde{R}_2$ en términos de $\widetilde{R}_3$ y $\widetilde{R}_1$,

$$\widetilde{R}_2 - \widetilde{R}_1 = \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1).$$

En este ejemplo, se ha elegido llevar a cabo interpolación lineal, pero cualquier otro método de aproximación que exprese $\widetilde{R}_2$ en términos de $\widetilde{R}_3$ y $\widetilde{R}_1$ podría ser utilizado. Evidentemente, la interpolación lineal no elimina oportunidades de arbitraje. Si se despeja $\widetilde{R}_2$ de la expresión anterior, se obtiene que

$$\widetilde{R}_2 = \widetilde{R}_1 + \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \tag{3.4}$$

Después de sustituir (3.4) en (3.3), se tiene

$$\widehat{B}(0,T) = \frac{C_1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{C_2}{1+\widetilde{R}_1 + \frac{\widetilde{R}_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1)} + \frac{C_3 + 1}{1+\widetilde{R}_3}. \tag{3.5}$$

Dado que $\widetilde{R}_1$ es conocido, la ecuación anterior es una ecuación implícita en $\widetilde{R}_3$. Suponga que su solución R'_3 se sustituye en (3.4) para obtener el valor

$$R'_2 = \widetilde{R}_1 + \frac{R'_3 - \widetilde{R}_1}{T_3 - T_1}(T_2 - T_1). \tag{3.6}$$

[1] Es importante notar que las tasas fueron llevadas al plazo correspondiente; *i.e.*, se multiplicaron por los plazos.

3.6 Un segundo ejemplo de bootstrapping para un bono cuponado de tasa constante

Suponga que se tiene un bono con precio \$99.31, con tasa cupón de 9.50%, y que paga cupones en los plazos 182, 364 y 546 días. Si se sabe que la tasa a un plazo de 180 días es R_1=7.8881%, se desean estimar las tasas de interés a los plazos de 364 y 546 días.

Observe primero, que $\widetilde{R}_1 = 0.0789\left(\frac{182}{360}\right) = 0.0398728$. Si este valor se sustituye en (3.5), se tiene que

$$99.3123 = \frac{4.8028}{1+0.03988} + \frac{4.8028}{1+0.03988+\dfrac{\widetilde{R}_3 - 0.078881\left(\dfrac{182}{360}\right)}{546-182}(364-182)} + \frac{104.8028}{1+\widetilde{R}_3}$$

Para encontrar la $\widetilde{R}_3$ que resuelva la ecuación anterior se utiliza algún método de aproximación numérica[2], por ejemplo, el método de Newton-Raphson. Después de utilizar el dicho método se tiene que el valor aproximado de $R_3^{'}$ es 10.5659%.

Si se sustituye ahora R_3' en la ecuación (3.6), se obtiene que

$$R_2' = 0.0788 + \frac{0.1056-0.0788}{546-182}(364-182) = 9.2270\%.$$

3.7 Bibliografía

Collin, A. (2005). Fixed income attribution, John Wiley & Sons Ltd., England.

Fabozzi, F. J. (2002). Interest rate, term structure and valuation modeling, Wiley Finance, Hoboken, New Jersey.

Fabozzi, F. J. (1996). Measuring and controlling interest rate risk, Frank J. Fabozzi associates, New Hope, Pennsylvania.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S. A. de C. V.

Venegas Martínez, F. (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

3.8 Ejercicios

3.1 Suponga que el precio de mercado de un bono es $\widehat{B}(0,T) = \$106.5$ y que paga una tasa cupón anual del 8% con vencimiento dentro de cuatro años. Se desea calcular la tasa *yield*.

Solución: La tasa *yield* y debe cumplir

$$106.5 = \frac{8}{1+\widehat{y}} + \frac{8}{(1+\widehat{y})^2} + \frac{8}{(1+\widehat{y})^3} + \frac{108}{(1+\widehat{y})^4},$$

donde

$$\widehat{y} = y\left(\frac{p}{360}\right).$$

La solución se encuentra mediante el método de Newton-Raphson, de tal forma que $\widehat{y}$=6.119039%.

[2] Algunas calculadoras financieras y hojas de cálculo traen incorporadas funciones que pueden resolver este problema.

3.2 Suponga que se tienen cinco bonos gubernamentales a diferentes plazos, cada bono tiene un nominal de 100 y cada uno paga una tasa cupón fija. Se desea encontrar la tasa *yield* de los bonos.

Bono	Vencimiento (años)	Tasa cupón (%)	Precio
A	1	5.50	101.41
B	2	6.50	103.54
C	3	8.00	108.08
D	4	5.75	101.69
E	5	8.50	113.28

Por ejemplo, la tasa *yield* del bono se calcula de la siguiente manera:

$$113.28 = \frac{8.5}{1+\widehat{y}} + \frac{8.5}{(1+\widehat{y})^2} + \frac{8.5}{(1+\widehat{y})^3} + \frac{8.5}{(1+\widehat{y})^4} + \frac{108.5}{(1+\widehat{y})^5}.$$

Si se utiliza un método numérico de aproximación, por ejemplo Newton-Raphson, se encuentra que $\widehat{y}_E$ =5.3980%, $\widehat{y}_A = 4.0285\%$, $\widehat{y}_B = 4.6093\%$, $\widehat{y}_C = 5.0320\%$ y $\widehat{y}_D = 5.2716\%$.

3.3 Sugiera un método para extender de tres a seis periodos la curva de ceros asociada a un bono cuponado que paga tasa constante.

Solución: Considere un bono con tasa cupón constante, R_c, que paga cupones en seis fechas futuras denotados por C_i, $i = 1, 2, ..., 6$. Si el nominal es 1, entonces la ecuación (3.3) conduce a

$$\widehat{B}(0,T) = \frac{C}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{C}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{C}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{C}{1+\widetilde{R}_4} + \frac{C}{1+\widetilde{R}_5} + \frac{C+1}{1+\widetilde{R}_6}.$$

Suponga que se conocen $R_1^{'}$, $R_2^{'}$ y $R_3^{'}$ para extender las fechas cupón a otros tres periodos y que se utilizan las siguientes interpolaciones de $\widetilde{R}_4$ y $\widetilde{R}_5$ en términos de $R_3^{'}$ y $\widetilde{R}_6$, es decir,

$$\widetilde{R}_4 = \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^{'}}{T_6 - T_3}(T_4 - T_3) + R_3^{'}$$

y

$$\widetilde{R}_5 = \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^{'}}{T_6 - T_3}(T_5 - T_3) + R_3^{'}.$$

Al sustituir $\widetilde{R}_4$ y $\widetilde{R}_5$ en la ecuación del precio del bono para seis periodos, ésta puede reescribirse como $f(\widetilde{R}_6) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\widehat{B}(0,T) = {} & \frac{C}{1+R_1^{'}} + \frac{C}{1+R_2^{'}} + \frac{C}{1+R_3^{'}} + \frac{C}{1+R_3^{'} + \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^{'}}{T_6 - T_3}(T_4 - T_3)} \\ & + \frac{C}{1+R_3^{'} + \frac{\widetilde{R}_6 - R_3^{'}}{T_6 - T_3}(T_5 - T_3)} + \frac{C+1}{1+\widetilde{R}_6}\end{aligned}$$

Una vez que la ecuación anterior se resuelve para $\widetilde{R}_6$, la solución $R_6^{'}$, se sustituye en las dos ecuaciones anteriores para obtener $R_4^{'}$ y $R_5^{'}$.

Capítulo 4

Curvas yield domésticas

Conceptos básicos:

- ✓ **Curva nominal** *yield*
- ✓ **Interpolación y Extrapolación lineal**
- ✓ **Bootstrapping**

4.1 Introducción

En este capítulo se presenta una metodología para la construcción de curvas domésticas gubernamentales, así como una breve descripción de los instrumentos de referencia que les dan origen. Una curva *yield* describe la relación entre los *yield*s de bonos de una misma clase con distintos tiempos de maduración, los cuales, generalmente, van de 1 mes a 10 años. La forma de estas curvas es importante por la información que puede brindar a los inversionistas, ya sea para inferir el comportamiento de las tasas en el futuro cercano o para valuar sus posiciones en el mercado.[1]

Para la construcción de dichas curvas se puede utilizar información tanto de los mercados primario como secundario, según su disponibilidad y oportunidad. Las curvas *yield* se pueden clasificar como:

(*i*) Gubernamentales

(*ii*) Bancarias

(*iii*) Corporativas

(*iv*) Asociadas a productos derivados

La construcción de una curva utiliza fuentes de información y estructuras de discriminación que son comunes para distintas familias de bonos (bonos con las mismas características con distintas fechas de vencimiento que generan una misma curva). A continuación se hará un análisis de dichas fuentes. Se hace hincapié en que las fuentes son comunes a muchas curvas y se resalta por separado (en diferentes subsecciones) sus características propias.

[1] En los Estados Unidos se usa la curva *yield* de los bonos del Departamento del Tesoro como indicador económico. En el caso mexicano se utiliza la curva de CETES (Certificados de la Tesorería) para el mísmo fin.

4.2 Fuentes de información y estructuras de discriminación

A continuación se analizan las fuentes de información y estructuras de discriminación de curvas *yield* nominales y reales.

4.2.1 Fuentes de información:

Las curvas nominales y reales *yield* se construyen con información obtenida, generalmente, de las siguientes fuentes:

(*i*) Mercado primario. Subastas realizadas por el Banco de México (Banxico), el cual funge como agente colocador en el mercado financiero del gobierno federal. Banxico da a conocer al mercado los plazos y condiciones (tasas, garantías, formas de pago, etc.) de los distintos instrumentos que el gobierno federal y las instituciones que cuentan con el aval de la federación emiten para su financiamiento.

(*ii*) Mercado secundario. Operaciones en los medios electrónicos: Enlaces Eurobroker, remate y SIF-Garban[2].

El horario para obtener la información anterior es de las 13:30 hrs. a las 14:00 hrs (Hora de la ciudad de México). Sin embargo, en días en que las condiciones de mercado lo requieran el horario puede cambiar.

En caso de que existan nuevas fuentes de información que los intermediarios financieros utilicen para realizar sus operaciones, éstas se toman en consideración y se obtienen durante las horas de operación de mercado para complementar los nodos de la curva que no tengan operación ni postura en firme en las pantallas de los *brokers* electrónicos. El procedimiento para recopilar dicha información implica obtener referencias directas de los intermediarios financieros, validando con al menos dos de ellos el nivel obtenido.

4.2.2 Criterios de discriminación de información

Los siguientes cuatro criterios de discriminación son compartidos para todas las curvas, modificando sólo la fuente de la información y el tratamiento fiscal (curvas netas o brutas de impuestos[3]).

Primero. Se toma el nivel publicado de las subastas primarias de los bonos en cuestión, siempre y cuando no se observen hechos, corros o posturas posteriores a la publicación de la subasta reportados por algún broker con monto mayor o igual al 10% del valor nominal subastado. De no aplicar este criterio se utiliza el siguiente:

Segundo. Se considera el hecho que tenga liquidación 48 hrs. y volumen representativo de valor nominal mayor a 10 millones de pesos mexicanos para bonos con plazo menor o igual a 10 años y 5 millones de pesos mexicanos para bonos con plazo mayor a 10 años. Si estas condiciones se cumplen entonces:

(*i*) Se calcula para cada bono el hecho promedio ponderado por monto de operación, considerando todos los hechos que hayan sido realizados en los *brokers* de 13:30 a 14:00 horas.

(*ii*) La información de mercado se determina por:

[2] En Agosto de 1998 se crea la empresa de Servicios de Integración Financiera S. A. de C. V. ,SIF, la cual tiene entre sus líneas de negocio el servicio de operación de Bonos Gubernamentales de largo plazo para intermediarios bursátiles y bancarios, además del corretaje telefónico. Para el año 2000, después de fusionarse con “Garban Intercapital” añade a sus actividades la operación de cambios, deuda soberana, *forwards*, *swaps*, opciones, derivados de crédito, bonos corporativos, US treasuries, e incluso derivados sobre energía y contaminación. El sistema resultante facilita a casas de bolsa y bancos la realización de operaciones de cambios, derivados OTC y títulos de deuda tanto corporativos como soberanos y bancarios.

[3] A partir del 1 de enero de 2003, en México, cualquier bono tiene que pagar tasa de interés bruta; sin embargo, aún hay bonos de tasa fija real, emitidos con anterioridad a la modificación de dicha ley, que siguen vigentes y están pagando una tasa libre de impuestos.

Hecho ponderado	Si el hecho ponderado se encuentra dentro del último corro y no difiere en más de dos puntos con el último hecho.

Si el hecho anterior no se cumple

$\Downarrow$

Último hecho	Si se encuentra dentro del último corro

Si el hecho anterior no se cumple

$\Downarrow$

Nivel de frontera más cercano del corro vivo al último hecho. El corro vivo se toma al momento de la determinación de niveles y debe haber estado vivo en pantalla por lo menos 5 minutos.

En caso contrario, se utiliza el siguiente criterio.

Tercero. Si existe un corro[4] vivo al momento de la determinación de niveles y no haya habido operación, se considera como nivel de mercado al promedio de la postura de compra y venta, siempre y cuando la diferencia de posturas no exceda de cinco puntos base y se haya mantenido por lo menos cinco minutos en pantalla. De no aplicar este criterio se utiliza el siguiente:

Cuarto. Si se llega al cuarto criterio es porque los bonos no tuvieron operación o los corros son muy abiertos. En este caso, se tienen los siguientes pasos:

(*i*) Se consideran las emisiones que acotan el plazo del bono, las cuales sí tienen nivel de mercado.

(*ii*) Se obtienen las variaciones, de dichas emisiones, con respecto al día anterior.

(*iii*) Si las variaciones obtenidas en el punto anterior son menores que 0.5%, se mantiene la información de mercado del día anterior. En caso contrario, la información de mercado es igual al nivel del día anterior agregando la variación promedio de los bonos que lo acotan, el cual debe ser congruente cuando exista una sola postura, ya sea de compra o de venta.

4.3 Curvas nominales *yield* de bonos de tasa neta y bruta

Las curvas *yield* domésticas gubernamentales están asociadas a los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con tasa de interés fija. Estos son emitidos por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP) y colocados por Banxico. Dicha tasa se fija mediante subasta y se mantiene a lo largo de la vida del instrumento.

Los bonos pueden ser emitidos a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 182 días, periodo después del cual se devengan intereses. Los bonos emitidos a plazos de 3, 5, 7, 10, 20 y 30 años, comúnmente, se les denomina “BONOS M3, M5, M7, M10, M20 y M30”. Su valor nominal es de \$100.00 pesos mexicanos. La subasta primaria se lleva a cabo cada 4 semanas y pueden participar en ella tanto personas físicas como morales sin importar su nacionalidad. Estos bonos a tasa fija pueden cotizarse en el mercado secundario en términos de su precio limpio o de su *yield* al vencimiento (tasa *yield*), la práctica habitual es cotizarlo en tasa *yield*.

[4] Tradicionalmente la contratación de acciones en bolsa se realizaba en corros en los que los operadores manifestaban en viva voz sus ofertas. Hoy en día, pocas son las acciones que cotizan en corros.

Las operaciones que se pueden realizar con los bonos son: compra-venta en directo, en reporto[5], préstamo de valores y como activo subyacente en el mercado de derivados (contratos futuros sobre M3 y M10).

Debido a que cada emisión de estos títulos cuenta con una tasa de interés fija desde que nace hasta que vence, los Bonos M no son fungibles, *i.e.,* indistinguibles entre sí, a menos que pagaran exactamente la misma tasa de interés. Es por ello que la clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título (M), el segundo para el plazo en años de la emisión, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Por último es importante destacar que los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago. Las características generales de la curva nominal *yield* de tasa cupón neta y de tasa cupón bruta se muestran en el Cuadro 4.1

Nombre de la curva	Bonos M (neta)	Bonos M (bruta)
Plazo máximo de generación	3,640 días	7,280 días
Base	182-act/360	182-act/360
Tipo de tasa	*yield*	*yield*
Interpolación	Lineal	Lineal
Extrapolación	Lineal	Lineal

Cuadro 4.1 Curvas nominales *yield* de tasa neta y bruta.

4.3.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

El primer nodo (asociado a un día) se determina a continuación. Si existe un bono neto con un día por vencer se toma la curva *yield* a plazo de un día como el primer nodo. En caso contrario, el primer nodo se obtiene al hacer equivalente la tasa de fondeo neta de CETES (Certificados de la Tesorería) a un día en convención de 182 (para tener consistencia con las tasas *yield* a las que operan los bonos) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$R_1 = \left[\left(1 + F_1 \frac{n}{360}\right)^{182/n} - 1\right] \frac{360}{182},$$

donde:

R_1: nodo a un día en convención 182,

F_1: nasa de fondeo a un día (neta o bruta dependiendo del caso),

n: plazo de la tasa neta de fondeo (1 día).

En el caso de la curva neta, el último nodo (3,640 días = 10 años por convención) se determina calculando el rendimiento de la curva nominal *yield* de tasa bruta entre 10 años y los días por

[5] Esta transacción de mercado se formaliza mediante la celebración de un contrato entre el reportado, que es el dueño de los títulos en cuestión, quien entrega una determinada cantidad de estos al reportador, que es el inversionista, a cambio de un precio convenido, con el compromiso de que al vencimiento del contrato el reportador (inversionista) le devuelva al reportado (dueño original), una cantidad igual de títulos de la misma especie y características, aun cuando físicamente no sean los mismos. Estas operaciones son realizadas a descuento, por lo que su *yield* se desprende del diferencial entre el precio al que se adquieren los títulos y el de su pago a la fecha del vencimiento del contrato (su valor nominal).

vencer del último bono neto. El último nodo es igual a la tasa *yield* del último bono neto más un spread.

Los nodos intermedios de la curva neta se determinan de manera directa con los valores de mercado. Una vez obtenidos los nodos se interpolan linealmente para encontrar la estructura intertemporal de plazos hasta los 10 años.

En el caso de la curva bruta, el último nodo (7,280 días = 20 años por convención) se determina como sigue:

(i) Si existe un bono de tasa bruta con exactamente 20 años por vencer se considera a la *yield* como el último nodo.

(ii) En caso contrario, se extrapola linealmente el nodo de 7,280 días con la *yield* del bono con mayor plazo. Los nodos intermedios se determinan de manera directa con la información de mercado.

Una vez obtenidos los nodos, se realiza una interpolación lineal para encontrar la estructura temporal de tasas hasta 20 años.

4.4 Curvas nominales libres de riesgo de bonos de tasas neta y bruta

Las curvas nominales libres de riesgo están asociadas a los Certificados de la Tesorería[6] en el corto plazo[7] y a los Bonos M (estudiados en la subsección anterior) en el largo plazo. Estos son colocados por Banxico, el cual funge como agente de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público.

Los CETES son emitidos a plazos de 28, 91, 182 días y hasta plazos de 1 año, con un valor nominal de $10.00 pesos mexicanos y colocadas en subastas donde los participantes presentan posturas sobre el monto que desean adquirir y la tasa de descuento que están dispuestos a pagar[8].

Al igual que los bonos M, los CETES pueden ser comprados y vendidos en un mercado secundario, reportados o usados como subyacente en contratos derivados OTC y listados. La clave de identificación de la emisión de los CETES está diseñada para que los instrumentos sean fungibles, *i.e.,* indistinguibles, entre sí. Esto es, CETES emitidos con anterioridad y CETES emitidos recientemente pueden tener la misma clave de identificación siempre y cuando venzan en la misma fecha. Para ello, la clave está compuesta por ocho caracteres, el primero para identificar el título (B), el segundo es un espacio en blanco, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día).

---

[6] CETES, este instrumento es emitido por el gobierno federal desde 1978 y es el instrumento más líquido y conocido del mercado de dinero mexicano.

[7] Estos títulos son vendidos por debajo de su valor nominal (descuento), no devengan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento.

[8] Las reglas para participar en dichas subastas se encuentran descritas en el Anexo 6 de la Circular 2019/95 emitida por el Banco de México y dirigida a las Instituciones de Crédito.

Las características generales de la curva nominal libre de riesgo neta bruta se muestran en el siguiente cuadro:

Nombre de la curva	Nominal libre de riesgo (neto)	Nominal libre de riesgo (bruta)
Plazo máximo de generación	5,460 días	10,920 días
Base	SMP-act/360	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero	Cero
Bootstrapping	Usando *yield*s y precios de bonos cuponados	Usando *yield*s y precios de bonos cuponados
Interpolación	Smoothing splines	Smoothing splines
Extrapolación	Nelson-Siegel-Svensson	Nelson-Siegel-Svensson
Dependencia con otras curvas	Nodos de la curva nominal *yield* de tasa neta para plazos mayores a un año.	Nodos de la curva nominal *yield* de tasa bruta para plazos mayores a un año.

Cuadro 4.2 Curvas nominales libres de riesgo tasas neta y bruta.

Por último, es importante destacar que los CETES operan con los siguientes rangos:

Rangos
De 30 a 50 días por vencer
De 50 a 70 días por vencer
De 70 a 90 días por vencer
De 160 a 182 días por vencer
De 270 a 364 días por vencer

En caso de que opere alguno de estos rangos, se determina el mismo nivel de mercado para todas las emisiones que se encuentren en dicho rango.

4.4.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

Dado que a partir del 1 de enero de 2003, cualquier bono emitido después de esa fecha debe pagar una tasa de interés bruta y dado que el plazo máximo de los CETES es de un año, entonces ya no existen CETES exentos de impuesto. Por lo tanto, para los nodos de corto plazo de esta curva se hacen consideraciones especiales.

El primer nodo (un día) es igual a la tasa de fondeo neta de CETES a un día. Para los nodos de corto plazo (28, 91, 182 y 364 días), se usa la "curva nominal cero de tasa bruta" menos 50 puntos base. Además, si existen Bonos M netos que tengan dos o menos cupones al vencimiento, los nodos adicionales se obtienen a partir del método de Bootstrapping. Mientras que los nodos de 1 a 10 años se obtienen usando el método de Bootstrapping a partir de los precios y *yield*s de los Bonos M libres de impuestos.

Para los nodos de 10 a 15 años, se obtienen 2 nodos con distancia de dos años y medio (para evitar alguna posible irregularidad que se pudiera producir al sólo tomar un nodo extrapolado a 15 años) a través del método de extrapolación Nelson-Siegel-Svensson.

Una vez obtenidos los nodos, se interpolan usando el método Smoothing Splines. Se elige esta técnica en particular por ser lo suficientemente flexible para ajustarse a las condiciones cambiantes del mercado mexicano. De este modo, se obtiene la estructura temporal de tasas hasta 15 años o más.

4.4.2 Curva nominal cero de tasa bruta

Si existe un CETE bruto con un día por vencer se considera a esta tasa como el primer nodo. En caso contrario, el primer nodo es igual a la tasa de fondeo bruta a un día. Los nodos de corto plazo se determinan de manera directa con la información del mercado de los CETES.

Los nodos de uno a 20 años se obtienen usando el método bootstrapping a partir de los precios y *yield*s de los bonos M. Por último, los nodos de 20 a 30 años se obtienen usando 4 nodos con distancia de dos años y medio (para evitar que exista alguna irregularidad producida por sólo tomar un nodo extrapolado a 30 años) a través del método de extrapolación Nelson-Siegel-Svensson.

Una vez obtenidos los nodos, la curva hasta 30 años es interpolada con el modelo "smoothing splines". Con esta curva, se realiza una validación de los nodos utilizados contra los valores de la curva. Esta validación se realiza dado que al interpolar con el modelo de "smoothinhg splines", no siempre se logra un ajuste perfecto entre la curva interpolada y los nodos. La validación se hace observando que la diferencia sea menor a un punto base.

4.5 Curvas reales *yield* de bonos de tasas neta y bruta

Las curvas reales *yield*, representan la relación existente entre el *yield* y el tiempo al vencimiento de los bonos de tasa fija denominados en unidades de inversión (UDIBONOS) y los Certificados Bursátiles de Indemnización Carretera Segregables (CBICS).

Los Bonos de desarrollo del gobierno federal denominados en unidades de inversión (UDIBONOS) fueron creados en 1996 y son instrumentos de inversión que protegen al tenedor ante cambios inesperados en la tasa de inflación. Los UDIBONOS se colocan a plazos largos y realizan pagos cada seis meses en función de una tasa de interés real fija que se determina en la fecha de emisión del título. Su valor nominal es de 100 UDIS[9]. Los UDIBONOS se pueden emitir a cualquier plazo a condición de ser múltiplos de 182 días, aunque hasta la fecha se han emitido en plazos de 3, 5 y 10 años.

Estos títulos devengan intereses cada 6 meses, sobre una tasa fijada por el gobierno federal al momento de la convocatoria para la subasta de valores gubernamentales, (cada 182 días para ser exactos) en pesos mexicanos sobre una base actual[10]. La colocación primaria es hecha mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio denominado en UDIS que están dispuestos a pagar. En muchas ocasiones el gobierno federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos se tienen que sumar, al precio de asignación resultante en la subasta, los intereses devengados del cupón vigente.

Debido a que cada emisión de estos títulos cuenta con una tasa de interés real fija desde que nace hasta que vence, los UDIBONOS no pueden ser fungibles (indistinguibles) entre sí, a menos que pagaran exactamente la misma tasa de interés. Es por ello que la clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título (S), el segundo para el plazo en años de la emisión, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

En cuanto a los Certificados Bursátiles de Indemnización Carretera Segregables (CBICS), estos son emitidos por el Banco Nacional de Obras y Servicios Públicos, S.N.C. (BANOBRAS) con el aval del gobierno federal y tienen un valor nominal de 100 UDIS.

El hecho de que los CBICS estén denominados en la misma unidad de cuenta protegida contra la inflación (lo que los hace reales) y que son bonos cuponados, los obliga a estar en la misma curva.

[9] El valor de la UDI en relación al peso mexicano es actualizado por el Banco de México en función al movimiento del Índice de Precios al Consumidor.

[10] El número de días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los intereses.

Los CBICS fueron emitidos el 31 de Diciembre de 2003 por un total de 6 mil millones de Unidades de Inversión a un plazo de 10,921 días, con la peculiaridad de que los cupones son segregables (pueden negociarse por separado del principal). El que la emisión conste de cupones segregados hace imposible su amortización anticipada, por lo que ésta se hará en una sola exhibición al vencimiento. Los CBICS podrán ser adquiridos por cualquier persona física o moral de cualquier nacionalidad, siendo custodiados por el INDEVAL.[11] Las características generales de la curva nominal libre de riesgo neta bruta se muestran en el Cuadro 4.3

Nombre de la curva	Real(*yield*)	Real Bruta(*yield*)
Plazo máximo de generación	10,920 días	10,920 días
Base	182-act/360	182-act/360
Tipo de tasa	*yield*	*yield*
Interpolación	Lineal	Lineal
Extrapolación	Lineal	Lineal

Cuadro 4.3 Curvas reales *yield* de bonos de tasa neta y bruta.

Las fuentes de información y la discriminación de esta curva es la estipulada en la subsección correspondiente, la única peculiaridad es que la información de la subasta de los CBICS es emitida por BANOBRAS a las 14:30 hrs. en el mercado primario, siendo las mismas fuentes para el mercado secundario.

4.5.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

El primer nodo (asociado a un día) es igual a la tasa *yield* del bono con menor vencimiento, esto se debe a la escasa emisión de bonos cuponados de tasa real a corto plazo. Mientras que el último nodo (10,920 días) se determina extrapolando linealmente el nodo de 10,920 días con la *yield* del bono con vencimiento el 16-Ene-2031. Esto debido a que el último bono real neto vence el 16 de Enero de 2031 y no se tiene información de mercado para el último nodo a 30 años. Por otra parte, los nodos intermedios se determinan de manera directa con la información de mercado. Una vez obtenidos los nodos se interpolan linealmente para encontrar la estructura intertemporal de plazos hasta 30 años.

4.5.2 Curva real *yield* de tasa bruta

El primer y segundo nodos son iguales al primer y segundo nodos de la curva real *yield* de tasa neta más un diferencial, el cual es en promedio de 10 puntos base. Como se mencionó anteriormente, el plazo del segundo nodo se asocia al número de días del bono neto de menor plazo. En cuanto al diferencial, éste es resultado de niveles de mercado de los bonos a largo plazo (entre 20 y 30 años), donde la diferencia de los niveles de *yield* bruta y neta es en promedio de 10 puntos base. Sin embargo, el diferencial puede cambiar en función de las variaciones de mercado.

Los nodos intermedios se determinan de manera directa con la información de mercado, mientras que el último nodo (10,920 días) puede determinarse como la tasa *yield* de un bono de tasa bruta con exactamente 30 años por vencer, si éste existe. En otro caso, se extrapola linealmente el nodo de 10,920 días con la *yield* del bono con mayor plazo. Una vez determinados los nodos, se interpolan linealmente para encontrar la estructura temporal de tasas de hasta 30 años.

[11] S.D. INDEVAL, S. A. de C. V. , Institución para el Depósito de Valores, cuyas funciones son la administración, custodia y liquidación de las operaciones de los participantes en el mercado financiero mexicano.

4.6 Curvas reales (cero) libres de riesgo tasas neta y bruta

Las curvas reales (cero) también están basadas en la información proporcionada por los UDI-BONOS y los CBICS, razón por la cual usan las mismas fuentes de información y el mismo procedimiento de discriminación.

La diferencia primordial entre estas curvas y las anteriores es el tipo de información generada. En el caso de las curvas *yield*, se muestra el *yield* del bono como conjunto, mientras que las curvas reales (cero) implican la inferencia de las tasas de un bono cupón cero implícitas en los bonos cuponados. Dicha inferencia es realizada usando el método del bootstrapping explicado en capítulos anteriores.

Una curva real (cero) es elaborada bajo dos convenciones distintas, a saber SMP-act/360 y 182-act/360. Las características generales de las curvas reales libres de riesgo de tasas neta y bruta se muestran en los cuadros 4.4 y 4.5.

Nombre de la curva	Curva real (cero) simple	Curva real con impuesto (cero) simple
Plazo máximo de generación	10,920 días	10,920 días
Base	SMP-act/360	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero	Cero
Bootstrapping	Usando *yield*s y precios de bonos cuponados	Usando *yield*s y precios de bonos cuponados
Interpolación	Lineal	Lineal
Extrapolación	Lineal	Lineal
Dependencia con otras curvas	Nodos de la curva real *yield* de tasa neta	Nodos de la curva real *yield* de tasa bruta

Cuadro 4.4 Curva real cero de tasas neta y bruta (SMP-act/360).

Nombre de la curva	Curva Real (Zero)	Curva Real con Impuesto (Zero)
Plazo máximo de generación	10,920 días	10,920 días
Base	182-act/360	182-act/360
Tipo de tasa	Cero	Cero
Dependencia con otras curvas	Real cero de Tasa neta (SMP-act/360)	Real cero de tasa bruta (SMP-act/360)

Cuadro 4.5 Curva real cero de tasas neta y bruta (182-act/360).

4.6.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

La determinación de nodos para las curvas reales (cero) de tasas neta y bruta usan el mismo procedimiento, la única diferencia es que se utilizan bonos netos y brutos, según corresponda.

Para el primer y segundo nodos, debido a que no se cuenta con la información de mercado para instrumentos cupón cero de tasa real, que permitan utilizarlos de punto inicial para el bootstrapping, se siguen los siguientes pasos:

(i) Se aplica el Bootstrapping al bono de menor plazo. Donde el plazo de la tasa cero inicial corresponde a los días por vencer del cupón vigente y es equivalente a la tasa cero del último cupón del bono.

Con esto se obtiene el segundo nodo de la curva, que es igual a una tasa simple, cero, con plazo igual a los días por vencer del cupón vigente, por lo que este plazo es menor de 182 días.

(*ii*) Con la tasa simple, cero, obtenida en (*i*), se calcula la tasa equivalente de un día, para obtener el primer nodo de la curva.

Para el tercer y último nodo se hace lo siguiente: al tener los primeros nodos y la información de mercado, se utiliza el método bootstrapping para encontrar las tasas simples, cero, que son los siguientes nodos de la curva. Una vez determinados, se interpolan linealmente para encontrar la estructura temporal de tasas de hasta 30 años.

Es importante tener las curvas en convención SMP-act/360 pues dicha convención se utiliza en la valuación de instrumentos financieros y análisis de riesgos.

4.6.2 Curva real cero de tasa neta (182-act/360) y curva real cero de tasa bruta

Estas curvas se obtienen al cambiar la convención de las curvas anteriormente descritas, por una convención de tasa 182 con la misma base.

4.7 Curvas de sobretasas de instrumentos gubernamentales de tasa flotante

En esta sección se presenta la metodología para la construcción de curvas de sobretasas de instrumentos gubernamentales de tasa flotante. Estas curvas se construyen tomando la información de los bonos de tasa flotante emitidos por el gobierno federal. Además, se hace una breve descripción de cada uno de estos instrumentos, a saber:

(*i*) Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México(BREM)

(*ii*) Bonos emitidos por el IPAB (BPAs y BPAT)

(*iii*) Bonos de Desarrollo

A continuación se describen los Bonos de Regulación Monetaria[12] (BREMS) cuyo propósito es regular la liquidez en el mercado de dinero y facilitar con ello la conducción de la política monetaria. Su valor nominal es de \$100 pesos mexicanos y pueden ser emitidos a cualquier plazo, siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días.

Las emisiones realizadas hasta la fecha han sido a plazos desde tres meses y hasta un año, pagando intereses cada 28 días o al plazo que lo sustituya en caso de que el día 28 sea inhábil. La tasa de interés pagada por estos instrumentos es la tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios correspondiente al periodo en cuestión. Con esta tasa, las instituciones de crédito realizan operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, es calculada y dada a conocer diariamente[13] por el Banco de México a través de su página electrónica `www.banxico.org.mx`

[12] El Banco de México con fundamento en los artículos 7, fracción VI, 17 y 46, fracción VI, de la Ley del Banco de México; 6, 7 y 12 de su Reglamento Interior tiene la facultad de emitir Bonos de Regulación Monetaria.

[13] En caso de día inhábil, para el cálculo de la tasa de interés, se utilizará la tasa que se dio a conocer el día hábil inmediato anterior. Si no puede determinarse o dejara de darse a conocer esta tasa, el Banco de México solicitará por escrito a dos casas de corretaje que el Comité de Mercado de Dinero de la Asociación de Banqueros de México, A. C. (ABM) seleccione, el promedio de las operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día con títulos bancarios. El Banco de México calculará el promedio de las dos tasas obtenidas para su determinación y dará a conocer el resultado como tasa sustituta de la referida anteriormente.

Los BREMS son colocados mediante subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar. En la actualidad dichas subastas se realizan semanalmente los días jueves, pudiendo subastarse títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta, los intereses devengados del cupón vigente. La clave de identificación de la emisión de los BREMS está diseñada para que los instrumentos sean fungibles entre sí. Esto es, BREMS emitidos con anterioridad recientemente pueden tener la misma clave de identificación siempre y cuando venzan en la misma fecha. Para ello, la referida clave está compuesta por ocho caracteres, los dos primeros para identificar el título (XA), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día)

Por lo que respecta a los Bonos de Protección al Ahorro (BPA's) son emitidos por el Instituto para la Protección al Ahorro Bancario (IPAB), usando a Banxico como agente colocador, con objeto de canjear o refinanciar sus obligaciones financieras a fin de hacer frente a sus obligaciones de pago, otorgar liquidez a sus títulos y, en general, mejorar los términos y condiciones de sus obligaciones. Estos bonos tienen un valor nominal de $100 pesos mexicanos y pueden ser emitidos a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días. Hasta la fecha estos títulos se han emitido a plazo de 1092 y 1820 días (3 y 5 años).

Los períodos de pago de intereses deberán ser iguales al plazo de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), a 28 días de plazo, que se emitan al inicio de cada período; siendo pagados en pesos mexicanos, tomando como tasa de interés para cada periodo la que resulte mayor entre:

(*i*) La tasa anual *yield*, equivalente a la de descuento, de CETES a 28 días de plazo, en colocación primaria, emitidos en la fecha de inicio de cada período de interés.

(*ii*) La tasa bruta de interés anual más representativa que el Banco de México de a conocer para pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento para personas morales, al mismo plazo que el de los CETES a 28 días. En su defecto, al más cercano a dicho plazo susceptibles de ser emitidos por la banca múltiple en la fecha de inicio de cada período de interés. En su caso, esta tasa se llevará al plazo de los CETES a un mes que corresponda considerar para el período que se trate.

El proceso de colocación es similar al descrito para los BREM's, incluyendo la posibilidad de subastar bonos emitidos con anterioridad.

En la actualidad se pueden realizar operaciones de compra-venta en directo y en reporto, además pueden ser utilizados como activos subyacentes en los mercados de instrumentos derivados (futuros y opciones). Las compra-ventas en directo de estos títulos se pueden realizar ya sea cotizando su precio o su sobretasa[14]. De hecho, la convención actual del mercado es cotizarlos a través de su sobretasa.

La clave de identificación de la emisión de los BPA's está diseñada para que los instrumentos sean fungibles entre sí. Esto es, BPA's emitidos con anterioridad y BPA's emitidos recientemente pueden tener la misma clave de identificación siempre y cuando venzan en la misma fecha. Para ello, la clave está compuesta por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título (IP), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día)

El IPAB también emite los Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés (BPAT), con características similares a los BPA's, difiriendo sólo en el plazo. Los BPAT's pueden ser emitidos a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 91 días. Éstos títulos se emiten a plazo de 1820 días (5 años). La tasa de interés usada es la tasa *yield* de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), en colocación primaria, emitidos al plazo de 91 días o al que sustituya a éste en caso de días inhábiles correspondientes a la semana en que empiezan

[14] Es el excedente de la tasa *yield* ofrecido por los BPA's sobre CETES al mismo plazo.

a devengarse los intereses. En aquellos casos en los que no se coloquen CETES a dicho plazo, esta tasa se sustituye por la tasa de los CETES colocados en el mercado primario al plazo más cercano a tres meses, llevada en curva a 91 días.

Estos bonos también difieren en su identificación de mercado. Los BPAT's son fungibles entre sí, para ello, la clave de pizarra está compuesta por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título (IT), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día).

Un procedimiento de elección de tasa similar siguen los Bonos de Protección al Ahorro con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BPA182); difiriendo en algunos puntos menores como el plazo. Los BPASs pueden ser emitidos a cualquier plazo siempre y cuando éste sea múltiplo de 182 días. Éstos títulos se emiten a plazo de 2,548 días (7años).

Otro punto que los distingue del resto de los instrumentos emitidos por el IPAB es la tasa de interés, la cual está compuesta de dos elementos, una tasa de referencia de mercado que se determina al inicio de cada periodo de interés y una sobretasa que protege al tenedor de la posibilidad de obtener una tasa de interés real negativa

$$\text{tasa de interés} = \text{tasa de referencia} + \text{sobretasa contra la inflación},$$

si se toma como la tasa de referencia la tasa *yield* de los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) en colocación primaria, emitidos al plazo de 182 días o al que sustituya a éste en caso de días inhábiles, correspondiente a la semana en que empiezan a devengarse los intereses. En aquellos casos en los que no se colocaran CETES a dicho plazo, esta tasa se sustituye por la tasa de los CETES en colocación primaria al plazo más cercano llevada en curva a 182 días.

La protección contra la inflación consiste en un sistema de pago en el cual, en aquellos casos en donde el aumento porcentual en el valor de la Unidad de Inversión (UDI) durante el periodo de intereses es mayor a la tasa de los CETES a 182 días, el título paga al tenedor además de la tasa de referencia, una prima que se determina como la diferencia entre el aumento porcentual en el valor de la UDI y la tasa *yield* de los CETES a 182 días, esto es:

$$\text{protección contra la inflación} = \left[\left(\frac{u_{Jnj}}{u_{j1}} - 1\right) - \left((r_{182j})\left(\frac{N_j}{360}\right)\right)\right]\left[\frac{360}{N_j}\right],$$

donde:

N_j	:es el plazo en días del cupón J,
u_{jnj}	:es valor de la UDI correspondiente al día del pago del cupón J,
u_{j1}	:valor de la UDI correspondiente al primer día del cupón J,
r_{182j}	:tasa de interés de los CETES 182 días de la subasta primaria al inicio del cupón J.

Estos títulos son identificados usando una clave compuesta por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título (IS), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día), lo que los hace fungibles entre sí.

Sólo resta hacer una breve descripción de los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182). Estos instrumentos tienen un valor nominal de \$100 pesos mexicanos, son emitidos a cualquier plazo siempre y cuando sea múltiplo de 182 días. Históricamente estos títulos se han emitido a plazo de 1820 días (5 años) pagando intereses cada 182 días o el plazo inmediato superior en caso de que ese día se inhábil. La tasa de interés pagada es similar a la de los BPAS's, esto es: una tasa de referencia de mercado que se determina al inicio de cada período de interés y un componente que protege al tenedor de la posibilidad de obtener una tasa de interés real negativa. La protección contra la inflación está dada de la misma forma que en el caso de los BPAS's.

$$\text{tasa de interés} = \text{tasa de referencia} + \text{protección contra la inflación},$$

Su colocación primaria sigue el mismo procedimiento que cualquier otro instrumento colocado por el Banco Central, y al igual que los instrumentos colocados por el IPAB, los BONDES son cotizados a sobretasa dentro del mercado secundario.

Siguiendo el sistema de clasificación usado para el resto de los instrumentos, se usa una clave que permite que estos instrumentos sean fungibles entre sí, esta clave está compuesta por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título (LS), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día).

Las características generales de la curva nominal libre de riesgo de tasa neta y de tasa bruta se muestran en los Cuadros 4.6 al 4.9 respectivamente.

Nombre de la curva	Curva BREMS
Plazo máximo de generación	10,920 días
Base	28-act/360
Tipo de tasa	Sobretasa
Interpolación	Lineal

Cuadro 4.6 Curva de sobretasas de BREMS.

Nombre de la curva	Curva IPABONOS
Plazo máximo de generación	1,820 días
Base	28-act/360
Tipo de tasa	Sobretasa
Interpolación	Lineal

Cuadro 4.7 Curva de sobretasas de bonos flotantes gubernamentales con cupón de 28 días.

Nombre de la curva	Curva TRIBONDE
Plazo máximo de generación	1,820 días
Base	91-act/360
Tipo de tasa	Sobretasa
Interpolación	Lineal

Cuadro 4.8 Curva de sobretasas de bonos flotantes gubernamentales con cupón de 91 días.

Nombre de la curva	Curva BONDSEM
Plazo máximo de generación	1,820 días
Base	182-act/360
Tipo de tasa	Sobretasa
Interpolación	Lineal

Cuadro 4.9 Curva de sobretasas de bonos flotantes gubernamentales con cupón de 182 días.

Las fuentes de información son resumidas en el cuadro 4.10, esta es obtenida y discriminada de la forma habitual.

Instrumento	Tipo de Valor	Plazo cupón	Día de Subasta	Curva
BREMS	XA	28	jueves	BREMS
IPABONOS	IP	28	miércoles	IPABONOS
IPABONOS Trimestral	IT	91	miércoles	TRIBONDE
BONDE Semestral	LS	182	martes	BONDSEM
IPABONOS Semestral	IS	182	miércoles	BONDSEM

Cuadro 4.10 Curva de sobretasas de bonos flotantes

4.7.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

Los nodos son iguales a la información del mercado de los instrumentos asociados a cada curva, por lo que cada emisión aporta un nodo a la misma. Para construir la curva se toman todas las emisiones vigentes al día de la valuación y se asigna una sobretasa por rango de operación en los días por vencer o por emisión específica, de manera que cada emisión vigente cuente como un nodo dentro de la curva, salvo en las emisiones vigentes que tengan 28, 91 ó 182 días por vencer o menos, las cuales automáticamente se les asignará una sobretasa de cero ya que al conocer su valor futuro se descuentan directamente con la curva de CETES al plazo correspondiente.

Para encontrar la estructura temporal de tasas de cada curva, se realiza la interpolación lineal con los nodos respectivos.

4.8 Curvas de reportos gubernamentales netos y brutos

Tal y como se explicó al comienzo del capítulo, un reporto consiste en una transacción en el mercado financiero que es formalizada mediante la celebración de un contrato entre el reportado, que es el dueño de los títulos en cuestión, quien entrega una determinada cantidad de estos al reportador, que es el inversionista, a cambio de un precio convenido, con el compromiso de que al vencimiento del contrato el reportador (inversionista) devolverá al reportado (dueño original), una cantidad igual de títulos de la misma especie y características, aún cuando físicamente no sean los mismos. Estas operaciones son realizadas a descuento, por lo que su valor se desprende del diferencial entre el precio al que se adquieren los títulos y el de su pago a la fecha del vencimiento del contrato (su valor nominal).

La operación de reporto puede ser realizada para cualquier instrumento, en el caso de los gubernamentales mexicanos, es realizada sobre Bonos M, UDIBONOS, CBICS, CETES, BREMS, BPA's, BPATs, BPASs y BONDES. Las características de esta curva serán resumida en el cuadro 4.11. Sus fuentes de información y la manera en que ésta se discrimina ya fueron tratadas con anterioridad.

	Curva de reportos gubernamentales	
Nombres de las curvas	Netos	Bonos M
		Bonos M, UDIBONOS y CBICS
	Brutos	CETES
		CETES, Bonos M, BREMS IPABONOS y BONDES
		CETES, Bonos M, BREMS IPABONOS y BONDES
Plazo máximo de generación	364 días	
Base	SMP-act/360	
Tipo de tasa	Cero	
Interpolación	Lineal	
Dependencia con otras curvas	Nodos de las curvas nominales de riesgo de tasas neta y bruta	

Cuadro 4.11 Curva de Reportos gubernamentales netos y brutos.

4.8.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

En el nodo de un día se considera la información de mercado de fondeo de tasa neta y bruta en reporto a un día, para las curvas de reportos netas y brutas, respectivamente. Para los nodos de corto plazo (28, 91, 182 y 364 días) cuando se tiene información de mercado, éstos se utilizan de manera directa como nodos de las curvas. Por lo general, en el mercado se cuenta con suficiente liquidez para obtener el nodo de 28 días y en pocas ocasiones se encuentran referencias de mercado a 91 días.

En caso de que no existan niveles de mercado, los nodos son iguales a los nodos de la curva nominal libre de riesgo (con o sin impuesto, según sea el caso) más un diferencial, el cual es igual a la diferencia entre el último nodo conocido de la curva de reportos y el nodo correspondiente de la curva nominal libre de riesgo.

Finalmente, para encontrar la estructura temporal de tasas de cada curva, se realiza la interpolación lineal con los nodos correspondientes a cada curva.

4.9 Bibliografía

BANOBRAS, Notas Técnicas, Certificados Bursátiles de Indemnización Carretera Segregables (CBICS).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (BONOS).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BPA182).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés (BPAT).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro (BPA's).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Regulación Monetaria (BREMS).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (UDIBONOS).

Brezinski, C. (2000). Interpolation and Extrapolation, Elsevier, New York.

Burden, R. L. and Faires, J. D. (2004). Numerical Analysis, Brooks-Cole Publishing, 8th. ed.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S. A. de C. V.

Phillips, G. M. (2003). Interpolation and approximation by polynomials, Springer-Verlag, New York.

4.10 Ejercicios

4.1 A lo largo del presente capítulo se ha hecho un uso exhaustivo del anglicismo *yield*, dada la difusión del mismo en medios académicos y de la industria. Se solicita al lector construir su propia "traducción" del mismo. Se sugiere buscar la relación del *yield* con la valuación del bono y la Tasa Interna de Retorno (TIR).

Solución: Se define como *yield* a la Tasa Interna de Retorno que hace el valor presente del bono igual a su precio de compra (la suma del valor presente de los flujos es cero). Esta tasa, por lo general, es distinta de la tasa cupón (a menos de que el bono se comercie a valor par). Suponga un bono con valor nominal de \$100 y una tasa cupón de 5% con una vida de 4 años, pagando cupones anualmente, al término de la cual se pagarán tanto el nominal como los intereses del periodo. También suponga que el bono se compra en \$95. Para calcular el *yield*, se usó la aplicación de Microsoft Excel © "Buscar objetivo". Buscando que la suma de los flujos fuese cero moviendo el valor de la celda *yield*. Esto es 6.45%:

Valor mdo	95		Periodo	Flujos	V.P. de los flujos
Nominal	100		0	-95	-95
Cupón	0.05		1	5	4.696682431
YTM	0.064581239		2	5	4.411765171
Suma de flujos	0.00		3	5	4.144131994
			4	105	81.74742208

Cuadro 1.1 Cálculo del *yield* to maturity.

4.2 El mercado no siempre presenta la liquidez necesaria dentro del mercado secundario como para proveer de información para todos los puntos de la curva en cuestión, por lo que es necesario elaborar la curva en los puntos donde el mercado no presentó información. Ahora surge la siguiente pregunta ¿Son únicas estas curvas?.

Solución: Dado que las curvas fueron realizadas usando técnicas de interpolación, estas no son únicas, pues dependiendo de la técnica de interpolación usada (discrecional), serán los puntos teóricos que arroje el método. El mercado provee de nodos (puntos) a cierto horizonte de liquidez y corresponde al usuario de la información llenar los huecos dejados por el mercado. Si se desea verificar esta información, use el método de la alambrada en un par de puntos de los ejercicios del capítulo de splines y notará que la información de los puntos intermedios difiere.

4.3 En la sección 4.8, se hace mención de las curvas de reporto y el método para su obtención. Con la finalidad de aclarar este punto, mencione: ¿Cuál es la diferencia entre una operación de reporto, una venta en corto y una venta?, ¿Por qué se requiere de instrumentos fungibles en el caso del reporto?

Solución: El reporto es a grandes rasgos, una operación en la que el reportado (dueño original) cede por un tiempo convenido una cantidad de títulos al reportador a cambio de un precio. El reportado debe regresar instrumentos de las mismas características al reportado (no necesariamente los mismos). Por esta razón se requiere que los instrumentos sean fungibles (imposible distinguir entre ellos si comparten las mismas características de madurez, cupón, etc.). En el caso de la venta en corto, el vendedor "pide" el instrumento de alguna institución o inversionista y la vende en el mercado secundario dentro de una transacción normal, con la obligación de resarcir el instrumento al dueño original cuando éste lo solicite. Por último, una venta es el cambio de propiedad de un bien a cambio de un pago.

Capítulo 5

Curvas yield domésticas no gubernamentales

Conceptos básicos:

- ✓ **Curva nominal** *yield*
- ✓ **Interpolación y Extrapolación lineal**
- ✓ **Bootstrapping**

5.1 Introducción

Cómo se menciona en los textos básicos de Economía, el objetivo de cualquier mercado es asignar de manera eficiente los recursos escasos con los que cuenta la sociedad a través de un sistema de precios. El dinero es uno de estos recursos, siendo su precio la tasa de interés. Sin embargo el mercado de dinero dista de ser un mercado de información perfecta y agentes idénticos, puesto que no todos los prestatarios tienen la misma actitud o aptitud de pago ni los prestamistas pueden evaluar de manera correcta a todos ellos, creando situaciones en las cuales los mercados se comportan siguiendo la paradoja de los limones.[1]

En el mercado de dinero, una manera de atenuar este problema de asimetría de información es la segmentación del mercado por "niveles" de riesgo (riesgo crédito). Resulta creíble pensar que es más seguro prestar dinero al gobierno federal de los Estados Unidos de Norte América que al gobierno federal de un país de América Latina, a su vez, es menos riesgoso prestar al gobierno federal de cualquier país que a una empresa asentada en él. Esta es la lógica seguida para la determinación de las curvas nacionales bancarias, la discriminación por riesgo crédito entre diferentes agentes económicos.

---

[1] La paradoja de los limones (autos usados) es el ejemplo clásico de un mercado con asimetrías de información. Los vendedores de los autos conocen los problemas de los motores y tienen incentivos de ocultarlos a los compradores para obtener un precio más alto. Los compradores supondrán de entrada que los vendedores les mienten sobre los autos y querrán pagar un precio menor que el que les es solicitado, por lo que los vendedores de los autos buenos salen del mercado pues el precio de venta es muy bajo y no les conviene, dejando sólo los autos con defectos.

5.2 Fuentes de información y estructuras de discriminación de la misma

Al igual que en el capítulo anterior, la construcción de curvas usa fuentes de información y estructuras de discriminación similares, ahora haciendo uso de instrumentos de deuda no gubernamentales. A continuación se hará un esbozo de ésta y al igual que en el capítulo anterior se hará mención por separado (en cada subsección) de las características propias de cada curva.

La información del mercado de los instrumentos se obtiene de *brokers* electrónicos, mesas de operación por vía telefónica e INDEVAL[2]. Por lo general el horario para obtener la información es de las 13:30 hrs. a las 14:00 hrs. (tiempo de la ciudad de México). Sin embargo, en días en que las condiciones de mercado lo requieran, el horario puede cambiar.

En caso de que existan nuevas fuentes de información que los intermediarios financieros utilicen para realizar sus operaciones, éstas se toman en consideración y se obtienen durante las horas de operación de mercado para complementar los nodos de la curva que no tengan operación ni postura en firme en las pantallas de los *brokers* electrónicos. El procedimiento para recopilar dicha información se hará a través de referencias directas de los intermediarios financieros, validando con al menos dos de ellos la información obtenida.

Los siguientes tres criterios de discriminación son válidos para todas las curvas, modificando sólo la fuente de la información y el tratamiento fiscal (netas o brutas de impuestos).

Primero: Se considera el hecho que tenga liquidación a 48 horas y un volumen representativo con valor nominal mayor o igual a 100 millones de pesos mexicanos.[3] De no aplicar este criterio se utiliza el segundo.

Segundo: En caso de que exista un corro[4] vivo al momento de la determinación de niveles y no haya habido operación. Se considera información de mercado al promedio de la postura de compra y venta, siempre y cuando la diferencia de posturas no exceda de cinco puntos base y se haya mantenido por lo menos cinco minutos en pantalla. De no aplicar este criterio se utiliza el tercero.

Tercero: La información de mercado es igual a las operaciones reportadas por INDEVAL con liquidación a 48 horas. Todo lo anterior se resume en el siguiente gráfico:

El último hecho	Si el hecho ponderado se encuentra dentro del último corro

De no cumplirse
$\Downarrow$

Nivel de frontera más cercano del corro vivo al último hecho.
El corro vivo se toma al momento de la determinación de niveles
y debe haber estado vivo en pantalla por lo menos 5 minutos.

De no cumplirse
$\Downarrow$

la información de mercado es igual a las operaciones reportadas por INDEVAL con liquidación a 48 horas.

Gráfica 5.1 Discriminación de información

[2] Empresa encargada de custodiar los títulos de mercado que se operan el la bolsa mexicana, también lleva el registro de la propiedad de los distintos títulos operados en la misma.

[3] Los niveles pueden cambiar dependiendo de la legislación local.

[4] Tradicionalmente la contratación de acciones en bolsa se realizaba en corros en los que los operadores manifestaban en voz alta sus ofertas. Hoy en día, pocas son las acciones que cotizan en corros.

5.3 Curvas nominales bancarias

Las curvas nominales bancarias usan como fuente de información los *yield*s dados por los pagarés con rendimiento liquidable al vencimiento (PRLV's). Estos instrumentos son títulos emitidos por instituciones de crédito, con una denominación variable, donde se establece la obligación de la institución de devolver al tenedor el capital más los intereses en una fecha determinada. Su objetivo es complementar la captación bancaria para financiar las operaciones de crédito de los bancos, es decir, es un instrumento que pretende aportar liquidez de corto plazo (nunca excede 360 días).

Es importante hacer notar que el instrumento cuenta con garantías directas e incondicionales y que su rendimiento resulta del diferencial de los precios de compra y de venta.

Estas curvas también usan como insumo la información provista por las aceptaciones bancarias (AB's). Estos instrumentos de deuda son letras de cambio giradas por sociedades mercantiles y aceptadas por una institución bancaria, previa autorización de una línea de crédito cuyo destino es proporcionar recursos de corto plazo a la empresa que la gira. Por su naturaleza, las aceptaciones bancarias tienen vencimientos de entre siete y hasta 182 días; estos instrumentos están respaldados por el banco que las emite. Resulta oportuno hacer notar que su rendimiento se desprende no del pago de una tasa de interés, sino que son vendidas a descuento.

Para la construcción de estas curvas, sólo se usan bonos emitidos por bancos clasificados como "AAA", "P8-X8" y "P12-X12". Estas clasificaciones pueden leerse como bonos de la más alta calificación según la escala de Standard & Poors (una agencia de calificación), la segunda se refiere a las primeras ocho mejores colocaciones en el mercado, el equivalente a "AA". Mientras que la tercera se refiere a las primeras doce mejores colocaciones, lo que es equivalente a la calificación de "A" en dicha escala. Las características generales de las curvas nominales se presentan en el Cuadro 5.1

	Curva nominal bancaria para el grupo de bancos clasificados como:	
	"AAA"	Curva B1
Nombres de la curvas	"P8-X8"	Curva B2
	"P12-X12"	Curva B3
Plazo máximo de generación	10,920 días	
Base	SMP-act/360	
Tipo de tasa	Cero	
Interpolación	Smoothing splines	
Dependencia con otras curvas	Curva nominal libre de riesgo de tasa bruta Curva de tasa de interés interbancaria de equilibrio, IRS -TIIE 28.	

Cuadro 5.1 Curvas nominales bancarias.

5.3.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

A continuación se describe la construcción de curvas nominales bancarias según el riesgo crédito relacionado.

Curva B1: Para el primer nodo de la curva B1, se toma el nivel de fondeo bancario de un día, los nodos menores a un año se toman de manera directa con la información de mercado. Para los nodos de 1 a 10 años, debido a la escasa liquidez en este tipo de instrumentos, el INDEVAL, de forma ocasional, proporciona información privada (no realizadas por Brokers).

Para determinar los nodos de largo plazo, Valuación Operativa y Referencias del Mercado S. A. de C. V. (VALMER) realizó un estudio con la información de operaciones a largo plazo registradas en INDEVAL, obteniendo los siguientes resultados:

(*i*) Las operaciones registradas por INDEVAL a largo plazo, tienen como frontera inferior a la curva nominal libre de riesgo de tasa bruta y como frontera superior a la curva de tasa de interés interbancaria de equilibrio[5] (IRS -TIIE 28).

En lo siguiente, se identifica a la curva nominal libre de riesgo de tasa bruta como "curva piso" y a la curva de tasa de interés interbancaria de equilibrio (IRS -TIIE 28) como "curva techo".

(*ii*) Para plazos de 2 a 5 años, se observa un diferencial promedio de 10 puntos base con respecto a la "curva piso".

(*iii*) Para plazos de 5 a 10 años, se observa un diferencial promedio de 15 puntos base con respecto a la "curva piso".

De esta forma se consideran los niveles de la última operación o emisión y se ajustarán cada que hayan nuevas operaciones.

Con la propuesta anterior se construye una curva nominal bancaria AAA (curva "B1"), guardando la misma "proporción" observada en las emisiones de largo plazo (10 años) para poder extrapolar hasta un plazo de 30 años.

Curvas B2 y B3: Para obtener estas curvas se realiza el siguiente procedimiento:

Tanto el primer nodo (asociado a un día) como los nodos menores a un año se toman de manera directa con la información de mercado. En los nodos de 1 a 30 años, debido a que el mercado de deuda bancaria para emisoras clasificadas como "AA" (P8-X8) y "A" (P12-X12) carece de referencias en plazos mayores a un año, se sugiere usar los siguientes criterios en la construcción en el largo plazo de las curvas "B2" y "B3":

(*i*) Usar como curva base, la curva nominal de pagarés y aceptaciones bancarias con clasificación "AAA" (curva "B1"), tomando en cuenta que esta curva cuenta con mayor sustento de mercado.

(*ii*) Monitorear de forma diaria en las fuentes de información que utiliza VALMER, las pocas referencias que puedan existir para PRLV's y AB's de emisoras con clasificación "B2" y "B3". Considerando de igual forma las operaciones reportadas por INDEVAL con liquidaciones menores o iguales a 48 horas.

(*iii*) Utilizar el diferencial observado entre la referencia de mercado de mayor plazo (regularmente a 91, 182 o 364 días) de "B2" contra "B1" y de "B3" contra "B1", para extrapolarlo linealmente con respecto al plazo deseado y montarlo a la curva base (curva "B1"). Este criterio se utiliza hasta el plazo de 30 años (10,920 días). Todo el procedimiento obedece a la sobretasa asociada a cada curva.

Es importante aclarar, que en caso de que se comiencen a observar nuevas referencias de mercado a mayor plazo, serán consideradas para la construcción de dichas curvas. En este caso no se considera necesario usar la técnica de Smoothing Splines para interpolar las curvas "B2" y "B3", ya que se está usando como base la curva "B1" que se encuentra interpolada bajo dicha metodología y por lo tanto, se considera un comportamiento similar en la estructura de tasas *forward*. En este caso se considera la interpolación lineal para los diferencial que se "montarán" a la curva base.

[5] Es la tasa que refleja las condiciones del mercado de dinero. Esta es calculada por el Banco de México en base a las cotizaciones de las tasas de interés ofrecidas por distintos bancos para su fondeo a otros bancos. Es usada como tasa de referencia para las tasas flotantes.

5.4 Curvas de reportos bancarios

En esta sección se construirá una curva usando los nodos de los reportos[6] hechos sobre todos los papeles bancarios descritos en la subsección anterior[7]. Por el momento basta con decir que un reporto es el "préstamo" de un documento de deuda a otro agente económico. A continuación, en el cuadro 5.2, se describen las características generales de esta curva.

	Curva de reportos bancarios de papeles clasificados como "AAA".
Nombres de las curvas	Curva de reportos bancarios de papeles clasificados como "AA".
	Curva de reportos bancarios de papeles clasificados como "A".
Plazo máximo de generación	360 días
Base	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero
Interpolación	Lineal
Dependencia con otras curvas:	Nodos de: Curvas nominales bancarias Curva de reportos gubernamentales Curva nominal libre de riesgo de tasa bruta

Cuadro 5.2 Curvas de reportos bancarios.

5.4.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

Para la construcción de la curva, se determina el primer nodo (asociado a un día) tomandolo de manera directa de la información de mercado. Actualmente, las referencias de mercado bancario para negociaciones en directo son escasas, con mayor razón para operaciones en reporto, por lo que la única referencia de reportos bancarios que se puede encontrar día a día en el mercado nacional es el de plazo a un día.

Los nodos hasta un año se obtienen al aplicar un diferencial a los nodos de las curvas nominales interbancarias con plazos de 28, 91, 182 y 364 días, esto implica que se suponer que las tasas ofrecidas por estos instrumentos están conformadas por las tasas de los reportos gubernamentales, *i.e.* libres de riesgo crédito, de similares características más una cantidad de puntos base que reflejan el riesgo crédito de cada curva.

El diferencial utilizado es igual a la diferencia de los nodos de la curva de reportos gubernamentales brutos y la curva nominal libre de riesgo bruta, para plazos de 28, 91, 182 y 364 días. En caso de que se observen referencias continuas de mercado, principalmente con la implementación de los reportos colateralizados, éstas se considerarán para la construcción de las curvas, lo cual se informará oportunamente. Por último, se hace notar que para obtener la estructura temporal de tasas a un año, los nodos se interpolan linealmente.

[6] Se recomienda al lector revisar el apartado referente a la curva de reportos gubernamentales para reafirmar el concepto de reporto.

[7] Se utilizan todos los nodos de todas las emisiones dada la falta de liquidez en el mercado de reportos bancarios.

5.5 Curva *swap* interbancaria

Un *swap* es un contrato en el cual dos partes acuerdan intercambiar flujos de efectivo referenciados a alguna tasa (fija por flotante) o a un tipo de cambio y a un nocional[8].

Un *swap* también puede ser visto como un conjunto de FRA's (*Forward Rate Agreement*),[9] de los cuales se darán mas detalles posteriormente.

Para la valuación de estos productos, se utiliza la curva cuya construcción se describe en el cuadro 5.3. Es importante resaltar que la curva *swap* interbancaria depende de las curvas nominales bancarias, de la curva de reportos gubernamentales y de la curva nominal bruta libre de riesgo.

Nombre de la curva	Curva *swap* Interbancaria
Plazo máximo de generación	10,920 días
Base	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero
Bootstrapping	Usando tasas
Interpolación	Lineal exponencial
Dependencia con otras curvas	Curva nominal libre de riesgo de tasa bruta. Curva de tasa de interés interbancaria de equilibrio, IRS-TIIE 28. Curva real libre de riesgo de tasa bruta.

Cuadro 5.3 Curva *swap* interbancaria.

5.5.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

El primer nodo (asociado a un día) se obtiene al hacer equivalente la tasa del segundo nodo (182 días) a un día, mientras que el resto de los nodos para la estimación de la curva, se encuentran situados a 182 días de distancia, esto es, desde 182 hasta 10,920 días.

Para cada uno de los plazos correspondientes a los nodos base, se siguen los siguientes pasos:

(i) Se busca una tasa fija tal que el precio de un bono descontado mediante la Curva IRS-TIIE28 sea valuado a la par, con valor nominal igual a 1.

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{e}{1 + \hat{R}\frac{182i}{360}},$$

donde:

N : Número total de cupones de cada bono.

e : Tasa fija de cada uno de los plazos de los cupones (variable que se desea encontrar).

$\hat{R}$: Tasa de la curva IRS-TIIE28 correspondiente al plazo $182i$.

---

[8] El Nocional es un monto que funciona como nominal de referencia en el intercambio de flujos del *swap*. Teóricamente los nocionales (de montos iguales) son intercambiados al final del periodo. En la práctica los nocionales no se intercambian.

[9] Un FRA es un contrato en el cual se pacta hoy el intercambio en una fecha futura de dos flujos de efectivo. El primero de ellos es el resultado de aplicar una tasa de interés fija, conocida de antemano, y aplicada a un nocional; mientras que el segundo es el resultado de aplicar, al mismo nocional, una tasa variable dada al momento en que entra en vigor el acuerdo.

(*ii*) Se calcula el precio de un bono que paga la tasa fija encontrada en el paso 1, pero descontado con la curva CETES:

$$P = \sum_{i=1}^{N} \frac{e}{1 + \tilde{R}\frac{182i}{360}},$$

donde:

P : Precio del bono en unidades monetarias (variable a encontrar).

N : Número total de cupones de cada bono.

e : Tasa fija de cada uno de los plazos de los cupones (obtenida en el paso (i)).

$182i$: Plazo de cada uno de los cupones del bono.

$\tilde{R}$: Tasa de la curva nominal libre de riesgo de tasa bruta correspondiente al plazo $182i$.

(*iii*) Se busca la tasa fija (*swap*) para un bono que descontado con la curva real, iguale el precio del bono resultante del cálculo en el paso dos:

$$P = \sum_{i=1}^{N} \frac{e}{1 + \tilde{R}\frac{182i}{360}},$$

donde:

P : Precio del bono en unidades (obtenida en el paso (ii)).

N : Número total de cupones de cada bono.

e : Tasa fija de cada uno de los plazos de los cupones, esta es *swap* real interbancaria (variable que se desea encontrar).

$182i$: Plazo de cada uno de los cupones del bono.

$\tilde{R}$: Tasa de la Curva Real Cero de tasa Bruta correspondiente al plazo $182i$.

Los nodos de la curva se obtienen al aplicar el bootstrapping a la tasa *swap* obtenida en el paso (iii), de esta forma los nodos tienen una tasa cupón cero. Finalmente, se interpolan los nodos tasas cero para construir la curva a 10,920 días. El modelo de interpolación usado es el lineal exponencial.

5.6 Curva Mexibor

En esta subsección se presenta la curva referida a la tasa Mexibor. Esta es una tasa de interés interbancaria de referencia para México, la cual es calculada y difundida diariamente por REUTERS[10] basándose en cotizaciones proporcionadas por once de los bancos radicados en México y representados en la Asociación de Banqueros de México (ABM)[11].

La tasa Mexibor fue creada bajo la premisa de llegar a ser la tasa de referencia para México, de la misma forma que lo es la tasa *Libor* en Gran Bretaña y desde luego la tasa *Prime* en los Estados Unidos de Norte América.

[10] Reuters es una agencia noticiosa radicada en el Reino Unido de la Gran Bretaña e Irlanda del Norte que también se dedicada a proveer de información y análisis financiero a los mercados (90% de sus ingresos provienen de esta actividad).

[11] Fundada en noviembre de 1928, con el propósito de representar los intereses generales de la banca y brindar a los bancos servicios técnicos especializados, la ABM se ha desempeñado como el organismo cúpula de las instituciones de crédito radicadas en México.

El propósito de la creación de la tasa Mexibor es establecer un mecanismo transparente, seguro y confiable para la determinación de tasas de interés interbancarias de referencia a diversos plazos y de forma continua. Proporcionando cotizaciones de tasas de interés interbancarias de referencia ampliamente aceptadas en el mercado.

Entre los beneficios de la Mexibor están: contar con tasas de interés interbancaria de referencia para plazos en que antes no existían, estimular la liquidez en los mercados, promover la emisión de instrumentos financieros y colaborar en el financiamiento de proyectos productivos de largo plazo al proveer liquidez en el mercado de dinero. En el siguiente cuadro se presentan las características principales de esta curva.

Nombre de la curva	Curva Mexibor
Plazo máximo de generación	360 días
Base	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero
Interpolación	Smoothing splines

Cuadro 5.4 Curva Mexibor.

5.6.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

Para la construcción de la curva, se toma el primer nodo como la tasa equivalente a un día respecto a la tasa Mexibor de un mes. Para los nodos restantes, hasta 360 días, se observa la información del mercado de manera directa. Una vez obtenidos los nodos, se interpola el resto de los puntos de la estructura temporal usando la técnica de Smoothing Splines. Es importante hacer notar que en este caso la información proviene exclusivamente de Reuters.

5.7 Curvas nominales corporativas

En esta subsección se revisará la construcción de la estructura de plazo de los instrumentos corporativos, *i.e.* sociedades mercantiles, la cual es generada a partir de los instrumentos colocados en la bolsa de valores local que cuenta con información pública y auditada. La curva es generada usando las colocaciones del papel comercial[12], estos son pagarés negociables emitidos por sociedades mercantiles cuyo destino es financiar las necesidades de capital de trabajo de quien los emite, por lo que por definición son de corto plazo.

El papel comercial no cuenta con una garantía especifica (es la solvencia económica y el prestigio de la empresa colocadora la que los respalda), aun cuando en algunas ocasiones son avalados por una institución bancaria. Usualmente son colocados entre el publico inversionista a una tasa de descuento; esto significa que su rendimiento se determina por el diferencial entre el precio al que se adquieren y al que se venden.

El papel comercial es un nombre genérico que se da a los instrumentos de deuda de corto plazo sin una garantía específica; entre ellos los más comunes son los certificados bursátiles de corto plazo y los pagarés.

Los certificados bursátiles se caracterizan por su flexibilidad operativa una vez definido el programa de colocación, el cual permite ejercer la línea de crédito en una o varias emisiones a conveniencia del emisor. Dentro de esta flexibilidad operativa, la empresa tiene la posibilidad de definir el monto y el momento de colocación, así como las características de cada emisión, pudiendo establecer los montos y condiciones generales de pago y tasa. Entre las características

[12] En general se pueden construir tantas curvas como se deseen, con la única limitante de la liquidez del mercado, la cual limita la cantidad de nodos. La construcción de curvas obedece a los distintos diferenciales (diferenciales) en las tasas, los cuales reflejan distintos niveles de riesgo crédito propios de cada curva construida.

más comunes se encuentran las tasas reales o descontadas, tasas indizadas (referenciada a un índice), udizadas (referenciado a las unidades de inversión)[13], etc.

Por otra parte, se define como "pagaré" a un título de crédito que contiene una promesa incondicional de pago, dada por una persona llamada suscriptor a otra que recibe el nombre de beneficiario en un tiempo determinado. Este instrumento siempre deberá contener la frase "Me obligo a pagar" u "Ofrezco pagar". A esto se le denomina como el "Requisito de literalidad" en el documento.

5.7.1 Fuentes de información y estructuras de discriminación

En el caso de las curvas nominales corporativas se hace mención específica de las fuentes de información y de las estructuras de discriminación hechas sobre ésta, dada la diferencia sustancial que presenta con respecto del resto de las curvas. En general, la información (ofertas públicas) se obtiene de la bolsa de valores local poco antes de la hora de cierre. En el caso mexicano, este tipo de papel se emite normalmente los días jueves con liquidación al mismo día y comúnmente se cierra el libro de registro 24 horas antes de la emisión. Sin embargo, se considera toda oferta pública independientemente del día que haya sido emitida. Además, se considera la información de las operaciones realizadas en el mercado secundario, liquidadas y reportadas por el INDEVAL, para el caso de pagarés y certificados bursátiles.

Para determinar la información del mercado de las curvas, se utilizan los siguientes dos criterios de discriminación:

Primero. En el día de emisión, la información de mercado es igual al promedio ponderado por monto de emisión de las tasas de rendimiento designadas a las ofertas públicas, realizadas a través de la bolsa de valores local. Las emisiones se catalogan de acuerdo a la calificación otorgada por cualquiera de las empresas calificadoras en el mercado, en el caso mexicano son: Standard & Poor's, Moody's y/o Fitch.

La siguiente tabla muestra las diferentes escalas de calificación a corto plazo existentes y sus equivalencias entre las principales agencias calificadoras registradas en el mercado mexicano.

Tabla de calificaciones			
Standar & Poor's	Moody's	Fitch	Curva
mxA-1, mxA-1+	mx-1, mx-1+	F1, F1+	"AAA ó D1"
mxA-2	mx-2	F2	"AA ó D2"
mxA-3	mx-3	F3	"A ó D3"

Cuadro 5.5 Tabla de equivalencias de calificaciones.

Para considerar dicha tasa ponderada de rendimiento como información de mercado, ésta deberá tener un volumen representativo de acuerdo a lo siguiente:

[13] Las Unidades de Inversión (UDIS) son unidades de cuenta creadas por el Banco Central de México cuya finalidad es conservar el poder adquisitivo del inversionista al ligar el valor de la UDI con un índice de precios previamente establecido.

Plazo	Volumen Representativo de Valor Nominal
Menor o igual a 91 días	Mayor o igual a 100 millones
Entre 92 y 200 días	Mayor o igual a 50 millones
Mayor a 200 días	Mayor o igual a 30 millones

Tabla 5.6 Tabla de volúmenes.

de no cumplirse, se utiliza el segundo criterio.

Segundo: La información de mercado es igual al promedio ponderado por monto de operación de las tasas de rendimiento implícitas en los precios negociados en el mercado secundario de pagarés referenciados a papel comercial y certificados bursátiles de corto plazo. En el siguiente cuadro se muestran las características principales de esta curva.

	Curvas de papel comercial, con papeles calificados como:	
	“AAA”	Curva D1
	“AA”	Curva D2
Nombres de las curvas	“A”	Curva D3
	“B”	Curva D4
	“C”	Curva D5
	“D”	Curva D6
Plazo máximo de generación	360 días	
Base	SMP-act/360	
Tipo de tasa	Cero	
Interpolación	Smoothing splines	
Dependencia con otras curvas	Nodos de la curva nominal libre de riesgo de tasa bruta.	

Cuadro 5.7 Curvas nominales corporativas.

5.7.2 Determinación de nodos y construcción de curvas

Curvas de papel comercial (D1, D2, D3)

Dado que los instrumentos de los que se obtienen la información de mercado son bonos cupón cero, es posible tomar la tasa de rendimiento directamente como nodo para la curva que se desea generar. Actualmente, en el mercado, hay diferentes emisoras clasificadas en tres escalas de acuerdo a su calidad crediticia de corto plazo (hasta un año), por lo que realmente tres de las seis curvas que genera VALMER son construidas con referencias de mercado (D1, D2 y D3), donde la curva D1 hace referencia a la calificación más alta, es decir, es la curva menos castigada por el diferencial de riesgo crédito.

Dado que el mercado secundario de los pagarés y certificados referenciados a papel comercial es poco líquido, en los días que no existan nuevas emisiones ni operaciones secundarias, los nodos de las curvas corporativas se obtendrán a partir de los nodos de la curva nominal libre de riesgo de tasas bruta más un diferencial (diferencial), esto se realiza bajo el supuesto de que los participantes en las ofertas públicas consideran la tasa libre de riesgo para determinar la prima que estarían dispuestos a pagar por la emisión.

Curvas de papel comercial (D4, D5, D6)

Se generan tres curvas más, en donde la curva más alta (D6) representaría a las emisoras que caigan en "default" o incumplimiento de pago. Dado que actualmente no se cuenta con información de mercado para la construcción de estas curvas, los nodos se obtienen a partir de la curva D3 más un diferencial.

En espera de nuevos indicios de mercado se generan curvas teóricas de acuerdo a un análisis realizado cada semestre por un proveedor de precios, *V.g.* VALMER, en donde se consideran las ofertas públicas de pagarés y certificados bursátiles referenciados a papel comercial de todo el periodo, y se obtiene el diferencial promedio entre cada una de las tres clasificaciones existentes (regularmente son entre 200 y 300 puntos base). Mantiendo dicho diferencial entre la última curva de mercado (D3) y las siguientes dos curvas (D4 y D5). Para el caso de la última curva (D6) se considera el doble o triple del diferencial para reflejar de alguna forma el impacto sufrido por una emisora que cae en incumplimiento. Una vez obtenidos los nodos de cada curva, éstos se interpolan con el modelo de "Smoothing Splines" para obtener la estructura temporal de tasas hasta 360 días.

5.7.3 Consideraciones especiales

(*i*) En el caso mexicano, para los papeles emitidos por Grupo CARSO (AMTEL, GCARSO, SANBORN, TELECOM, TELMEX, etc.), se contempla un tratamiento especial dado que entre las empresas del mismo grupo se colocan papeles con primas preferentes de acuerdo a sus estrategias financieras, que muchas veces salen del promedio ponderado calculado con el resto del sector de mercado correspondiente. Se considera la curva definitiva la de mejor clasificación (D1), se determina el diferencial adicional que necesitan estas emisiones para reflejar el nivel con el que se colocaron y el cual se mantiene a vencimiento. Adicionalmente se considera el movimiento diario de la curva de CETES y en caso de ser necesario, el ajuste por condiciones de mercado reflejadas en los diferenciales adicionales que presenten nuevas emisiones del mismo tipo.

(*ii*) Para el caso de los papeles emitidos por paraestatales también se considera un tratamiento especial, ya que sus niveles de colocación son muy similares a los niveles de los bonos libres de riesgo crédito local (bonos del gobierno local) dado que su riesgo crediticio es similar al del gobierno federal. Para su elaboración se considera como la curva definitiva la de papeles con la mejor clasificación, se determina el diferencial adicional que necesitan estas emisiones para reflejar el nivel con el que se colocaron y el cual se mantendrá a vencimiento. Adicionalmente se considera el movimiento diario de la curva del bono libre de riesgo crédito y, en caso de ser necesario, el ajuste por condiciones de mercado sobre los diferenciales adicionales que presenten nuevas emisiones del mismo tipo.

5.8 Curvas de reportos corporativos

A continuación, se muestra la construcción de la curva de reportos para los instrumentos anteriormente descritos. La información se obtiene de los reportos de los instrumentos y la discriminación se hace de la forma habitual. En el siguiente cuadro se muestran las características principales de esta curva.

	Curva de reportos corporativos de papeles clasificados como "AAA".
Nombres de las curvas	Curva de reportos corporativos de papeles clasificados como "AA".
	Curva de reportos corporativos de papeles clasificados como "A".
Plazo máximo de generación	360 días
Base	SMP-act/360
Tipo de tasa	Cero
Interpolación	Lineal
Dependencia con otras curvas:	Nodos de las curvas nominales corporativas

Cuadro 5.8 Curvas de reportos bancarios.

5.8.1 Determinación de nodos y construcción de las curvas

Los nodos hasta un año se toman de manera directa con la información de mercado. Es importante considerar que los reportos referenciados a papel corporativo son poco líquidos en el mercado secundario, por lo que en caso de no contar con niveles de mercado de manera directa, los nodos de estas curvas se obtienen a partir de los nodos de las curvas nominales corporativas D1, D2 y D3 más un diferencial. Sin embargo, en caso de que se observen referencias continuas de mercado, principalmente con la implementación de los reportos colateralizados, éstas se considerarán para la construcción de las curvas y se informará oportunamente. Para obtener la estructura temporal de tasas a un año, los nodos se interpolan linealmente.

5.9 Bibliografía

Brezinski, C. (2000). Interpolation and Extrapolation, Elsevier, New York.

Burden, R. L. and Faires, J. D. (2004). Numerical Analysis, Brooks-Cole Publishing, 8th. ed.

Karris, S. T. (2007). Numerical analysis using Matlab© and Excel©, Orchard Publications, 3rd. Ed.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S. A. de C. V.

Phillips, G. M. (2003). Interpolation and approximation by polynomials, Springer-Verlag, New York.

5.10 Ejercicios

5.1 A lo largo de la subsección 5.3.1 se hace mención de un diferencial para la curva corporativa. ¿Cuál es la razón para la existencia de este diferencial?, ¿Es único el diferencial? Mencione dos métodos para obtener estos diferenciales.

Solución: El diferencial mencionado en el capítulo es el precio (reflejado en una sobretasa) que el mercado asigna al riesgo crédito de un bono o a un nicho de bonos, reflejados por la calificación crediticia asignada a un grupo de instrumentos de características similares. El diferencial es mayor si el mercado percibe como más riesgoso un bono. Existen una gran variedad de modelos para asignar estos diferenciales. Entre los más conocidos están el de Hull y White y los de

Longstaff y Schwartz, aunque en última instancia se puede usar cualquiera de los muchos modelos existentes en la literatura.

5.2 A lo largo del capítulo se hace mención de las calificaciones crediticias asignadas por las agencias a los bonos corporativos. Investigue qué agencias calificadoras trabajan en su mercado local y muestre la escala de una de ellas.

Solución: En el caso mexicano y hasta el momento de la elaboración de esta obra, se encuentran operando las agencias Standard & Poor's, Moody's Investor Service y Fitch IBCA. A continuación se muestra una tabla de equivalencias entre las calificaciones y probabilidades de incumplimiento aproximadas de dos de ellas. Se hace notar que se trata de aproximados, y que éstos pueden variar a lo largo del tiempo por cambios en las condiciones de mercado.

Equivalencias entre calificadoras		
S&P	Moody's	Probabilidad de incumplimiento
AAA	Aaa	0.02
AA	Aa2	0.04
AA-	Aa3	0.06
A	A2	0.11
A-	A3	0.19
BBB	Baa2	0.31
BBB-	Baa3	0.5
BB+	Ba1	0.78
BB	Ba2	1.2
BB-	Ba3	1.7
B+	B1	2.6
B	B2	3.6
B-	B3	5
CCC+	Caa1	6.7
CCC	Caa2	8.8
CCC-	Caa3	11
CC	Ca	14
C	C	17
D	D	20

Cuadro 5.9 Equivalencias entre grados otorgados por las principales calificadoras.

5.3 En el capítulo anterior se revisó la construcción de las curvas gubernamentales. Comparando la metodología entre ambos capítulos, ¿Encuentra similitudes? ¿Cómo las explica?

Solución: En ambos casos se requiere construir curvas que serán usadas para la valuación de las posiciones de mercado de los agentes participantes, por lo que las técnicas numéricas de interpolación son las mismas. Más aún, existe una relación teórica que dice que las curvas corporativas tienen como piso las curvas gubernamentales del país anfitrión, casi siempre será más seguro prestarle a un gobierno, y que a partir de éstas se agrega un diferencial por riesgo crédito para poder construir las curvas corporativas. La forma en que se obtiene y aplica ese diferencial es decisión del valuador, aunque por comparabilidad, es común que las autoridades supervisoras designen curvas sobre las cuales cada participante del mercado debe valuar sus posiciones y en función a estas valuaciones tomar las previsiones correspondientes para cumplir con la regulación local.

Capítulo 6

Bonos cuponados

Conceptos básicos:

- ✓ **Curva *yield* (rendimiento al vencimiento)**
- ✓ **Estructura de plazos**
- ✓ **Valuación de bonos**
- ✓ **Precio sucio, precio limpio, intereses devengados**
- ✓ **Bonos indexados**

6.1 Introducción

En este capítulo se presentan los elementos que intervienen en la valuación de los instrumentos de renta fija, también denominados bonos. Se discuten los conceptos de curva de rendimiento al vencimiento o curva *yield* y estructura de plazos. Asimismo se presenta la metodología general para valuar bonos cuponados en el caso de los bonos M y la metodología para valuar bonos indexados como son los UDIBONOS.

6.2 Notación

Cualquier persona ha tenido la experiencia en la vida diaria con alguna promesa de pago, es decir, ha pedido (o ha prestado) algo en algún momento de su vida. Algunas veces se pide prestada (se presta) una cantidad inicial, M_0, en un tiempo t y se promete pagar (o que le pagarán) en una fecha futura T el capital, M_0, más algo adicional, por ejemplo I, es decir, en la fecha T se pagará la cantidad M_0+I, donde casi siempre la cantidad adicional I es un porcentaje del monto inicial M_0, por lo que se tiene que el pago prometido será

$$M_0 + rM_0$$

lo cual es equivalente a

$$M_0(1+r).$$

Este porcentaje adicional r podría pensarse como el pago por el servicio del uso de dinero ajeno al cual se le conoce como crédito. Las personas piden prestado porque necesitan dinero para llevar a cabo sus planes (en lugar de ir al banco lo cual podría ser más caro). Por el contrario, las personas prestan dinero porque tienen un excedente y desean hacer algo productivo con él. Análogamente, una empresa podría necesitar (o tener un excedente) de fondos para realizar proyectos los cuales incrementarían su capacidad productiva y de esta forma lograr un crecimiento de dichas empresas para poder sobrevivir en un mundo cada vez más dinámico y agresivo. Es decir, para poder crecer, las empresas necesitarán fondos que puen no poseer. Para fondearse, las empresas cuentan con dos opciones básicas: emitir acciones o emitir deuda. El optar por la primera opción implica una pérdida en el poder de la toma de decisiones de la empresa, de tomarse la segunda alternativa, la forma más común es a través de pagarés (bonos), se pide prestado una cantidad B_0 y en un futuro se devolverá una cantidad B_T (valor nominal). Por lo anterior, podría pensarse que la empresa vende (emite) un pagaré (bono) a la cantidad B_0 el día de hoy y en el futuro se comprometen a pagar la cantidad B_T, es decir, existe un flujo de efectivo hoy, que se deberá de entregar al vendedor del pagaré y un flujo de efectivo B_T que se entregará al comprador.

6.3 Instrumentos de renta fija

Una primera clasificación de los instrumentos financieros está dada por la obligatoriedad de sus pagos futuros. Se define como un instrumento de renta fija a aquel cuyos flujos de efectivo están predeterminados mediante un contrato, *V.g.* CETES, bonos de empresas, etc. Por otro lado, se definen como instrumentos de renta variable a aquellos cuyos flujos de efectivo no están predeterminados mediante un contrato, tal es el caso de las acciones y los derivados.

Un bono es uno de los principales instrumentos de renta fija, es una promesa de pago a futuro, impersonalizada, entre dos partes en la que una parte se compromete a pagar ciertos flujos de efectivo durante un lapso de tiempo a la contraparte que hace el préstamo. La parte que tiene la obligación de realizar pagos futuros se le conoce como el emisor del bono, mientras que la parte que recibe dichos pagos se le conoce como comprador o tenedor. Al periodo de tiempo al que dura este contrato se le denomina vencimiento del bono, por otra parte, se le conoce como valor nominal a la cantidad prestada estipulada en el bono que se deberá pagar en el vencimiento del bono. Por último, si el bono paga flujos de efectivo antes de la fecha de vencimiento, se dice que es un bono cuponado; se conoce como cupones a estos flujos de efectivo previos al vencimiento, mientras que las fechas en que ocurren estos pagos son conocidas de pago o corte de cupón.

Cabe destacar que el propietario de este tipo de instrumentos se encuentra expuesto al riesgo de incumplimiento por parte del emisor (riesgo crédito). Sin embargo, en el transcurso del presente capítulo se supondrá que todos los bonos son libres de él. De la misma manera, si el tenedor de un bono requiere liquidez antes del vencimiento y desea vender este certificado, entonces estará sujeto al riesgo de mercado. Por supuesto, si se espera a la fecha de vencimiento para recibir la cantidad prometida, el riesgo de mercado será inexistente.

Los bonos pueden o no pagar flujos de efectivo intermedios a la fecha de vencimiento, cuando no pagan cupones intermedios, se les conoce como bonos cupón cero o simplemente ceros, mientras que los bonos que sí realizan estos pagos son conocidos como bonos cuponados o bonos con cupón.

6.4 Elementos de un bono

Debido a que un instrumento financiero queda totalmente caracterizado por sus flujos de efectivo y el tiempo en que estos ocurren, es necesario conocer los conceptos asociados a cada parte de este contrato, para ello, se presanta el siguiente resumen:

(i) valor nominal, es el valor que se promete pagar en la fecha en que vence el bono;

(ii) fecha de vencimiento, es la fecha en que se deberá pagar el valor nominal (o vida del bono);

(iii) fecha de emisión, fecha en que se emite el bono;

(iv) fecha de colocación, es la fecha en que se puso a la venta el bono;

(v) tasa cupón, es la tasa de rendimiento que se paga periódicamente sobre el valor nominal (la cual se puede ver como el pago de intereses del bono), por lo que si un bono es cupón cero entonces su tasa cupón deberá ser cero;

(vi) cupón, es la cantidad en unidades monetarias que se paga periódicamente, la cual se calcula como la tasa cupón por el valor nominal.

Con los elementos anteriores quedan totalmente caracterizados los flujos de efectivo de un bono, por lo que se puede hablar de la valuación del mismo.

6.5 Valuación de bonos

Una vez que se conocen los elementos de un bono, se conocen los flujos de efectivo que éste pagará, así como las fechas en que ocurrirán estos flujos, por lo que para determinar el precio del bono, bastará con saber la tasa de descuento de dichos flujos. A continuación, para hacerlo, se empleará la siguiente notación:

N : valor nominal del bono;

T : vencimiento del bono;

C_i : cupón que se pagará en $i < T$, con $i = 1, ..., T$.

Si y es el rendimiento al vencimiento del bono (también conocido como *yield to maturity* o simplemente *yield*), entonces el precio del bono $\widehat{B}(t,T)$ estará dado por el valor presente de sus flujos de efectivo, es decir:

$$\widehat{B}(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1+y)^{i-t}} + \frac{N}{(1+y)^{T-t}},$$

alternativamente, bajo composición continua, el precio del bono esta dado por

$$\widehat{B}(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-y(i-t)} + N e^{-y(T-t)}.$$

Para cualquier bono resulta indistinto reportar su precio de mercado o, dados los flujos de efectivo, su rendimiento único (rendimiento al vencimiento). De esta forma si se reporta su precio de mercado entonces el rendimiento al vencimiento (y) puede calcularse como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono.

De las expresiones anteriores es importante destacar que debido a que los pagos nominales del bono son conocidos de antemano, el valor del bono $\widehat{B}(t,T)$ fluctúa debido a los cambios en las tasas de descuento, creando con ello una pérdida potencial. También se observa que existe una relación inversa entre la tasa de descuento y el precio de un bono, es decir, si las tasas de descuento aumentan, entonces el precio del bono disminuirá y viceversa.

6.6 Curva de rendimientos al vencimiento (Curva *yield*)

Como se vió anteriormente, la valuación de un bono depende del rendimiento al vencimiento (*yield*), o si se tiene el precio de mercado del bono, entonces el rendimiento al vencimiento (y) se puede calcular como la tasa de descuento que iguala los flujos de efectivo al valor de mercado del bono. Es decir, para cualquier bono es posible reportar su precio de mercado, o dados los flujos de efectivo del bono, su rendimiento único. No obstante, la verdadera cuestión estriba en averiguar si su rendimiento puede relacionarse a las condiciones prevalecientes del mercado.

El rendimiento al vencimiento de cualquier bono está fuertemente limitado a las condiciones generales de los mercados de renta fija. Todos los rendimientos al vencimiento tienden a moverse juntos en este mercado, pero no todos los rendimientos al vencimiento de los bonos son exactamente los mismos. Un factor que explica parcialmente las diferencias en los rendimientos al vencimiento es el tiempo al vencimiento, es decir, los bonos con mayor vencimiento tendrán mayor rendimiento al vencimiento.

De esta forma surge un concepto importante el cual es llamado curva de rendimiento al vencimiento (o curva *yield*) la cual expresa la relación funcional entre el rendimiento al vencimiento y el plazo a vencimiento del bono. Cuando se está analizando un bono en particular, es útil determinar su rendimiento y fecha de vencimiento para después colocarlos como un punto de la curva de rendimientos al vencimiento para bonos de su misma clasificación de riesgo. Esto dará una indicación general de que tan bien está valuado el bono respecto a todo el mercado.

La representación tradicional de la estructura intertemporal está basada en bonos de rendimiento a la par; esto es utilizando el rendimiento al vencimiento de bonos con un cupón cercano a su vencimiento. La ventaja de este método es que los bonos relacionados, denominados "on the run" (emitidos recientemente) son muy líquidos y sus precios reflejan acertadamente las condiciones del mercado. No obstante, este método ignora la información contenida en otros bonos que se encuentran en circulación. Algunos enfoques intentan ajustar la curva de rendimientos a través de los rendimientos de todas las emisiones vigentes.

6.7 La estructura de plazos

La curva *yield* es de gran utilidad como indicador de mercado pero debido a que en cierta forma es arbitraria no proporciona una explicación completamente satisfactoria de las diferenciales de los rendimientos al vencimiento. El problema es que los rendimientos observados no representan a los rendimientos futuros a menos que todos los cupones puedan ser reinvertidos a la misma tasa, lo cual es muy poco probable. Para subsanar esta limitación, es necesario proporcionar otra teoría.

La teoría presentada en esta sección deja de lado las ideas del rendimiento al vencimiento para enfocarse en el concepto puro de tasa de interés, es decir, se basa en la observación de que en general la tasa de interés depende de la longitud del periodo de tiempo en que el dinero es prestado.

Se define como tasa *spot* (o tasa de interés de contado) a T años como la tasa de interés de una inversión efectuada en un periodo de tiempo que empieza en t (hoy) y termina en T años, donde el interés y el principal serán pagados en T, a la cual se le denotará como $R(t, T)$. Es importante hacer notar que bajo este enfoque de la tasa *spot* no existen flujos de efectivo entre los tiempos t y T. De esta forma si se tiene un bono cupón cero con valor nominal N y fecha de vencimiento en T entonces su precio estará dado por

$$\widetilde{B}(t,T) = \frac{N}{(1 + R(t,T))^{T-t}},$$

si la composición de la tasa es en tiempo continuo, entonces el precio del bono está dado por

$$\widetilde{B}(t,T) = N e^{-R(t,T)(T-t)}.$$

Es importante destacar que el flujo de efectivo del bono al vencimiento T es N, es decir,

$$\widetilde{B}(T,T) = N,$$

de donde se tiene que $R(T, T) = 0$.

Note que en este caso el rendimiento al vencimiento está bien definido, dado que corresponde al vencimiento compuesto en el periodo T sobre el bono. En el caso de este bono cupón cero, se tendrá que su rendimiento al vencimiento en un plazo T es la tasa *spot*.

En contraste, un bono con cupones tiene muchos flujos de efectivo previos al vencimiento y puede ser descompuesto en una serie de bonos cupón cero donde el cupón al tiempo i puede ser visto como el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en esta fecha. El valor nominal más el último cupón es el valor nominal de un bono cupón cero con vencimiento en T. De esta forma el precio del bono estará dado por

$$\widetilde{B}(t,T) = \sum_{i=1}^{T} \frac{C_i}{(1 + R(t,i))^{i-t}} + \frac{N}{(1 + R(t,T))^{T-t}}, \tag{6.1}$$

donde las $R(t,i)$ son las tasas *spot* que integran la estructura de plazos en el tiempo i, con $i = 1, 2, ..., T$. Es posible encontrar dentro de la literatura que la estructura de plazos también es conocida como la curva cero o curva *spot*, y representa las tasas *spot* graficadas contra el tiempo.

Si la composición de las tasas de interés es continua, entonces el precio de un bono cuponado está dado por

$$\widetilde{B}(t,T) = \sum_{i=1}^{T} C_i e^{-R(t,i)(i-t)} + N e^{-R(t,T)(T-t)}. \tag{6.2}$$

Una curva cupón cero (o estructura de plazos) es, teóricamente, más precisa que la curva usual de rendimientos al vencimiento. La primera representa un conjunto de precios primitivos, a partir de los cuales puede ser obtenido el valor de los instrumentos de renta fija (en particular los bonos). Sin embargo, los mercados activos para los bonos cupón cero (denominados también *strips*) existen sólo en los Estados Unidos y Francia, y son relativamente recientes. Por lo tanto, la curva de la tasa *spot* generalmente se estima a partir de los bonos en circulación con un cupón en proceso de pago, utilizando la ecuación (6.1) ó (6.2) según sea el caso.

La curva de rendimientos al vencimiento (curva *yield*) puede ser observada, al menos aproximadamente buscando una serie de cotizaciones de bonos en las publicaciones financieras. La curva casi nunca es plana, pero usualmente tiene una pendiente creciente conforme los vencimientos se incrementan, característica que comparte con la tasa *spot*. La pendiente se incrementa rápidamente en vencimientos cortos y continúa incrementándose gradualmente conforme los vencimientos se alargan. Además se observa que la curva *spot* tiene variaciones cada día, por lo que resulta natural preguntarse si existe una explicación simple para esta forma típica de la estructura de plazos.

Existen tres explicaciones estándar o teorías de la estructura de plazos, cada una de las cuales proporciona algún significado importante. A continuación se esbozarán brevemente estas tres teorías.

(*i*) La más sencilla es la conocida como la teoría de las expectativas, sostiene que las tasas *spot* a largo plazo deben reflejar las tasas de interés a corto plazo futuras esperadas. De manera más precisa argumenta que una tasa *forward* correspondiente a cierto periodo es igual a la tasa *spot* futura esperada para este periodo.

(*ii*) La segunda teoría, conocida como la teoría de segmentación de mercados, conjetura que no es necesario que haya relación alguna entre las tasas *spot* a corto y largo plazo. Bajo esta teoría, diferentes instituciones invertirán en obligaciones de diferentes vencimientos sin posibilidad de cambio en el vencimiento deseado para la inversión. La tasa de interés a corto plazo se determinará por la oferta y demanda en el mercado de obligaciones a corto plazo, la tasa de interés a mediano plazo se determina por la oferta y demanda del mercado de obligaciones a mediano plazo, y así sucesivamente.

(*iii*) Por último, la teoría que resulta en cierta forma más atractiva es la conocida como la teoría de la preferencia por la liquidez. En ella se argumenta que las tasas *forward* deben ser siempre más altas que las tasas *spot* esperadas en el futuro.

El supuesto básico subyacente de esta teoría es que los inversionistas prefieren conservar su liquidez e invertir sus fondos durante periodos cortos de tiempo. Los prestatarios, por otro lado, normalmente prefieren endeudarse a tasas de interés fijas y periodos largos. Si las tasas de interés ofrecidas por los bancos y otros intermediarios financieros fueran tales que la tasa *forward* fuera igual a la tasa *spot* esperada en el futuro, las tasas de interés a largo plazo, se igualarían a la media de las tasas de interés a corto plazo esperadas en el futuro. Con la ausencia de incentivos para cambiar de proceder, los inversionistas tenderían a depositar sus fondos durante periodos cortos y los prestatarios tenderían a endeudarse a periodos largos, por lo que los intermediarios financieros podrían, en ese caso, financiar cantidades importantes de préstamos a largo plazo a tasa fija con depósitos a corto plazo. Lo cual implicaría sin embargo, un excesivo riesgo de tasa de interés. En la práctica, para emparejar a depositantes con prestatarios y eliminar así, el riesgo de tasa de interés, los intermediarios financieros aumentarán la tasa de interés a largo plazo con respecto a las tasas de interés a corto plazo esperadas en el futuro. De esta forma, se reducirá la demanda de préstamos a largo plazo de tasa fija y se estimulará a los inversionistas a depositar sus fondos durante largos periodos de tiempo. La teoría de la preferencia por la liquidez lleva a una situación en la que las tasas *forward* son más altas que las tasas *spot* esperadas en el futuro. Es también consecuente con la observación empírica acerca de que las curvas de rendimientos tienden a tener pendientes positivas más a menudo que pendientes negativas.

En la práctica, las tasas *spot* (o tasa cupón cero) no pueden observarse directamente, lo que puede observarse son los bonos que pagan cupón. Un punto importante es, por lo tanto, el cómo puede extraerse la curva de rendimiento cupón cero a partir de los precios de bonos con cupón. Para lograr tal objetivo se recurre al método "bootstrapping" tratado en el capítulo tres. La idea central de dicho método se basa en que la curva de tasas *spot* puede ser determinada de los precios de bonos cuponados, comenzando con bonos de vencimientos cortos y trabajando hacia adelante con bonos de vencimientos mayores.

Se recordará el proceso para la composición de un año (suponiendo que los cupones se pagan una vez al año). Primero, se determinará $R(t,1)$ por observación directa de la tasa de interés de un año. Después, se considerará un bono a dos años. Se supondrá que el bono tiene precio $\widetilde{B}(t,2)$, hace pagos de cupón de montos C_1 y C_2 al final del año 1 y 2 respectivamente, y con valor nominal de N. El precio de debe ser igual al valor presente de los flujos de efectivo, es decir

$$\widetilde{B}(t,2) = \frac{C_1}{(1+R(t,1))} + \frac{C_2+N}{(1+R(t,2))^2},$$

como la tasa *spot* al primer año $R(t,1)$ ya es conocida, entonces se puede resolver la ecuación anterior para la tasa *spot* al segundo año, es decir para $R(t,2)$.

Trabajando de esta forma, hacia delante, es posible determinar las tasas *spot* para tres, cuatro y más años, $R(t,3)$, $R(t,4)$,..., $R(t,T)$ a partir de los bonos con esos rendimientos. Es importante mencionar que bajo este método se tendrán las tasas *spot* de acuerdo a los vencimientos de los bonos disponibles por lo que no se tendrán tasas *spot* fuera de estos periodos de vencimiento. Por ello es necesario contar con modelos que puedan proporcionar la tasa *spot* a un vencimiento específico[1].

Es importante resaltar que la tasa *spot* $R(t,T)$ puede modelarse como una inversión realizada de 1 unidad monetaria, la cual será reinvertida cada periodo de tiempo a la tasa *forward* $f(t,k,k+1)$ es decir

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+f(t,t,1))\,(1+f(t,1,2))\,(1+f(t,2,3))\ldots(1+f(t,T-1,T))\,,$$

pero $f(t,t,1)=R(t,1)$, por lo que

$$(1+R(t,T))^{T-t} = (1+R(t,1))\,(1+f(t,1,2))\,(1+f(t,2,3))\ldots(1+f(t,T-1,T))\,. \tag{6.3}$$

De lo anteriot se deduce que la tasa *spot* para el periodo T se puede escribir como un promedio geométrico de las tasas *spot* y *forward*.

En el caso continuo, se tiene que

$$e^{R(t,T)(T-t)} = e^{R(t,1)}e^{f(t,1,2)}e^{f(t,2,3)}\ldots e^{f(t,T-1,T)}, \tag{6.4}$$

[1] En este caso los modelos de tasa corta son adecuados para lograr tal objetivo, consultar Venegas Martínez (2006) para mayor explicación acerca de estos modelos.

de donde se obtiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[R(t,1) + \sum_{i=2}^{T} f(t,i-1,i)\right],$$

es decir, en el caso continuo la tasa *spot* a T años es un promedio geométrico de la tasa *spot* y las tasas *forward*. Sin embargo debido a que $f(t,t,k) = R(t,k)$, se tiene que

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[f(t,t,1) + \sum_{i=2}^{T} f(t,i-1,i)\right], \tag{6.5}$$

de donde se observa que la tasa *spot* a T años es un promedio geométrico de las tasas *forward* por periodo. De lo anterior, es importante mencionar que la estructura de plazos puede ser generada a través de las tasas *forward* espaciadas un periodo de tiempo, es decir, por $f(t,t,1)$, $f(t,1,2)$, $f(t,2,3)$,...,$f(t,T-1,T)$, por lo que si se conocen estas tasas entonces la estructura de plazos puede ser obtenida como un promedio geométrico o aritmético (geométrico para composición discreta y aritmético para composición continua). Se recuerda al lector que las tasas *forward* espaciadas por un periodo de tiempo $f(t,k,k+1)$ son muy importantes para la estructura de plazos.

6.8 Valuación de Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de interés Fija (Bonos M)

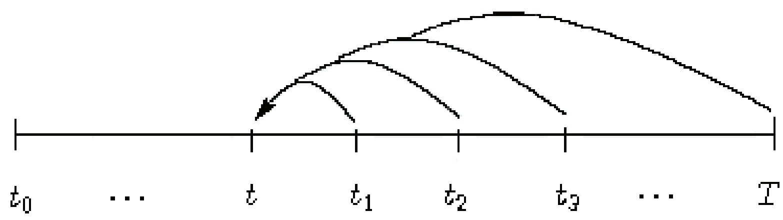
Estos instrumentos son emitidos y colocados a plazos mayores a un año, pagan intereses cada seis meses (182 días) y la tasa de interés se determina en la emisión del instrumento y se mantiene fija a lo largo de toda la vida del mismo. Las características generales de los bonos M se muestran en el Cuadro 6.1

Tipo de Instrumento	Bono con cupones de tasa fija
Emisor	Gobierno federal a través del Banxico
Tipo de Mercado	Mercado de dinero
Mercado donde cotiza	Mercado primario (subastas) Para 3, 5, 7, 10 y 20 años. Cada 4 semanas. Mercado secundario
Fuentes de Información	Banxico, *brokers* electrónicos y mesas de operación por vía telefónica
Tipo de valor	M5, M7 y M0 (Sin impuesto, actualmente ya dejaron de emitirse y el último venció el 14 de julio de 2011)
	M3, M5, M7, M0 y M (con impuesto)
Valor nominal	100 pesos

Cuadro 6.1 Características generales de los bonos M.

Los bonos M son instrumentos que generan intereses durante su plazo de emisión, para el cálculo de su valor justo de mercado pueden usarse tanto la tasa de rendimiento del bono M como la tasa de descuento. La convención actual del mercado es cotizarlos a través de su tasa de rendimiento (ésta última es la que utiliza el proveedor de precios para el cálculo del precio de valuación). A continuación se presenta la metodología general para valuar un bono M.

Suponga que se cuenta con un bono M emitido en t_0, considere que han transcurrido algunos días desde su emisión, por lo que se han pagado o vencido algunos cupones. Se desea valuar el bono en cualquier fecha t (conocida como fecha focal), se sabe que el vencimiento del bono es en T días, por lo que la diferencia $T-t$ son los días por devengar del bono, tal y como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica 6.1 Valuación de un bono en la fecha focal.

Para calcular el valor del cupón de un bono M al cual le faltan n cupones por pagar con una periodicidad de p días, es necesario multiplicar la tasa cupón, $R_c > 0$ (anualizada) constante por el valor nominal del bono, esto es:

$$C_i \equiv C = R_c\left(\frac{p}{360}\right)N, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

6.9 Cálculo de precio sucio, intereses devengados y precio limpio

Ahora bien, sea $\widehat{y}$ la tasa *yield* al tiempo t, es decir, la tasa que tiene un plazo de composición igual al periodo entre cupones, cada p días, asociada al precio de mercado del bono. Es posible calcular el precio sucio del bono del bono M, $\widehat{B}(t,T)$, al que le restan $n = (T-t)/p$ cupones, mediante

$$\widehat{B}_s(t,T) = \frac{C_1}{\left(1+y\frac{p}{360}\right)^{\frac{(t-t_1)}{p}}} + \frac{C_2}{\left(1+y\frac{p}{360}\right)^{\frac{(t_2-t)}{p}}} + \frac{C_3}{\left(1+y\frac{p}{360}\right)^{\frac{(t_3-t)}{p}}} + ... + \frac{N}{\left(1+y\frac{p}{360}\right)^{\frac{(T-t)}{p}}}. \quad (6.6)$$

Equivalentemente, si se utiliza una estructura de plazos $R(0,\cdot\,)$, se sigue que

$$\widetilde{B}\,(0,T) = C\left[\frac{1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{1}{1+\widetilde{R}_2} + \ldots + \frac{1}{1+\widetilde{R}_T}\right] + \frac{N}{1+\widetilde{R}_T}, \quad (6.7)$$

donde

$$\widetilde{R}_i = R(0,T_i)(T_i - 0) = R(0,T_i)T_i, \qquad T_i = i\frac{p}{360}, \qquad i = 1, ..., n.$$

Para calcular los intereses devengados de los días transcurridos I_{t-t_0} del cupón vigente, es necesario conocer la diferencia de días entre el siguiente pago de intereses (corte de cupón) y la fecha focal t, para ello se establece

$$I_{t-t_0} = C\frac{(p-(t-t_0))}{p}. \quad (6.8)$$

El precio limpio del bono se obtiene restándole al precio sucio los intereses devengados al día de valuación del cupón vigente. Cabe aclarar que cuando el día de valuación coincide con algún corte de cupón, el precio sucio $\widehat{B}_s$ es igual al precio limpio $\widehat{B}_l$

$$\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_{(t-t_0)}. \quad (6.9)$$

6.10 Ejemplo de la valuación de bonos M con tasa cupón constante

Considere un bono M3 que vence el 29 de diciembre del 2008 y se desea valuar el día 30 de abril del 2007. El bono M3 paga una tasa cupón del 9% cada 182 días. Se desea calcular el precio limpio del bono M. El número de cupones por pagar se calcula mediante

$$n = \frac{T-t}{p} = \frac{(t-t_0)}{p} = \frac{608}{182} = 3.34.$$

En este caso al bono le quedan por vencer cuatro cupones en las fechas futuras, t_1, t_2, t_3 y t_4. Se sabe que el valor nominal es $N = 100$, por lo que el valor nominal de cada cupón está dado por:

$$C = R_c\left(\frac{p}{360}\right)N = 0.09\left(\frac{182}{360}\right)100 = 4.55.$$

Para poder valuar el bono M3 se necesita la curva de CETES (sin impuestos), de la cual se proporcionan los siguientes nodos

Plazo	Tasa CETES %
1	6.2600
7	6.2493
28	6.2509
91	6.4048
182	6.6503
360	6.7636
540	7.5679
720	8.0604

Cuadro 6.2 Tasa de CETES sin impuestos.

Es posible encontrar los plazos requeridos con interpolación lineal a partir de los nodos proporcionados. Para el ejemplo en cuestión se obtiene

Pazo de cupón	Tasa cetes %
62	6.3340
244	6.6898
426	7.0585
608	7.7540

Cuadro 6.3 Plazos interpolados.

Con la tasa cupón correspondiente para cada plazo, se calcula el precio sucio. De acuerdo con (6.1), se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{B}_s(t,T) =& \frac{4.55}{\left(1+0.06334\left(\frac{62}{182}\right)\right)} + \frac{4.55}{\left(1+0.066898\left(\frac{244}{182}\right)\right)} + \frac{4.55}{\left(1+0.070585\left(\frac{426}{182}\right)\right)}\\ &+ \frac{104.55}{\left(1+0.077540\left(\frac{608}{182}\right)\right)}\\ =&105.496678.\end{aligned}$$

Para el cálculo de los intereses devengados, se hace uso de la ecuación (6.8), obteniendo

$$I_{(t-t_0)} = C\frac{(p-(t-t_0))}{p} = 4.55\frac{(182-62)}{182} = 3.00.$$

Por último, el precio limpio se obtiene restando los intereses devengados, esto es

$$\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_{(t-t_0)} = 105.496678 - 3.0000 = 102.496678.$$

6.11 Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES)

Los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES) son el instrumento de deuda bursátil más antiguo emitido por el Gobierno Federal, se emitieron por primera vez en enero de 1978 y desde entonces constituyen un pilar fundamental en el desarrollo del mercado de dinero en México. Estos títulos pertenecen a la familia de los bonos cupón cero, esto es, se comercializan a descuento (por debajo de su valor nominal),*i.e.* ,no devengan intereses en el transcurso de su vida y liquidan su valor nominal en la fecha de vencimiento. Las características generales de los CETES se muestran en el Cuadro 6.4.

Tipo de Instrumento	Bonos cupón cero
Emisor	Gobierno federal a través de Banxico
Tipo de Mercado	Mercado de dinero
Mercado donde cotiza	Mercado primario (subastas) Para 28, 91 y 128 días semanalmente Para 364 días cada 4 semanas Mercado secundario
Fuentes de Información	Banxico, *brokers* electrónicos y mesas de operación por vía telefónica
Tipo de valor	B1 (CETES con impuesto)
Valor Nominal	10 pesos
Curva utilizada en la valuación	Curvas nominal libre de riesgo de tasas neta y bruta

Cuadro 6.4 Características generales de los CETES.

Este tipo de instrumento no genera intereses durante su plazo de emisión, por lo tanto su precio limpio es igual a su precio sucio. El valor de un CETE se puede calcular a partir de su tasa de rendimiento o de su tasa de descuento, aunque, la convención actual del mercado es cotizarlos a través de su tasa de rendimiento, ésta última es la que se utiliza para calcular su precio.

6.11.1 Valuación de CETES

Los CETES se valúan simplemente como el valor presente del valor nominal (\$10), dado que se emiten a descuento, utilizando la tasa de rendimiento correspondiente a los días por vencer que le queden al instrumento. La tasa utilizada para valuar es anualizada y simple al plazo, la cual se obtiene de la Curva nominal libre de riesgo de tasa bruta que construye el proveedor de precios.

El precio de valuación se calcula con la siguiente fórmula:

$$B(t,T) = \frac{N}{(1+R(t,T)(T-t/360))}, \tag{6.10}$$

donde:

$B(t,T)$: Precio de valuación,

N : Valor nominal (\$10),

$R(t,T)$: Tasa de rendimiento asociada al número de días por vencer,

$T-t$: Número de días por vencer.

6.12 Bonos indexados

Los bonos indexados procuran tomar como ancla alguna variable macroeconómica que le otorgue suficiente estabilidad al instrumento, abarcan desde bonos indizados a la tasas de inflación hasta paridades cambiarias. El objetivo principal del instrumento es que, ante el temor de que algún precio relativo crezca desmesuradamente, se proteja el valor del capital indizándolo a alguna variable macroeconómica clave. Con lo anterior, se pretende disminuir el riesgo mercado del instrumento. Estos bonos han tenido su mayor aceptación en mercados emergentes, donde las inversiones de largo plazo han estado inhibidas por los temores devaluatorios o crisis inflacionarias.

El mercado de los bonos indexados es muy amplio y se pueden encontrar diferentes tipos, por ejemplo en el caso de México, se pueden encontrar bonos relacionados con las UDI (Unidades de Inversión) o con la inflación. A continuación se comentan brevemente:

(*i*) **UDIBONO (Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal Denominados en Unidades de Inversión)**. Son instrumentos de inversión que protegen al tenedor ante cambios inesperados en la tasa de inflación.

(*ii*) **Corporativos**. Existen bonos indexados emitidos por empresas. En México, los bonos generalmente se indexan a la UDI.

(*iii*) **EUROPESOS**. Son bonos emitidos en el extranjero en pesos, para efectos de la obtención de su precio, se calcula como un bono y al final se ajusta por la inflación.

(*iv*) **TIPS** *(Treasury Inflation Protected Securities)*. Es un tipo especial de *Treasury Note* que ofrece la protección de la inflación. Como otros instrumentos de esta clase, este bono paga interés (cada seis meses) y el principal compensados por la inflación, representada por el índice de precios de consumidor (*CPI*, por sus siglas en inglés).

6.12.1 Bonos de desarrollo del gobierno federal denominados en unidades de inversión (UDIBONOS)

Estos instrumentos son emitidos y colocados a plazos largos, pagan intereses cada seis meses (182 días), en función de una tasa de interés real fija que se determina en la fecha de emisión del título. En la actualidad, la única emisión que se realiza es a 10 años y tiene asociado el indicador de pizarra “S”. Su valor nominal es de 100 UDIS. En México son muy útiles para cubrir necesidades de aseguradoras, fondos de pensiones, afores, etc. La metodología de cálculo para obtener su precio es igual a la de un bono cuponado pero al final se multiplica por la UDI del día de la valuación. Las características generales de los UDIBONOS se muestran en el Cuadro 6.5

Tipo de Instrumento	Bonos cupón de tasa fija
Emisor	Gobierno federal a través del Banxico
Tipo de Mercado	Mercado de dinero
Mercado donde cotiza	Mercado primario (subastas) Para 10 años cada 4 semanas Mercado secundario
Fuentes de Información	Banxico, *brokers* electrónicos y mesas de operación por vía telefónica.
Tipo de valor	S0 (sin impuesto, actualmente ya dejaron de emitirse y el último vence el 06 de enero de 2011). S0 y S (con impuesto)
Valor Nominal	100 UDIS (unidades de inversión)
Curva utilizada en la valuación	Curvas reales *yield* de tasas neta y bruta

Cuadro 6.5 Características generales de los UDIBONOS.

6.12.2 Ejemplo de valuación de un UDIBONO

A continuación se valúa un UDIBONO cuyas características se muestran en el siguiente cuadro

Características	
Tasa cupón	4.5
Plazo cupón	182
Vencimiento	18/12/2014
Emisión	30/12/2004
Nominal	100
yield mercado (VP)	3.58
Valuación	03/10/2007
UDI	3.871892

Cuadro 6.6 Información para la valuación del UDIBONO.

Para el cálculo del precio del UDIBONO se consideró la nota técnica de Banco de México. De acuerdo con los datos del cuadro anterior, el número de cupones por pagar es

$$n = \frac{T-t}{p} = \frac{(t-t_0)}{p} = \frac{2633}{182} = 14.47.$$

En este caso, al redondear, quedan por pagar 15 cupones en las fechas futuras: $t_1, \ldots, t_{15}$. Se sabe que el valor nominal es $N = 100$. Por lo que el valor del cupón está dado por

$$C = R_c \left(\frac{p}{360}\right) N = 0.045 \left(\frac{182}{360}\right) 100 = 2.275.$$

El cuadro 6.7 muestra los flujos de efectivo necesarios para calcular el precio sucio, $\widehat{B}_s$,del bono.

Estos flujos fueron calculados de acuerdo a la ecuación (6.6).

Fechas Corte	Plazo Cupón	D×V	Flujo	Valor Presente
27/12/2007	85	182	2.275000	2.256021
26/06/2008	267	182	2.275000	2.215916
24/12/2008	448	181	2.262500	2.164778
25/06/2009	631	183	2.287500	2.149577
24/12/2009	813	182	2.275000	2.099826
24/06/2010	995	182	2.275000	2.062497
23/12/2010	1177	182	2.275000	2.025832
23/06/2011	1359	182	2.275000	1.989819
22/12/2011	1541	182	2.275000	1.954445
21/06/2012	1723	182	2.275000	1.919701
20/12/2012	1905	182	2.275000	1.885574
20/06/2013	2087	182	2.275000	1.852054
19/12/2013	2269	182	2.275000	1.819130
19/06/2014	2451	182	2.275000	1.786791
18/12/2014	2633	182	102.275000	78.899060

Cuadro 6.7 Flujos de un UDIBONO.

Al sumar el valor presente de todos los flujos se obtiene que el precio sucio es:

$$\widehat{B}_s = 414.606150.$$

Los intereses devengados se calculan de acuerdo con la ecuación (6.8), obteniendo

$$I_{(t-t_0)} = \frac{(p-(t-t_0))}{p} = 2.275\frac{(182-85)}{182} = 4.694669.$$

Por lo tanto, el precio limpio del UDIBONO es

$$\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_{(t-t_0)} = 414.606150 - 4.694669 = 409.911481.$$

6.13 Bibliografía

Banxico; Notas técnicas del Banco de México; Bonos de Desarrollo del gobierno federal con tasa de interés fija (BONOS).

Banxico; Notas técnicas del Banco de México; Certificados de la tesorería de la federación (CETES).

BANOBRAS; Notas técnicas; Certificados Bursátiles de Indemnización Carretera Segregables (CBICS).

Banxico; Notas técnicas del Banco de México; Los Bonos de desarrollo del gobierno federal denominados en unidades de inversión (UDIBONOS).

Fabozzi, F. J. (2006). Fixed income mathematics, McGraw-Hill, New York, 4th. ed.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V.

6.14 Ejercicios

6.1 Calcule el precio limpio $\widehat{B}_l$ de un bono M10 que vence el 20 de diciembre del 2012, suponga que se valúa el día 30 de septiembre del 2003 y paga una tasa cupón del 9%, con una tasa *yield* 8.16%.

Solución: Se calcula el número de cupones por vencer mediante

$$n = \frac{T-t}{p} = \frac{(t-t_0)}{p} = \frac{3369}{182} = 18.51,$$

al redondear resulta que se tienen 19 cupones por vencer. Ahora se calcula el pago del cupón, de tal forma que

$$C = R_c\left(\frac{p}{360}\right)N = 0.09\left(\frac{182}{360}\right)100 = 4.55.$$

El siguiente cuadro muestra los flujos de efectivo necesarios para calcular el precio sucio del bono, estos flujos fueron calculados de acuerdo a la ecuación (6.6).

Fecha cupón	Cupón	Dias por Devengar	Valor Presente
01/01/2004	4.55	93	4.45
01/07/2004	4.55	275	4.27
30/12/2004	4.55	457	4.09
30/06/2005	4.55	639	3.92
29/12/2005	4.55	821	3.75
29/06/2006	4.55	1003	3.60
28/12/2006	4.55	1185	3.45
28/06/2007	4.55	1367	3.30
27/12/2007	4.55	1549	3.16
26/06/2008	4.55	1731	3.03
25/12/2008	4.55	1913	2.91
25/06/2009	4.55	2095	2.78
24/12/2009	4.55	2277	2.67
24/06/2010	4.55	2459	2.56
23/12/2010	4.55	2641	2.45
23/06/2011	4.55	2823	2.35
22/12/2011	4.55	3005	2.25
21/06/2012	4.55	3187	2.16
20/12/2012	104.55	3369	47.47

Al sumar el valor presente de todos los flujos se obtiene que el precio sucio $\widehat{B}_s = 104.6076$. Los intereses devengados se calculan de acuerdo con la ecuación (6.8), de lo que se sigue que

$$I_{(t-t_0)} = \frac{(p-(t-t_0))}{p} = 4.55\frac{(182-93)}{182} = 2.2250.$$

Por lo tanto, el precio limpio del bono M10 está dad por

$$\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_{(t-t_0)} = 104.6076 - 2.2250 = 102.3826.$$

6.2 Calcule el precio limpio $\widehat{B}_l$ de un bono M0 que vence el 23 de diciembre del 2010, suponga que se valúa el día 10 de enero del 2007 y paga una tasa cupón del 8%, con una tasa *yield* de 7.47%.

Solución: El número de cupones que quedan por pagar es:

$$n = \frac{T-t}{p} = \frac{(t-t_0)}{p} = \frac{1443}{182} = 7.93,$$

al redondear resulta que se tienen 8 cupones por vencer. El pago del cupón es

$$C = R_c\left(\frac{p}{360}\right)N = 0.08\left(\frac{182}{360}\right)100 = 4.04.$$

El precio sucio es $\widehat{B}_s = 102.0907$, los intereses devengados son

$$I_{(t-t_0)} = \frac{(p-(t-t_0))}{p} = 4.55\frac{(182-169)}{182} = 0.2889,$$

por lo que el precio limpio del bono M0 es

$$\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_{(t-t_0)} = 102.0907 - 0.2889 = 101.8018.$$

6.3 Calcule el precio sucio $\widehat{B}_S$ de un bono M0 que el 13 de septiembre del 2007 tiene 1925 días por vencer. La tasa cupón vigente es de 9%. Verifique que la tasa *yield* a esta fecha es de 7.73%.

6.4 A partir de la siguiente expresión

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{T}\frac{C_i}{(1+R(t,i))^{i-t}} + \frac{N}{(1+R(t,T))^{T-t}},$$

muestre que si $R(t,T)$ se incrementa, el precio del bono se reduce.

Capítulo 7

Bonos con tasa flotante

Conceptos básicos:

- ✓ **Bonos con tasa flotante**
- ✓ **Tasa de fondeo bancario**
- ✓ **Sobretasa**

7.1 Introducción

En este capítulo se presenta la técnica estándar de valuación para bonos cuponados a tasa flotante, en particular se estudia la metodología propuesta por el banco central de México (Banxico) en sus documentos técnicos.

Un Bono de Regulación Monetaria del Banco de México (BREM), es un instrumento de deuda cuyo propósito es regular la liquidez en el mercado de dinero y facilitar con ello la implementación de la política monetaria. En el mercado, estos instrumentos son cotizados haciendo referencia a la sobretasa que ofrecen a los inversionistas, generalmente grandes tesorerías, fondos de pensiones y bancos. Los BREMS resultan atractivos por la liquidez y rentabilidad que proporcionan.

7.2 Descripción

El valor nominal de un BREM es de $100 pesos mexicanos y pueden ser emitidos a cualquier plazo, siempre y cuando éste sea múltiplo de 28 días. Las emisiones realizadas hasta el momento van desde los tres meses y han llegado hasta a un año, pagando intereses cada 28 días o al plazo que lo sustituya en caso de que el día 28 sea inhábil. La tasa de interés pagada por estos instrumentos es la tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios correspondiente al periodo en cuestión.

La tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios es la tasa con la que las instituciones de crédito realizan operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios, es calculada y dada a conocer diariamente por el Banco de México a través de su página de internet.

En caso de que el día de valuación sea inhábil, la tasa de interés a usar será la tasa que se dió a conocer el día hábil inmediato anterior. En caso de que la tasa no pueda determinarse o dejara de darse a conocer, el Banco de México solicitará por escrito a dos "casas de corretaje" seleccionadas por el comité de mercado de dinero de la asociación de banqueros de México, A. C., el promedio de las operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día con títulos de deuda con fechas de vencimiento similares. El Banco de México calculará el promedio de las dos tasas obtenidas para determinar la tasa que sustituirá a la tasa de fondeo y la dará a conocer a través de los medios a su disposición. Las características generales de los BREMS se muestran en el cuadro 7.1

Tipo de Instrumento	Bono con cupones de tasa flotante
Emisor	Banco de México
Tipo de Mercado	Mercado de dinero
Mercado donde cotiza	Mercado primario (subastas)
Fuentes de Información	Banxico, *brokers* electrónicos y mesas de operación por vía telefónica, Indeval
Tipo de valor	XA CP (con y sin impuesto)
Valor Nominal	100 pesos
Curva utilizada en la valuación	Curva de sobretasas de BREMS

Cuadro 7.1 Bonos de regulación monetaria.

Los BREMS son colocados mediante una subasta, en la cual los participantes presentan posturas por el monto que desean adquirir y el precio que están dispuestos a pagar. Los posibles participantes en dichas subastas son bancos, casas de bolsa, sociedades de inversión y otras personas expresamente autorizadas (*V.g.* aseguradoras).

Los participantes presentan al Banco Central sus demandas señalando la cantidad y el instrumento solicitado, de manera tal que la adjudicación pueda ser realizada del mayor precio al menor hasta completar la oferta, todo hecho de acuerdo con los principios de subasta múltiple.

Actualmente dichas subastas se llevan a cabo semanalmente los días jueves, pudiendo subastarse títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, es necesario sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente.

La clave de identificación de la emisión de los BREMS está diseñada para que los instrumentos sean fungibles, *i.e.,* indistinguibles entre sí. Lo que implica que BREMS emitidos con anterioridad pueden tener la misma clave de identificación que BREMS emitidos recientemente, siempre y cuando venzan en la misma fecha. La clave está compuesta por ocho caracteres, los dos primeros para identificar el título (XA), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año, mes, día), por ejemplo, un bono con la clave **XA090604**, es un bono que vence el cuatro de junio de 2009.

7.3 Metodología general para valuar un BREM

Un BREM paga una tasa cupón flotante, es decir, la tasa que paga no es constante y está sujeta a cambios de acuerdo con las tasas de fondeo que publica banxico. Para obtener el precio de un BREM se recomienda seguir los siguientes pasos:

(i) Se obtienen las tasas ponderadas de fondeo bancario publicadas por banxico desde el último corte de cupón (o en su caso fecha de inicio) hasta el día hábil anterior de la fecha de valuación.

Para asignar un valor a éstas tasas, en cada uno de los días de valuación, se mantiene constante la última tasa publicada, la cual es la tasa del día hábil anterior al día que se desea conocer el valor del instrumento, esto se puede resumir en:

$$R_i = \begin{cases} \text{tasa de fondeo publicada por el banco central en el día } i & \text{si } i \leq d, \\ \\ \text{tasa de fondeo publicada por el banco central en el día } d-1 & \text{si } i > d. \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, k$, donde:
R_i : Tasa ponderada de fondeo bancario en el día i,
d : Número de días transcurridos del cupón vigente,
k : Número de días del cupón vigente.

(*ii*) Se obtiene la tasa del cupón vigente, a partir de las tasas ponderadas de fondeo bancario del periodo completo asociado dicho cupón de acuerdo a la siguiente expresión

$$R_v = \left[\prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{R_i}{360} \right) - 1 \right] \frac{360}{k}, \tag{7.1}$$

donde R_v es la tasa del cupón vigente, R_i es la tasa ponderada de fondeo bancario y k es el número de días del cupón vigente.

(*iii*) Se calculan los intereses devengados de los días transcurridos, I_d, del cupón vigente, es decir, la diferencia de días entre la fecha de emisión o último pago de intereses (corte de cupón) menos el día de valuación, como

$$I_d = N R_v \frac{d}{360},$$

donde N es el valor nominal del bono.

(*iv*) Se calcula la tasa anual esperada para el siguiente pago de intereses con la siguiente expresión:

$$R_{C_1} = \left[\left(1 + R_v \frac{d}{360} \right) \left(1 + \frac{R_{i-1}}{360} \right)^{28-d} - 1 \right] \frac{360}{28}, \tag{7.2}$$

donde d es el número de días transcurridos del cupón vigente y R_{i-i} es la tasa ponderada de fondeo bancario en el día hábil anterior al día de valuación.

(*v*) Se calcula el cupón actual o vigente

$$C_1 = N R_{C1} \frac{28}{360}. \tag{7.3}$$

(*vi*) Para calcular el valor de los cupones faltantes $i = 2, ..., n$ es necesario obtener la tasa esperada R_e para el pago de intereses, también conocida como la tasa cupón de mercado, ésta se utiliza para los cupones completos pendientes de pago. La tasa, R_e, está dada por

$$R_e = \left[\left(1 + \frac{R_{i-1}}{360} \right)^{28} - 1 \right] \frac{360}{28}, \tag{7.4}$$

donde R_{i-1} es tasa de fondeo bancario en el día hábil anterior al día de valuación.

(*vii*) Con la tasa de interés efectiva, R_e, se calcula el pago de cupones posteriores al cupón vigente, el pago del cupón es calculado como

$$C_i = N R_e \frac{28}{360} \quad \text{para} \quad i = 2, ..., n-1. \tag{7.5}$$

(*viii*) La tasa que se aplica para obtener el valor presente de los flujos es igual a la tasa ponderada de fondeo bancario del día hábil anterior al día de valuación, R_{i-1}, más una sobretasa, s. La designación de la sobretasa de estos instrumentos puede ser por rango (de acuerdo a los cupones o días por vencer que se ofertan en los *brokers* electrónicos) o por instrumento en específico y se toman de acuerdo a los días por vencer de la curva de sobretasas de BREMS.

La tasa de interés efectiva, y, para descontar los flujos está dada por $y = \left[\left(1 + \frac{R_{i-1}+s}{360}\right)^{28} - 1\right]$.

(ix) El precio sucio del BREM se obtiene con la siguiente fórmula

$$\widehat{B}_s = \frac{C_1 + C_i \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y \times (1+y)^{m-1}}\right] + \dfrac{N}{(1+y)^{m-1}}}{(1+y)^{1-d/28}}, \tag{7.7}$$

donde d es el número de días transcurridos del cupón vigente, m es el número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente.

El precio limpio del bono se obtiene restando al precio sucio los intereses devengados al día de valuación del cupón vigente. Cabe aclarar que cuando el día de valuación coincide con algún corte de cupón, el precio sucio $\widehat{B}_s$ es el igual al precio limpio $\widehat{B}_l$, esto es: $\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_d$.

7.4 Ejemplo de valuación de un bono BREM

Considere un BREM emitido el 26 de julio del 2007, que vence el 22 de julio del 2010, suponga que desea calcular el precio limpio, $\widehat{B}_l$, del mismo. La fecha de valuación es el 21 de agosto de 2007 y el bono se comercializa con una sobretasa de 0.04%. Considere las tasas de fondeo bancario del siguiente cuadro

Fecha	Tasa
Lunes, 20 de Agosto de 2007	7.26%
Domingo, 19 de Agosto de 2007	7.25%
Sábado, 18 de Agosto de 2007	7.25%
Viernes, 17 de Agosto de 2007	7.25%
Jueves, 16 de Agosto de 2007	7.26%
Miércoles, 15 de Agosto de 2007	7.25%
Martes, 14 de Agosto de 2007	7.26%
Lunes, 13 de Agosto de 2007	7.26%
Domingo, 12 de Agosto de 2007	7.27%
Sábado, 11 de Agosto de 2007	7.27%
Viernes, 10 de Agosto de 2007	7.27%
Jueves, 09 de Agosto de 2007	7.27%
Miércoles, 08 de Agosto de 2007	7.28%
Martes, 07 de Agosto de 2007	7.29%
Lunes, 06 de Agosto de 2007	7.28%
Domingo, 05 de Agosto de 2007	7.26%
Sábado, 04 de Agosto de 2007	7.26%
Viernes, 03 de Agosto de 2007	7.26%
Jueves, 02 de Agosto de 2007	7.26%
Miércoles, 01 de Agosto de 2007	7.26%
Martes, 31 de Julio de 2007	7.29%
Lunes, 30 de Julio de 2007	7.26%
Domingo, 28 de Julio de 2007	7.25%
Sábado, 28 de Julio de 2007	7.25%
Viernes, 27 de Julio de 2007	7.25%
Jueves, 26 de Julio de 2007	7.25%

Cuadro 7.2 Tasas Ponderadas de Fondeo Bancario.

La tasa del cupón vigente de acuerdo con el cuadro anterior está dada por

$$\begin{aligned} R_v &= \left[\prod_{i=1}^{26}\left(1+\frac{R_i}{360}\right)-1\right]\frac{360}{k} \\ &= 7.280650165\%. \end{aligned}$$

Los días transcurridos se obtienen de la diferencia entre el día de emisión (26/07/2007) y el día de valuación (21/08/2007), lo que implica una diferencia de 26 días. Con esta información se pueden calcular los intereses devengados, los cuales ascienden a:

$$I_d = N R_v \frac{d}{360} = 100 \times 0.07280650165 \times \frac{26}{360} = 0.52582473416.$$

La tasa anual esperada para el siguiente pago de cupones es

$$\begin{aligned} R_{C1} &= \left[\left(1+0.0728\left(\frac{26}{360}\right)\right)\left(1+\frac{0.0726}{360}\right)^{(28-26)}-1\right]\frac{360}{28} \\ &= 0.07281954495\%, \end{aligned}$$

mientras que el valor del cupón vigente es

$$\begin{aligned} C_1 &= N R_{C1}\frac{28}{360} \\ &= 100 \times 0.07281954495 \times \frac{28}{360} \\ &= 0.56637423847. \end{aligned}$$

Ahora se obtiene la tasa esperada R_e para los cupones faltantes

$$\begin{aligned} R_e &= \left[\left(1+\frac{R_{i-1}}{360}\right)^{28}-1\right]\frac{360}{28} \\ &= \left[\left(1+\frac{0.0726}{360}\right)^{28}-1\right]\frac{360}{28} \\ &= 7.2798\%, \end{aligned}$$

lo que arroja un cupón de

$$\begin{aligned} C_i &= N R_e \frac{28}{360} \\ &= 100 \times 0.072798 \times \frac{28}{360} \\ &= 0.566207, \end{aligned}$$

para $i = 2, ..., n-1$. La tasa de interés efectiva y para descontar los flujos es

$$\begin{aligned} y &= \left[\left(1+\frac{R_1+s}{360}\right)^{28}-1\right] \\ &= \left[\left(1+\frac{0.0726+0.0004}{360}\right)^{28}-1\right] \\ &= 0.569335\%. \end{aligned}$$

El número de cupones por liquidar incluyendo el vigente se obtiene de sustraer la fecha de valuación (26/07/2007) de la fecha de vencimiento (22/07/2010), lo que implica un total de 22 cupones. Ahora se calculará el precio sucio del bono, lo que lleva a:

$$
\begin{aligned}
\widehat{B}_s =& \frac{C_1 + C_i\left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y\times(1+y)^{m-1}}\right] + \dfrac{N}{(1+y)^{m-1}}}{(1+y)^{1-d/28}} \\
=& \frac{0.566327 + 0.566207\left[\frac{1}{0.00569335} - \frac{1}{0.00569335\times(1+0.00569335)^{22-1}}\right] + \frac{100}{(1+0.00569335)^{22-1}}}{(1+0.00569335)^{1-26/28}} \\
=& 100.463831.
\end{aligned}
$$

El precio limpio del bono es

$$
\widehat{B}_l = \widehat{B}_s - I_d = 100.463831 - 0.525778 = 99.938053.
$$

7.5 Bibliografía

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BPA182).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés (BPAT).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Protección al Ahorro (BPA's).

Banxico, Notas Técnicas del Banco de México, Bonos de Regulación Monetaria (BREMS).

Fabozzi, F. J. (2006). Fixed income mathematics, McGraw-Hill, New York, 4th. ed.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S. A. de C. V.

7.6 Ejercicios

7.1 Obtenga el precio limpio, $\widehat{B}_l$, de un bono BREM emitido el 2 de febrero del 2006 y que vence el 29 de enero de 2009. La fecha de valuación es el 07 de febrero de 2007 con una sobretasa de 0.06%. Utilice las tasas de fondeo bancario del siguiente cuadro

Fecha	Tasa
06/02/2007	7.26%
05/02/2007	7.25%
04/02/2007	7.25%
03/02/2007	7.25%
02/02/2007	7.26%

7.2 Con los mismos datos del ejercicio anterior obtenga el precio limpio $\widehat{B}_l$ del bono BREM si la sobretasa es del 0.05%.

Capítulo 8

Acciones nacionales e internacionales

Conceptos básicos:

- ✓ Definición
- ✓ Clasificación
- ✓ Modelo de dividendos descontados
- ✓ Modelo de Gordon
- ✓ Valuación de acciones desde un enfoque de Optimización
- ✓ CAPM
- ✓ APT

8.1 Introducción

Desde la "comuna" prehistórica a las modernas sociedades anónimas, los seres humanos hemos creado y practicado muchas formas de organización para producir y repartir los distintos bienes y servicios a los que se tienen acceso. Esta decisión, nunca fácil ni definitiva, ha sido uno de los hitos de la historia.

Producto directo de estas grandes encrucijadas, muchas de las sociedades occidentales han optado por la propiedad privada y el usufructo individualizado de los satisfactores, siendo los títulos de deuda, de capital y los derivados el emblema de esta forma de organización. En este capítulo se analizarán algunas de los métodos de valuación de los títulos de capital, los cuales por su naturaleza aleatoria, al depender de los resultados de las empresas, son difíciles de valuar.

8.2 Definición y tipos de títulos de capital

Se llamará "acción" a una parte proporcional del capital social de una empresa. La acción representa la propiedad que una persona tiene sobre una parte de la firma. Normalmente, salvo algunas excepciones, las acciones son transmisibles libremente y otorgan derechos económicos y de decisión (al interior de la empresa) a su titular, el cual es llamado "accionista". Como inversión, las acciones suponen una instrumento de renta variable, dado que no tiene un retorno fijo establecido por contrato.

La diferencia entre una acción y un título de deuda radica en que la acción implica propiedad de los activos de la empresa, mientras que en el caso de poseer un bono u obligación solamente se es un acreedor de la misma[1], teniendo derecho a la devolución de la deuda con sus intereses.

[1] Aunque con distintos grados de seguridad en la inversión dada la garantía del préstamo. Dando origen a lo que se le conoce como "orden de preeminencia" de los instrumentos.

Mientras que en la acción se es propietario de una parte proporcional de dicha empresa, con mayor riesgo de pérdida de la inversión si el negocio va mal, y mayor margen de ganancia si la firma va bien. Como se mencionó previamente, una acción da a su poseedor derecho para emitir un voto en la junta de accionistas, salvo las acciones que expresamente indican lo contrario.[2]

La junta de accionistas es la máxima instancia de decisión al interior de las empresa, en ella se toman las decisiones estratégicas en el negocio y es la encargada de nombrar un administrador o un Consejo de Administración para la sociedad.

En general, y salvo que existan pactos estatutarios que limiten el control total de una sociedad por un solo accionista[3], es el accionista mayoritario el que controla las decisiones estratégicas de la firma al tener la mayoría absoluta, esto es el 50% más una, del total de acciones en circulación. Sin embargo, en grandes compañías basta con poseer entre el 15% y el 20% del capital para ejercer una influencia decisiva en la dirección de la empresa. Aunque los ordenamientos legales varían de país en país se encuentran características comunes en los lineamientos generales para la constitución, manejo y liquidación de una empresa, entre estos lineamientos se tienen:

(*i*) Acciones sin voto, con derechos económicos pero no de toma de decisión.

(*ii*) Establecimiento de mayorías calificadas para algunas decisiones trascendentes, *V.g.* liquidación de la sociedad, ampliación de capital, fusiones, adquisiciones, etc. En algunos casos, estas son las únicas prerrogativas de voto para los accionistas preferentes.

(*iii*) Limitación del número máximo de votos por persona (física o moral[4]).

Tipos de acciones: La clasificación de las acciones va aparejada con los derechos y obligaciones que poseen, a continuación se enumeran, aunque no de forma exhaustiva, los tipos más comunes de acciones y sus prerrogativas:

(*i*) **Acciones comunes:** Acciones con plenos derechos de voto en la junta de accionistas y últimos en orden de prelación sobre el reparto de los beneficios de la firma.

(*ii*) **Acciones preferentes:** Otorgan a su poseedor prioridad en el pago de dividendos o en caso de la disolución de la empresa, el reembolso del capital. A cambio de estos derechos, se renuncia al derecho a voto en la junta de accionistas (salvo excepciones establecidas por la leyes locales o el acta constitutiva de la empresa). Estas acciones son usadas cuando los dueños originales del negocio necesitan fondos frescos, pero no quieren perder el control del negocio.

(*iii*) **Acciones de voto limitado:** Sólo confieren el derecho a votar en ciertas decisiones de la sociedad, las cuales son determinadas en el acta constitutiva correspondiente, se pueden ver como una variante de las acciones preferentes.

(*iv*) **Acciones convertibles:** Son aquellas acciones a las que se les añade la opción de intercambio por bonos u otro instrumento (opciones de intercambio de activos). Lo más usual es encontrar la posibilidad de convertir bonos a acciones, que por supuesto llevan a una dilución del capital.

(*v*) **Acciones de industria:** Establecen un aporte en trabajo o servicios que se reconocen como acciones en la empresa.

---

[2] Llamadas generalmente acciones preferentes. Estos títulos de capital renuncian al derecho a voto en la junta de accionistas a cambio de preminencia en la repartición de dividendos, los cuales siguen siendo inciertos.

[3] Aunque en la mayor parte de los mercados regulados existen de manera formal leyes que protegen los intereses de los accionistas minoritarios. En general estos intereses son más cuidados por las autoridades en función de la profundidad del mercado en cuestión.

[4] En los mercados modernos es común que empresas o fondos sean dueños de los activos de otras empresas o fondos. En algunos casos constituyendo las llamadas “holdings” que son una forma de integración corporativa.

Estos títulos también pueden clasificarse en nominativas, *i.e.*, especificando su valor en libros, o no nominativas, *i.e.* sólo especificando la parte proporcional que representan de la firma. Es importante hacer notar que algunas acciones son emitidas como forma de pago de dividendos[5].

A continuación se enumeran algunos de los derechos que confieren las acciones a sus tenedores, de nuevo, se especifica al lector que estos pueden cambiar en función a las leyes locales y al acta constitutiva de cada empresa.

Derechos que confieren las acciones:

(*i*) Derecho a percibir ganancias o pérdidas.

(*ii*) Derecho de información acerca del funcionamiento de la sociedad anónima.

(*iii*) Derecho a voz y/o voto en la Junta General de Accionistas.

(*iv*) Derecho a ceder libremente las acciones.

(*v*) Derecho a retiro.

(*vi*) Derecho de opción preferente para la suscripción de nuevas series de acciones o, en su caso, derecho a recibir acciones liberadas.

Los primeros intentos de valuación de acciones surgen de la idea de la empresa como un proyecto con flujos futuros de efectivo esperados (aleatorios), que son repartidos proporcionalmente, de acuerdo a las aportaciones y riesgos incurridos, entre los agentes económicos que hacen posible su existencia. A últimas fechas es que los elegantes modelos estocásticos han hecho su aparición en este tema, haciendo explícita la naturaleza aleatoria del fenómeno, y dando luces sobre la forma en que pueden ser valuados. A continuación se analizarán algunos de los modelos conocidos para valuar las acciones, a saber: el modelo de dividendos descontados, el modelo de Gordon, *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), *Arbitrage Pricing Theory* (APT).

8.3 Modelo de dividendos descontados

Se comenzará con una de las primeras, más intuitivas y simples formas de valuación de acciones, el modelo de dividendos descontados. En este modelo se parte de una serie de flujos futuros ciertos que se reparten a los accionistas cada determinado periodo, los llamados dividendos. Estos deben ser descontados a la tasa correcta[6] en forma de perpetuidad. Para después dividirse entre el número de acciones en el mercado. Esto es:

$$s = \left(\frac{d}{r}\right)\frac{1}{n}, \tag{8.1}$$

donde:

s: Es el precio de la acción en unidades monetarias.

d: Es el monto en unidades monetarias del flujo futuro esperado pagado por la empresa.

r: Es la tasa de descuento aplicable al flujo de efectivo usado.

n: Es el número de acciones en el mercado.

[5] La discusión acerca de la conveniencia de esta práctica puede verse en Venegas-Martínez (2001).

[6] La tasa correcta implica conocer la forma en la que los flujos fueron obtenidos, esto es, conocer la estructura de capital de la empresa, el riesgo asumido (lo que implica hacer uso de CAPM o alguna valuación de riesgo similar) y los conceptos que fueron descontados o agregados al flujo final. Por ejemplo, no se puede valuar un flujo operativo con una WACC (*Weighted Capital Average Cost*) pues esta incluye costos de capital que no han sido descontados de un flujo operativo.

La anterior es una versión muy simplificada de la realidad, y aunque es una excelente primera aproximación, no toma en cuenta detalles como el crecimiento de los dividendos o la depreciación del capital, elementos rescatados por el modelo de Gordon (que se verá a continuación).

El modelo de flujos descontados tampoco toma en cuenta la incertidumbre asociada a los flujos futuros, ni la posibilidad de un cambio en la estructura de capital de la firma (lo que implicaría un movimiento en la tasa de descuento). Tampoco hace referencia alguna al juego de expectativas que se da en el mercado, este fenómeno es parcialmente estudiado por el CAPM.

Como puede verificar el lector con una breve búsqueda en la red, existen una gran cantidad de modelos, con distinto nivel de sofisticación, que intentan explicar o predecir el nivel o el rendimiento de una acción, y aunque no existe el modelo perfecto, es posible encontrar el indicado para propósitos específicos.

8.3.1 El modelo de utilidades descontadas como resultado de un proceso de decisión óptima

Suponga un mercado perfecto y sin gobierno en donde una empresa, ante la ausencia de costos de ajuste, tiene como objetivo maximizar sus utilidades, esto es:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty \left[PF(K,N) - WN - P\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \right] e^{-rt}\mathrm{d}t. \tag{8.2}$$

Esta ecuación supone que la empresa de vida infinita (por eso la integral impropia), que produce siguiendo una función de producción arbitraria, $F(K,N)$, y que está dentro de un mercado competitivo, *i.e.* es precio aceptante. Este último punto se ve reflejado en que la función de precio que recibe por sus productos es una constante.

También se puede ver de la ecuación anterior, que la compañía necesita N trabajadores para producir y que estos reciben un salario de W. Este salario fijo implica un mercado de trabajo en competencia perfecta donde todos los trabajadores son iguales y reciben siempre el mismo salario.

El tercer término representa un pago al capital, en forma de depreciación, el cual se supone lineal. Todo esto es traído a valor presente utilizando, por simplicidad, la tasa libre de riesgo. Observe que la integración por partes del tercer término del integrando de (8.2), conduce a

$$-\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} e^{-rt}\mathrm{d}t = K_0 - \lim_{t\to\infty} Ke^{-rt} - \int_0^\infty rKe^{-rt}\mathrm{d}t. \tag{8.3}$$

Si se supone que $\lim_{t\to\infty} Ke^{-rt} = 0$, esto es que en el largo plazo la depreciación acaba con el capital, entonces el problema de optimización se transforma en

$$\text{Maximizar} \quad PK_0 + \int_0^\infty [PF(K,N) - WN - PrK]\, e^{-rt}\mathrm{d}t, \tag{8.4}$$

el Lagrangeano de este problema de cálculo de variaciones[7] está dado por

$$L(K,N) = F(K,N) - wN - rK, \tag{8.5}$$

las condiciones necesarias, de primer orden, son:

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 0 \;\text{ y }\; \frac{\partial L}{\partial N} = 0. \tag{8.6}$$

[7] Para proceder a la optimización de este problema, es necesario conocer algo de cálculo de variaciones, por lo que se recomienda al lector el libro de Venegas Martinez, Francisco (2006), “Riesgos económicos y financieros”. En todo caso, el lector puede seguir con el curso del libro sin detenerse en esta sección.

Estas condiciones conducen a

$$F_K = r \quad \text{y} \quad F_N = w, \tag{8.7}$$

es decir, el producto marginal de cada factor es igual a su precio (costo marginal) con r y w fijos.

Lo anterior es una condición de primer orden que el lector conoce de los primeros cursos de microeconomía, estas condiciones sólo indican que se comprará una unidad más de cada factor de producción mientras que su aportación a la utilidad sea mayor que su costo, de ahí el nombre de precio sombra. Esto significa que se contratará este factor de producción mientras su beneficio marginal sea positivo.

La ecuación anterior, (8.6), es un sistema simultáneo de dos ecuaciones (en K y N). Las soluciones, K^* y N^*, son las demandas óptimas de capital y trabajo, lo que implica un equilibrio parcial en ambos mercados[8].

Se supone que a la empresa representativa le pertenece el stock de bienes de capital K y que dicho stock es predeterminado en cada instante dado que la ruta óptima ya fue trazada en el proceso de maximización. Se puede también pensar que el capital es completamente especializado para cada empresa, y por lo tanto, no existe la oportunidad de vender, comprar o rentar capital entre empresas. En este caso la empresa resuelve:

$$\text{Maximizar} \quad \int_0^\infty [PF(K,N) - WN]\, e^{-rt}\mathrm{d}t, \tag{8.8}$$

de nuevo se recurre al cálculo de variaciones. El Lagrangeano asociado a este problema es:

$$L(K,N) = F(K,N) - wN, \tag{8.9}$$

y en este caso la condición de primer orden está dada por

$$\frac{\partial L}{\partial N} = 0, \tag{8.10}$$

que representan lo mismo que en el caso anterior. Equivalentemente

$$F_N = w, \tag{8.11}$$

lo cual genera la típica demanda por trabajo. Si la empresa representativa emite acciones para financiar la adquisición de capital nuevo y paga dividendos de la utilidad que obtiene, entonces el valor nominal de las acciones es

$$V = \int_0^\infty [PF(K,N) - WN]\, e^{-rt}\mathrm{d}t. \tag{8.12}$$

Si se supone que los beneficios $PF(K,N) - WN$ permanecen constantes a través del tiempo, entonces esto se puede escribir, vía el teorema de Euler, como

$$V = \frac{PF(K,N) - WN}{r} = \frac{PF_K K}{r}, \tag{8.13}$$

que no es otra cosa, sino el modelo de dividendos descontados visto como resultado de un ejercicio de equilibrio.

[8] Un equilibrio total implica $n-1$ mercados en equilibrio, por lo tanto el n-ésimo lo estará. Este percepto es conocido como ley de Walras e implica equilibrio global.

8.4 Modelo de Gordon

Ahora se perfeccionará el modelo de dividendos descontados tomando en cuenta el posible crecimiento de la empresa. Aquí se pueden tomar distintos factores en cuenta, siempre y cuando resulten en una sola tasa para introducir en el modelo.

Este modelo fue desarrollado por Myron Gordon de la Universidad de Toronto en 1959. En él se supone que el dividendo, D, pagado por la empresa analizada, crece a una tasa, g, que puede ser descontada a la tasa, k. Estos supuestos implican que la empresa en cuestión está pagando dividendos de una forma constante y que estos crecerán a una tasa conocida sin importar que pase en el futuro. La estructura de capital de la empresa en cuestión no cambiará a lo largo del tiempo, lo que conduce a:

$$A = D\left[\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(1+g)^i}{(1+r)^i}\right] = D\frac{1+g}{1+r} + D\frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + \cdots \tag{8.14}$$

que no es otra cosa que un cociente de series infinitas. Para resolverlas, se multiplicarán ambos lados por $(1+g)/(1+r)$. Lo que conduce a:

$$A\left(\frac{1+g}{1+r}\right) = D\frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + D\frac{(1+g)^3}{(1+r)^3} + \cdots \tag{8.15}$$

restando (8.14) a (8.15) se tiene que:

$$A - A\left(\frac{1+g}{1+r}\right) = D\left[\frac{(1+g)}{(1+r)} + \frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + \cdots\right] - D\left[\frac{(1+g)^2}{(1+r)^2} + \frac{(1+g)^3}{(1+r)^3} + \cdots\right]. \tag{8.16}$$

Después de resolver para A, se llega a la expresión del modelo de Gordon que es:

$$A = D\left[\frac{(1+g)}{(r-g)}\right]. \tag{8.17}$$

Como puede notar el lector, el modelo de Gordon no es otra cosa que la solución de un cociente de series infinitas. Para cuya solución se emplea la misma técnica que la usada en cualquier libro de álgebra para una serie de características similares. Este modelo tiene algunos inconvenientes, los cuales deben de tenerse en mente cuando se usa para valuar títulos de capital, entre ellos:

(*i*) Requiere de una tasa de crecimiento de dividendos mayor que la tasa de descuento a la cual es sometida, lo que de alguna forma implica que sólo sobrevivirán negocios rentables, *i.e.,* aquellos cuya tasa de crecimiento sea mayor que su costo. Todo esto, con inconvenientes similares a los de la TIR al estar medido con una sola tasa.

(*ii*) Presenta problemas para acciones que no pagan dividendos, o que no lo hacen de una forma regular, una variable *proxy* comúnmente usada, es usar el cociente de utilidad por acción. Esta solución implica una doble contabilidad de las utilidades, pues usa por un lado la utilidad por acción como *proxy* de los dividendos , que no se pagan para crecer, y por otro lado les asigna una tasa de crecimiento que usa para valuar.

No se mencionan estos inconvenientes para descartar el modelo, sólo para dimensionar sus resultados y dar una perspectiva al lector acerca de las implicaciones del mismo, que por otro lado resulta sencillo e intuitivo.

8.5 Capital Asset Pricing Model

Otro modelo popular para la valuación de activos es el sugerido por Jack Treynor, William Sharpe y John Lintner. Este modelo, llamado CAPM, sugiere que los rendimientos de las acciones guardan una relación, (β), con el premio al riesgo de mercado, $(r_m - r_f)$, y con la tasa libre de riesgo crédito, (r_f), que prevalece en el mercado. En la práctica, esta β es calculada haciendo uso de una regresión lineal por mínimos cuadrados ordinarios,[9] la cual debe de ser realizada con una constante (significativa) para mantener la validez estadística del análisis. Es importante destacar que el trabajo de estos investigadores está basado en las teorías de Harry Markowitz, las cuales serán brevemente descritas a continuación.

El trabajo de Markowitz parte de la idea de buscar un portafolio óptimo para el mercado, partiendo de supuestos como:

1) La distribución normal conjunta de los rendimientos de los activos.
2) Aversión al riesgo de los inversionistas, los cuales prefieren mayor a menor rendimiento dado el mismo riesgo.
3) La única fuente de incertidumbre es la varianza de los activos. Al tener una distribución normal conjunta, la estructura de dependencia de la función de distribución de los rendimientos del portafolio es totalmente descrita por sus dos primeros momentos.
4) Los mercados son fuertemente eficientes, lo que significa información perfecta. Esto implica que los precios de las acciones reflejan toda la información disponible a demás de la inexistencia de costos de transacción y que nadie puede obtener rendimientos en exceso del mercado.
5) No hay oportunidades de arbitraje.

El modelo inicia planteando un problema de optimización estática con restricciones que conlleva a un vector de proporciones óptimas, x_i, para cada activo que se encuentra en el mercado dado el nivel de rendimiento, r_p, que el inversionista desea. A la parábola que describe estas combinaciones de puntos riesgo-rendimiento, (σ, r_p), se le denomina frontera eficiente. De esta manera se plantea el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } \sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}, \\
&\text{s.a.} \\
&\mathrm{E}[r_p] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{E}[r_i] \\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0\,.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

El problema anterior consiste en la minimización de la varianza, σ^2, dado el rendimiento deseado para el portafolio, r_p. La varianza se calcula con base en la la matriz de varianza-covarianza. La suma de los pesos de los activos es la unidad, *i.e.,* se gasta todo el presupuesto del portafolio y los pesos óptimos son positivos. Esta última restricción puede relajarse permitiendo una mayor variedad de combinaciones.

Hasta este punto es donde llega Markowitz en su artículo seminal, la contribución de Sharpe inicia cuando se realiza el mismo ejercicio de optimización tomando en cuenta un activo libre de riesgo crédito. El resultado de este ejercicio es la llamada *security market line* que no es otra cosa que una línea tangente a la frontera eficiente que pasa por el rendimiento del activo libre de riesgo, el cual corta al eje de las ordenadas, y, a la altura de su rendimiento. Recordando la ecuación de la recta, se sabe que una recta está definida de manera unívoca cuando se conoce un

[9] Véase Hayashi (2000).

punto de esta y la pendiente o como es nuestro caso, cuando se conocen dos de los puntos por los que pasa dicha recta. Es a partir de esta recta, que se obtiene el CAPM cuya ecuación es:

$$\mathrm{E}\left[r_i\right] = r_f + \beta\left(\mathrm{E}\left[r_m\right] - r_f\right). \tag{8.19}$$

Tal como se mencionó previamente, el CAPM dice cual será, en promedio, el rendimiento de una acción dado el nivel de riesgo, β, que enfrenta, el premio que el mercado está ofreciendo por ese riesgo, $(r_m - r_f)$, y la tasa libre de riesgo, r_f.

Al construir el modelo, se supone que el premio al riesgo que otorga el mercado, así como el rendimiento del mismo, medidos como promedios aritméticos[10] son estadísticamente representativos del mercado analizado. Aunque no existe un consenso acerca del tamaño de muestra necesaria para que los datos obtenidos de un modelo econométrico sean representativos.

Aún suponiendo que tanto el modelo como los parámetros sean estadísticamente significativos. Se sugiere el uso de pruebas de estabilidad estructural[11] para verificar hasta donde se debe de ampliar la muestra sin perder robustez en los parámetros.[12]

Tal vez el parámetro más importante del modelo es la β, que no es otra cosa más que el cociente de la covarianza entre el mercado y el activo en cuestión y de la varianza del mercado, esto es:

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}\left(r_i, r_m\right)}{\mathrm{Var}\left(r_m\right)}. \tag{8.20}$$

Una vez revisado el concepto de la β, es posible hablar un poco más de la idea subyacente en el CAPM. Siguiendo los supuestos expresados con anterioridad, se está en la posibilidad de decir que en el modelo, el mercado está dispuesto a premiar a los inversionistas en función al riesgo que tomen. Aunque este premio no está dado de forma indiscriminada, pues sólo recompensa de forma necesaria aquellos portafolios que se encuentran a lo largo de la *security market line* (SML)[13], la cual representa el riesgo sistémico o no diversificable del mercado.

El riesgo que el mercado no está dispuesto a premiar es aquel que se adquiere al estar fuera de la *security market line*. La explicación para este comportamiento dentro del modelo es que cualquier punto a la derecha de la frontera eficiente resulta no óptimo al asumir más riesgo del necesario dado el rendimiento obtenido y cualquier punto a la izquierda resulta imposible de alcanzar. Dado que sólo un portafolio es tangente a la SML, cualquier otro portafolio de activos riesgosos (aún combinado con el activo libre de riesgo crédito) resulta ineficiente o inalcanzable, por lo que implica riesgo que el mercado no premiará. Esto es: cualquier otra SML alternativa resulta ineficiente o imposible de alcanzar.

Otro riesgo que el mercado no está dispuesto a recompensar, es aquel que es propio de la empresa, el llamado riesgo idiosincrático. Dentro de este riesgo se puede encontrar el riesgo ocasionado por las decisiones de los directivos, las relaciones dentro de la empresa, las estrategias, etc. Existen algunos teóricos de la administración que dicen que estos puntos son parte de las

[10] La explicación está dada por el uso de esperanzas condicionales. Tal como se comentó al inicio, los parámetros se obtienen a través de mínimos cuadrados ordinarios, los cuales usan esperanzas condicionales de los errores al cuadrado dados los datos de la muestra.

[11] Pruebas de Chow, las cuales son básicamente un cociente de pruebas sobre distribuciones F del modelo restringido y el modelo total. De nuevo se refiere al lector interesado al libro de Econometría de su preferencia.

[12] Para aquellos lectores que no estén completamente familiarizados con la Econometría, es importante puntualizar que los parámetros obtenidos de la regresión son variables aleatorias, al igual que cualquier esperanza condicional, por lo que cambiarán si se cambia la muestra. Si el modelo es suficientemente robusto, existen pruebas econométricas para comprobarlo, estos parámetros no cambiarán mucho ante la entrada o salida de algunos datos.

[13] Esta línea se obtiene una vez que ha encontrado el portafolio óptimo del mercado, indicado en el trabajo de Markowitz, y se ha combinado con el activo libre de riesgo en una proporción tal que se obtenga el rendimiento deseado con el mínimo riesgo dadas las condiciones del mercado.

fortalezas o debilidades de las empresas y que se incluyen dentro del rendimiento que cada firma da a sus inversionistas, aunque el CAPM lo toma como exógeno y por tanto no recompensable por el mercado.[14]

Otro detalle importante del modelo es el nivel de apalancamiento del portafolio a cada punto sobre la SML. Cuando se observa el punto en el que la SML es tangente a la frontera eficiente, se implica que todo el dinero del portafolio está invertido en activos riesgosos, cualquier punto a la izquierda, sobre la SML, implica que se está largo en el portafolio con activos riesgosos y largo (se posee) en el activo libre de riesgo, mientras que cualquier punto a la derecha del punto de tangencia y sobre la SML implica que se está corto en el activo libre de riesgo (se pidió prestado dinero a la tasa libre de riesgo) y largo en el portafolio de activos riesgosos, el cual se financió con el dinero que se solicitó a la tasa libre de riesgo.

Ahora se dará un ejemplo práctico de lo que es el CAPM, este ejemplo se realizará haciendo uso de los rendimientos diarios de las 34 acciones del IPyC (Índice de Precios y Cotizaciones) de la BMV (Bolsa Mexicana de Valores) tomando datos del 22 de mayo de 2006 hasta el 20 de abril de 2007.

El periodo y la periodicidad de la muestra se tomaron de manera discrecional, y el lector puede modificarlo a conveniencia, a condición de no presentar lagunas en los datos y que estos no presenten inconsistencias por pago de dividendos, separaciones u otros eventos significativos para los títulos.

Una vez que se tiene la información necesaria, se procede a obtener los rendimientos por periodo de la muestra. Este procedimiento lleva al lector a obtener una matriz con $n-1$ filas ahora de rendimientos y las mismas m columnas. Si se desea obtener las β's de los activos, se puede agregar una columna de rendimientos, con la misma periodicidad que la muestra (si es diario se necesitan tasas de reportos sobre el instrumento), de la tasa libre de riesgos local, en el caso mexicano son los CETES, para después obtener la matriz de varianza covarianza de los instrumento y a partir de ahí calcular las β's tal y como se indica en la ecuación (8.20). La matriz de varianzas covarianzas puede ser calculada fácilmente usando la aplicación de Excel 2003© que se encuentra en: Herramientas/Análisis de datos/Covarianza (o su equivalente en otro programa o versión).

Después de esto, se coloca una nueva hoja de cálculo con una columna con los nombres de las acciones, los rendimientos promedio (promedios aritméticos de la muestra) y las varianzas de cada activo (la diagonal principal de la matriz de varianza covarianza), así como las ponderaciones de lo que se va a dedicar a cada activo, esta columna será la que se optimiza más tarde usando el *solver*, para después plantear varios puntos de rendimiento deseado.

Para iniciar es necesario imitar al portafolio de mercado, esto es: poner como ponderadores los pesos que cada acción tiene en el índice, y con esto obtener un rendimiento ponderado (por sus participaciones) y una varianza ponderada del portafolio de mercado.

Por último, se selecciona en el *solver* que se desea minimizar la desviación estándar (la raíz cuadrada de la varianza) del portafolio, cambiando la columna de ponderadores del portafolio, sujeto a que no hay ventas en corto (todos los ponderadores son mayores o iguales a cero), que se gasta todo el dinero (la suma de los ponderadores es uno)y a un rendimiento deseado. Este proceso se repite para varios puntos de la frontera eficiente, de los cuales se van almacenando las varianzas de cada uno de los portafolios.

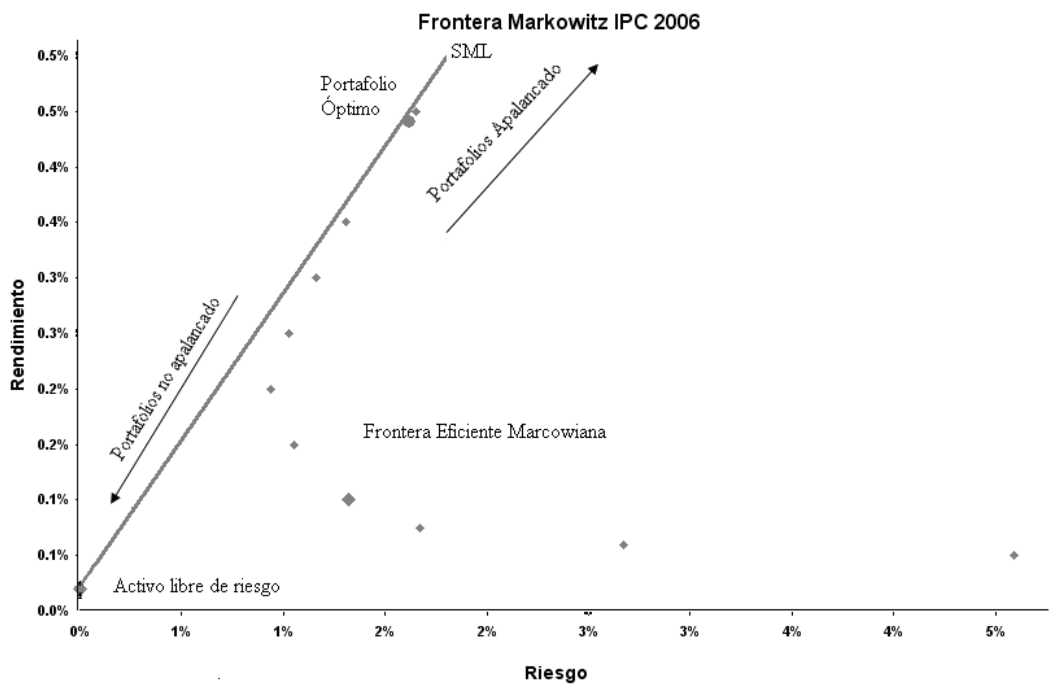
Es importante que en el resumen de rendimientos ponderados y desviaciones estándar, se haga un apartado para una cartera totalmente invertida en el activo libre de riesgo, y otra para la cartera de mercado, la cual es el óptimo según Markowitz si no se toma en cuenta el activo libre de riesgo. La resolución que se tenga de la parábola depende del número de puntos (rendimientos) que se hayan buscado. En el siguiente gráfico se muestra una frontera eficiente (la parábola) con una línea de mercado (la del CAPM) como tangente a esta parábola para el mercado mexicano

[14] De ninguna forma se establece un juicio de valor sobre la teoría de la administración, sólo se hace patente que el modelo no la incorpora para la valuación.

de septiembre de 2006. Este ejercicio se hizo usando los rendimientos de las acciones del IPyC haciendo uso del *solver* de Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Expected Ret.	w	Risk			Varianza P	0.00071565	
2	ALFAA.MX	0.209%	0.00%	0.03%					
3	AMXL.MX	0.197%	0.00%	0.04%					
4	ARA.MX	0.254%	0.00%	0.04%			Des. Est. P	Rend P	Suma w
5	ARCA.MX	0.161%	0.00%	0.02%			2.675%	0.060%	100.0%
6	BIMBOA.MX	0.244%	0.00%	0.03%					
7	CEMEXCPO.MX	0.072%	46.80%	0.04%					
8	CICSAB-1.MX	0.149%	0.00%	0.04%					
9	COMERCIUBC.MX	0.228%	0.00%	0.05%			Des.Est P	Rend. P	
10	ELEKTRA.MX	0.156%	0.00%	0.03%		IPC	1.467%	0.202%	
11	FEMSAUBD.MX	0.120%	0.00%	0.03%		Port Inicial	1.051%	0.150%	
12	GAPB.MX	0.139%	0.00%	0.04%		1	1.030%	0.250%	
13	GCARSOA1.MX	0.280%	0.00%	0.04%		2	1.309%	0.350%	
14	GEOB.MX	0.263%	0.00%	0.05%		3	4.590%	0.050%	
15	GFAMSAA.MX	0.473%	0.00%	0.04%		4	1.320%	0.100%	
16	GFINBURO.MX	0.138%	0.00%	0.03%		5	1.654%	0.450%	
17	GFNORTEO.MX	0.315%	0.00%	0.05%		6	0.940%	0.200%	
18	GMEXICOB.MX	0.328%	0.00%	0.05%		7	1.674%	0.075%	
19	GMODELOC.MX	0.188%	0.00%	0.04%		8	1.618%	0.441%	
20	GRUMAB.MX	0.156%	0.00%	0.03%		9	1.160%	0.300%	
21	HOMEX.MX	0.314%	0.00%	0.05%		10	0.000%	0.020%	
22	ICA.MX	0.146%	0.00%	0.04%		11	2.675%	0.060%	
23	ICHB.MX	0.258%	0.00%	0.04%					
24	IDEALB-1.MX	0.186%	0.00%	0.05%					
25	KIMBERA.MX	0.171%	0.00%	0.03%		Cetes	0.02%		
26	PE&OLES.MX	0.222%	0.00%	0.06%		Indice Sharpe	0.01516004		
27	PINFRA.MX	0.550%	0.00%	0.07%					
28	SAREB.MX	0.231%	0.00%	0.04%					
29	SORIANAB.MX	0.050%	53.20%	0.22%					
30	TELECOMA1.MX	0.328%	0.00%	0.05%					
31	TELMEXL.MX	0.240%	0.00%	0.03%					
32	TLEVISACPO.MX	0.206%	0.00%	0.03%					
33	TVAZTCACPO.MX	0.175%	0.00%	0.03%					
34	URBI.MX	0.283%	0.00%	0.05%					
35	WALMEXV.MX	0.199%	0.00%	0.04%					

Gráfica 8.1 Obtención de la frontera eficiente Markoviana y SML para el mercado mexicano en 2006.



Gráfica 8.2 Frontera eficiente Markowiana y SML para el mercado Mexicano en 2006.

CAPM predice los movimientos en los rendimientos de los activos comparando su posición actual con la teórica. Si el rendimiento de un activo se encuentra por arriba de la SML, su rendimiento es mayor que el esperado, por lo que se dice que está subvaluado, esto implica que el precio actual del activo es menor de lo que debería de ser, por lo que se espera que se aprecie (aumente su precio) en el corto plazo, generando un rendimiento mayor que lo que se esperaría según el modelo.

Por el otro lado, si el rendimiento de un activo se encuentra por debajo de la SML, se dice que está sobrevaluado, pues el precio del activo está por encima de lo esperado, por lo que se estima que en el futuro su precio caerá, generando con ello un rendimiento menor al predicho por el modelo.

Un punto importante y que puede ayudar a aclarar los párrafos anteriores es el notar que en el modelo se hace referencia a los rendimientos de los activos y que al hablar de sobrevaluación o subvaluación, se habla de los precios de los activos. Lo que implica una relación inversa, esta se explica por la forma en que se obtienen los rendimientos, con un cociente, lo que genera relaciones inversas.[15]

Aunque el CAPM es un modelo elegante y de resultados fáciles de aplicar, también tiene algunos inconvenientes producto de los supuestos sobre los cuales se desarrolla. Éstos bemoles se han de tomar en cuenta cuando se haga uso del modelo, entre ellos está la distribución conjunta normal de los activos, heredada de Markowitz, la cual no refleja la verdadera distribución de los activos dentro del mercado (en general son leptokúrticos y presentan colas pesadas.[16])

Otro posible defecto del modelo es que no toma en cuenta ningún otro factor para predecir el rendimiento de los activos, aunque el inconveniente será tomado en consideración para el desarrollo del "Arbitrage Pricing Theory" (APT) que se tocará brevemente en el siguiente subtema. Este punto puede tener algunas implicaciones econométricas más o menos serias, pues implica que existe al menos una variable significativa para el modelo que no fue incluida, sesgando con ello los parámetros que si se han calculado (el problema de la variable omitida). Esta consideración puede poner en duda la validez estadística de los parámetros obtenidos para la estimación del CAPM, pero se deja a consideración del usuario este problema.

Otro aspecto de índole práctica a tomar en cuenta, es la necesidad de datos de mercado para poder realizar las estimaciones, al menos 30 datos para suponer que se cumple el teorema del Límite Central si se desea hacer una aproximación econométrica, lo cual no siempre es posible, pues en ocasiones se desea valuar acciones de empresas que permanecen fuera de bolsa. La solución más común para este problema es buscar una empresa similar, dentro del mismo mercado, que si cotice en bolsa, calcular su rendimiento, y después usar la tasa resultante como factor de descuento para la acción que se desea valuar.

Sólo resta decir que el modelo de CAPM implica que a mayor diversificación, se va reduciendo el riesgo del portafolio, hasta que se logra una diversificación perfecta, $\beta = 1$, cuando se replica al portafolio de mercado. Más allá de este punto, al que se llega de forma asintótica, sólo permanece el riesgo sistémico del mercado.

---

[15] En este punto se hace un breve paréntesis para comentar que el trabajo de Lintner es similar a lo anteriormente expuesto, sólo que el da precio a las acciones viéndolo desde el punto de vista de una empresa que está emitiendo capital.

[16] Leptokúrtico significa que la distribución presenta una kurtosis mayor a tres, lo que implica una distribución mas "puntiaguda" que la distribución normal. Por otro lado, se define como una distribución con colas pesadas a aquella que presenta alguno de sus momentos como infinito, esto implica que asigna posibilidades altas a eventos extremos. Para mayor detalle por favor consulte el texto de Estadística de su preferencia.

8.6 Arbitrage Pricing Theory

Una vez visto el CAPM, el lector puede preguntarse si es el premio al mercado el único determinante del rendimiento de un activo. En primera instancia se puede pensar que el mercado absorbe todos los movimientos de la economía tales como cambios inesperados en el Producto Interno Bruto, cambios inesperados en la tasa de interés o en el tipo de cambio, pero dada la naturaleza del modelo, es creíble suponer que estos cambios van reflejándose de forma gradual en el premio de mercado (hay que recordar que es un promedio de más de treinta datos) por lo que el modelo puede no responder con suficiente rapidez a cambios en la realidad.

Siguiendo esta línea de pensamiento, el economista Stephen Ross (1976) publicó el modelo denominado *Arbitrage Pricing Theory* (APT). Este modelo dice que el rendimiento esperado del activo está dado por su sensibilidad a varios factores macroeconómicos o de mercado que pueden cambiar de tiempo en tiempo y entre mercados (lo que lo vuelve un modelo empírico). En general el modelo está dado por:

$$r_i = r_f + \beta_1 F_1 + \cdots + \beta_n F_n + \varepsilon, \tag{8.21}$$

el cual no es otra cosa sino una regresión ortogonal de varios factores, a causa de tecnicismos econométricos, deben de existir en el modelo más activos que factores[17]. Se requiere de una regresión ortogonal para aislar el efecto neto que cada factor económico[18], F_i, tiene sobre el rendimiento del activo en cuestión, r_i. Como bien puede suponer el lector, el intercepto de esta recta es la tasa libre de riesgo, r_f, y el término de error es una variable aleatoria normal de media cero y varianza uno, $\varepsilon \sim N(0,1)$.

A continuación se enumeran los supuestos que subyacen detrás del APT, como puede observar el lector, son bastante menos restrictivos que los del CAPM:

- Existe un gran número de activos en el mercado.
- Los inversionistas tienen expectativas homogéneas.
- Existe competencia perfecta en el mercado.
- No existen costos de transacción.
- Las innovaciones de los activos se distribuyen siguiendo una distribución conjunta normal.

En el modelo, el arbitraje se realiza sobre el rendimiento esperado del activo, se subraya que se habla de valores esperados (promedios), no de realizaciones particulares. Suponga que el inversionista encuentra un activo mal valuado, en este caso, necesita de un portafolio con n activos correctamente valuados, con los cuales replicará las exposiciones del activo mal valuado a cada uno de los factores de riesgo estimados en el modelo (las sensibilidades son dadas por las β's), esta replicación no es otra cosa que la obtención de un portafolio linealmente dependiente, cuyas proporciones serán determinadas usando álgebra lineal al crear el activo sintético.

Una vez que se tiene este portafolio, se analiza el activo. Si según el modelo este presenta un rendimiento menor al correcto, el inversionista compra el activo en cuestión y vende el portafolio que lo replica. En caso contrario, cuando el rendimiento es mayor al esperado por el modelo, el inversionista debe de vender el activo y con ese dinero, comprar el portafolio replicante. Lo que implica que aunque se está en una posición neutral a los factores de riesgo (al sumar la exposición del activo y del portafolio estas deben sumar cero), se puede esperar, en promedio, una ganancia libre de riesgo. Según el propio Ross, los primeros factores a considerar en un modelo de APT, son:

---

[17] Para evitar que la matriz $\left(X^T X\right)^{-1}$ se vuelva singular y resulte imposible el invertirla. Recuerde que el vector de coeficientes se obtienen como $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$.

[18] De nuevo se recomienda al lector revisar el texto "Econometrics" de Fumio Hayashi para repasar el concepto de regresión ortogonal. Básicamente se trata de separar los efectos de cada regresor en la variable explicada. Esto se logra buscando la mínima distancia perpendicular entre el regresor y la variable explicada en un hiperplano.

- Inflaciones no esperadas
- Cambios no esperados en el PIB o algún índice industrial
- Incumplimientos de empresas en el ramo o de gran tamaño
- Cambios sorpresivos en la tasa libre de riesgo, el índice de mercado o el tipo de cambio.
- Cambios en los precios o rendimientos de algunos "commodities" tales como el crudo, el oro u otro importante para cada mercado en particular.

Como se dijo previamente, cada inversionista deberá de calibrar regularmente sus factores de riesgo, pues este es un modelo empírico. El lector puede notar que el APT es una generalización del CAPM, pero que no tiene tantas limitaciones, pues no necesita que los activos sigan una distribución normal conjunta, lo único que se pide es que las innovaciones, ϵ sigan una distribución normal.

8.7 Acciones nacionales

En la práctica las acciones son valuadas al precio que se registra en los mercados, aunque teóricamente, éste no es predecible. Cuando la acción tiene varias series o se cotiza en distintos mercados, como es el caso de los ADR's[19] se sigue el procedimiento descrito en el cuadro 8.1 y en la siguiente subsección para obtener su valor del mercado:

Tipo de instrumento:	Acciones
Emisor:	La emisora correspondiente a la acción
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	Bolsa Mexicana de Valores (BMV)
Fuentes de información:	BMV, INDEVAL y emisoras

Cuadro 8.1 Características generales.

Caso 1. Acciones que operaron en los últimos 40 días hábiles: El precio de valuación es igual al último precio de cierre registrado en la BMV. Por lo tanto, cuando la emisora opera en el día de valuación, se utiliza el precio de cierre de ese día.

Caso 2. Acciones que se encuentran relacionadas con ADR's, CPO, unidades vinculadas u otra serie de la misma emisora: Si la acción registró algún precio de cierre en los últimos 40 días hábiles y no se tiene una operación más reciente de un ADR, CPO, unidad vinculada u otra serie de la misma emisión, entonces el precio de valuación es igual al último precio de cierre registrado. En caso contrario, se utilizan los siguientes criterios:

Proceso	Fórmula
1. Si las emisoras cotizan en el extranjero (acciones o programas de ADRs), el precio de valuación es igual al precio del ADR entre el número de acciones que lo integran, multiplicado por el tipo de cambio FIX publicado por Banxico en la fecha de valuación.	F-1
2. En los casos en que existan series accionarias relacionadas a un CPO o a una unidad vinculada, el precio de valuación será el resultado de dividir el precio del CPO o unidad vinculada entre el número de acciones del CPO o unidad vinculada.	F-2

Cuadro 8.2 Procesos para valuar acciones con ADR's con sólo una serie o ambas son bursátiles.

[19] *American Depositary Receipts* son el vehículo legal a través del cual acciones extranjeras pueden cotizar en los mercados de los Estados Unidos de Norte América. Básicamente se toma una cantidad de acciones extranjeras y se les coloca en posesión de la Security Exchange Comission, la cual verifica que estas empresas extranjeras cumplan con todas las disposiciones contables y legales exigibles a las empresas que cotizan en las Bolsas de los Estados Unidos.

La ecuación para la valuación, F-1, es:

$$P = \frac{P_A}{N_A} e, \tag{8.22}$$

donde:

P : precio de valuación,

P_A : precio de cierre del ADR del mercado donde cotiza,

N_A : número de acciones que integran el ADR,

e : tipo de cambio FIX peso/dólar publicado por Banxico en el día de valuación.

Por otro lado, la ecuación de valuación F-2 es:

$$P = \frac{P_U}{N_U}, \tag{8.23}$$

donde:

P : precio de valuación,

P_U : precio de cierre del CPO o de la unidad vinculada,

N_U : número de las acciones en el CPO o unidad vinculada.

Si la emisión tiene más de una serie, siendo la que se desea valuar una de las menos bursátiles, se siguen los siguientes criterios:

Si la serie nunca ha operado o está suspendida, pero tiene mayores derechos corporativos (series de control) que la serie más bursátil. El precio de valuación será igual al último precio de cierre de la serie más bursátil.

Proceso	Fórmula
Si la serie que se desea valuar no ha operado en los últimos 40 días hábiles, pero se cuenta con la información de otra serie más bursátil de la misma emisión. Al último precio de cierre registrado se le aplica el rendimiento de la serie más bursátil, siempre y cuando éste registre un cambio significativo. Se considera que el cambio del rendimiento de la serie más bursátil al día de valuación es significativo, si es mayor que su rendimiento promedio más una desviación estándar o es menor que su rendimiento diario promedio menos una desviación estándar.	F-3

Cuadro 8.3 Procesos para valuar acciones con ADR's con sólo una serie o con alguna serie poco bursátil.

A continuación se expondrá la ecuación de valuación F-3 usada en el caso descrito en el cuadro anterior:

Primero se calcula el rendimiento diario de la serie más bursátil (serie j) al día de valuación, el cual está dado por:

$$r(P_{j,t}) = \frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1, \tag{8.24}$$

donde: $P_{j,t}$: Precio de cierre correspondiente a la serie j al tiempo de valuación t.

$r(P_j,t)$: Rendimiento del precio de la serie j al día de valuación t.

Después se calcula el promedio y la desviación estándar de los rendimientos de la serie más bursátil, utilizando una muestra de 182 observaciones.

$$\begin{aligned} \overline{r(P_j)} &= \frac{\sum_{k=1}^{182} r(P_{j,t+1-k})}{m}, \\ \sigma_{r(P_j)} &= \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{182}\left(r(P_j,t+1-k)-\overline{r(P_j)}\right)^2}{181}}, \end{aligned} \tag{8.25}$$

donde:

$\overline{r(P_j)}$: Rendimiento promedio de la serie j,

$r(P_{j,t+1-k})$: Rendimiento de la serie j al día "$t+1-k$" (nótese que cuando $k=1$, se obtiene el rendimiento del día de valuación),

$\sigma_{r(P_j)}$: Desviación estándar de la serie j.

Es importante hacer notar que para calcular los 182 rendimientos, es necesario contar con 183 de precios de la serie j. El precio de valuación, dado por lo que se llamará la fórmula F-3, se determina por:

$$P_V = \begin{cases} P*[1+r(P_j,t)] & \text{Si}, r(P_j,t) > \overline{r(P_j)}+\sigma_{r(P_j)} \text{ o } r(P_j,t) < \overline{r(P_j)}-\sigma_{r(P_j)} \\ P & \text{En otro caso} \end{cases}$$

donde:

P_V : precio de valuación,

P : último precio de cierre registrado de la serie menos bursátil (la serie que se desea valuar),

$r(P_j,t)$: rendimiento del precio de la serie j al día de valuación t,

$\overline{r(P_j)}$: rendimiento promedio de la serie j (la serie más bursátil),

$\sigma_{r(P_j)}$: desviación estándar de la serie j (la serie más bursátil).

Caso 3. Acciones que no operaron en los últimos 40 días hábiles y no se encuentran relacionadas con otro tipo de instrumentos:

Si la acción no se encuentra suspendida en la BMV, se siguen los siguientes criterios:

Si la emisora es de baja, mínima o nula bursatilidad, el precio de valuación será el mínimo entre su último precio de cierre y su valor en libros. En caso de presentar un valor contable negativo, el precio de valuación será igual a una millonésima (0.000001), si la emisora es de media o alta bursatilidad, el precio de valuación será el último precio de cierre.

Caso 4. Acciones suspendidas de cotización en la BMV: Cuando la emisora tiene 20 días hábiles o menos de estar suspendida, se tienen dos casos:

1. Si la emisora es de baja, mínima o nula bursatilidad, su precio será el mínimo entre su último precio de cierre y su valor en libros. En caso de presentar un valor contable negativo, el precio de valuación será igual a una millonésima (0.000001).
2. Si la emisora es de alta o media bursatilidad, su precio será el último precio de cierre.

Cuando la emisora tiene más de 20 días hábiles de estar suspendida, se sugiere que:

Si la emisora está reportando información financiera a la BMV, el precio de valuación será igual al 50% del valor mínimo entre: (a) el último precio de cierre, (b) el valor en libros o (c) el múltiplo del sector por el valor en libros. Si la emisora no está reportando información financiera, el precio de valuación será igual al mínimo entre una millonésima y su valor en libros. En caso de presentar un valor contable negativo, su precio de valuación será igual a una millonésima (0.000001).

Caso 5. Acciones de emisoras que nunca han operado: En el caso en que existan series accionarias que no hayan registrado operación en bolsa desde su inscripción, se valuará conforme a los siguientes criterios:

1. Si las series accionarias tienen unidades vinculadas, el precio se determinará con el precio unitario por acción (ver F-2).
2. Si la emisora no cuenta con unidades vinculadas, su precio de valuación será igual al 50% del valor mínimo entre: (a) el valor en libros, (b) el múltiplo del sector por el valor en libros o (c) el último precio de cierre de la serie más bursátil, siempre y cuando ésta sea de la misma emisora. Si el valor en libros es menor a cero, se toma como precio de valuación una millonésima (0.000001).

Ajuste de Derechos y/o OfertasPúblicas: Si la emisora realizó algún ajuste por derechos decretados que afecten la estructura accionaria o de capital (de conformidad con el manual de derechos corporativos y patrimoniales de la BMV) el precio de valuación será ajustado en la misma proporción, exceptuando el caso de que la emisora haya operado el mismo día de valuación.

En caso de que la emisora lleve a cabo una oferta pública de compra de las acciones representativas de su capital social en circulación, y que su finalidad sea la cancelación de la inscripción en el registro nacional de valores e intermediarios y en la Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V. , el precio de valuación se determinará con base en la información publicada por la emisora, considerando como precio de valuación el precio de compra de la oferta pública siempre y cuando la emisora no registre operaciones en sus series el día de valuación.

8.8 Acciones ligadas a títulos referenciados a acciones (NAFTRAC)

A continuación se hace un breve repaso de la forma en que se obtienen los valores de mercado de los títulos referenciados a acciones (NAFTRAC). Para ello, se hará una breve descripción de lo que es este instrumento.

Los NAFTRAC son instrumentos emitidos por Nacional Financiera (Nafinsa) desde abril del 2002 y promovidos en las distintas casas de bolsa localizadas en México. Su objetivo es reproducir el comportamiento del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPyC) y facilitar a pequeños inversionistas el acceso a inversiones en bolsa de valores (proveyendo liquidez con ello). Entre las principales ventajas del Naftrac están la diversificación, indexación, transparencia y liquidez, oportunidad de arbitraje, menores costos operativos, y un amplio mercado secundario.

En esencia, un NAFTRAC es un certificados de participación ordinaria no amortizable, el cual confiere a su tenedor el derecho a una parte alícuota de un portafolio de acciones fideicomitidas. El siguiente cuadro presenta las principales características de este instrumento:

Tipo de instrumento:	Títulos referenciados
Emisor:	Instituciones financieras
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	Bolsa Mexicana de Valores (BMV)
Fuentes de información:	BMV, INDEVAL y emisoras

Cuadro 8.4 Características generales de los NAFTRAC.

8.8.1 Proceso de valuación

Actualmente, sólo se cuenta con el título referenciado "NAFTRAC" emitido por Nacional Financiera, pero esto no excluye la posibilidad de incorporar otros títulos posteriormente.

Caso 1. Si el título referenciado operó en los últimos 40 días hábiles: El precio de valuación es igual al último precio de cierre registrado en la BMV.

Caso 2. Si el título referenciado no operó en los últimos 40 días hábiles: El precio de valuación es igual al precio teórico del día hábil anterior a la fecha de valuación reportado a la BMV por el emisor.

Ajuste de Derechos y/o Ofertas Públicas: Si la emisora realizó algún ajuste por derechos decretados que afecten la estructura accionaria o de capital (de conformidad con el manual de derechos corporativos y patrimoniales de la BMV) el precio de valuación será ajustado en la misma proporción. A excepción de que la emisora haya operado el mismo día de valuación.

En caso de que la emisora lleve a cabo una oferta pública de compra de las acciones representativas de su capital social en circulación, y que su finalidad sea la cancelación de la inscripción en el Registro nacional de valores e intermediarios (Indeval) y en la Bolsa Mexicana de Valores, S. A. de C. V. , el precio de valuación como el precio de valuación se determinará con base en la información publicada por la emisora, considerando como precio de compra de la oferta pública, siempre y cuando la emisora no registre operaciones en sus series el día de valuación.

8.9 Acciones de sociedades de inversión

Ahora se procederá a dar un breve repaso de la forma en que se obtienen los valores de mercado de la sociedades de inversión. Como es costumbre, primero se hará una breve descripción de lo que son estos entes jurídicos.

Una sociedad de inversión tiene por objeto la adquisición y venta de activos objeto de inversión. Estos objetivos son estipulados en su acta constitutiva, pudiendo ser enfocados a un tipo de activos en especial o teniendo la posibilidad de invertir en varios tipos de ellos. Los recursos con los que operan son provenientes de la colocación de las acciones entre el público inversionista y son representativas de su capital social.

Dependiendo de la legislación local[20], las sociedades de inversión son clasificadas en función a los tipos de instrumentos que manejan, pudiendo ser: sociedades de renta variable (también conocidas como comunes), sociedades de instrumentos de deuda, sociedades de inversión de capitales y sociedades de inversión de objeto limitado por mencionar algunas. En el siguiente

[20] En el caso mexicano, son regidas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), teniendo como marco legal principal la "Ley de sociedades de inversión".

cuadro se hace un breve resumen de las características generales de estos instrumentos:

Tipo de instrumento:	Acciones
Emisor:	La emisora correspondiente a la acción
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	BMV y en forma privada para algunos casos de SINCAS
Fuentes de información:	BMV, INDEVAL, emisoras y SINCAS
	Acciones de sociedades de inversión de instrumentos de Deuda
	Acciones de sociedades de inversión común
Tipo de valor:	Acciones de sociedades de inversión de capitales (SINCAS)
	Acciones de sociedades de inversión especializadas en Fondos para el retiro

Cuadro 8.5 Características generales de las sociedades de inversión.

8.9.1 Proceso de valuación

La metodología de valuación para acciones de sociedades de inversión es la misma para todos los tipos de valor a excepción de las SINCAS.

Caso 1. Acciones de sociedades de inversión de instrumentos de deuda, común y especializadas en fondos para el retiro: El precio de valuación es igual al precio de cierre de la BMV al día de valuación.

Caso 2. Acciones de sociedades de inversión de capitales: En este caso, se consideran los siguientes criterios:

Cuando la SINCA cotiza en la BMV: El precio de valuación es igual al último precio de cierre, por lo tanto, si la SINCA opera en el día de valuación se toma el precio de cierre de ese día.

Cuando la SINCA no cotiza en la BMV: Se determina el precio de valuación de la SINCA con base en el activo neto de la sociedad y el número de acciones en circulación. Para la determinación del activo neto de la sociedad de inversión, el valor de la cartera de valores a la fecha de valuación se obtiene de la siguiente manera:

- Los instrumentos registrados por la sociedad como títulos para negociar, son valuados al precio de mercado con el vector de precios correspondiente a la fecha de los estados financieros de la sociedad de inversión.
- Las inversiones en acciones de empresas promovidas son valuadas conforme al método de participación, conforme a los principios de contabilidad generalmente aceptados del país en cuestión.

La ecuación para valuar los instrumentos que caen en el segundo caso es

$$P = \frac{A}{A_c}, \tag{8.26}$$

donde:

P : precio de valuación,

A : activo neto de la sociedad de inversión,

A_c : número de acciones en circulación de la sociedad de inversión.

Ajuste de derechos y/o ofertas públicas: En ambos casos, si la emisora realizó algún ajuste por derechos decretados, que afecten la estructura accionaria o de capital, el precio de valuación se ajusta en la misma proporción.

8.10 Acciones no susceptibles de negociación en bolsa

Aunque la razón principal de la existencia de los mercados financieros, es la de comprar y vender títulos de capital entre distintos agentes económicos, pueden existir casos en que se detiene el comercio de acciones, *V.g.* una suspensión ordenada por un juez por un litigio o la prohibición explícita de las autoridades locales. En ese caso queda excluido el mecanismo de oferta y demanda como medio de valuación de estos activos, por lo que en el mejor de los casos, queda el método contable para valuar el título, esto es:

- Su precio de valuación es igual al valor mínimo que resulte de comparar el valor en libros y el valor en libros por el múltiplo del sector.[21]

En caso de que la empresa no reporte información financiera alguna, el precio será dado de manera arbitraria como de una millonésima (0.000001) de la unidad monetaria local.

8.11 Acciones internacionales

Hace casi veinte años que inició un proceso de liberalización de los mercados globales, un proceso que aunque ha integrado los mercados financieros y ha hecho accesible la liquidez de algunos mercados a otros donde el financiamiento era escaso, también ha vuelto susceptibles de contagios exteriores a mercados que hasta hace unas décadas eran independientes.

México no es la excepción a este fenómeno integrador, en 1988 iniciaron las reformas que permitían a las personas físicas y morales extranjeras comprar acciones nacionales, y que por otro lado, permitían a los inversionistas nacionales acceder a títulos de otros países. Esta posibilidad plantea un problema logístico para mantener un registro de la propiedad de estos títulos. Como respuesta a esta problemática es que nace el Sistema Internacional de Cotizaciones, SIC. Este es el mecanismo a través del cual son operados instrumentos que no fueron ofertados públicamente en México y que tampoco fueron inscritos en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios (RNVI), pero que están listados en mercado de valores reconocidos por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores(CNBV)[22].

Actualmente en el mercado mexicano, dada su cercanía con los Estados Unidos, se cotizan índices y opciones sobre índices de los mercados de ese país. En particular las cotizadas en NYSE[23] y NASDAQ.[24] Siendo las fuentes de información la BMV, Bloomberg y el INDEVAL. Las acciones estadounidenses son cotizadas con un tipo de cambio FIX y *spot*[25] respectivamente.

---

[21] Promedio de precios del sector divido por el promedio valor en libros del sector.

[22] Esto para el caso mexicano, aunque es altamente probable que en cada país existan instituciones similares. La CNBV es un organismo público que regula el sistema bancario mexicano, mientras que el RNVI es un listado que mantiene la CNBV e integrada por 3 secciones, a saber: valores, intermediarios y la especial, siendo negociables sólo los primeros dos.

[23] New York Stock Exchange.

[24] National Association of Securities Dealer Automated.

[25] En el mercado bursátil cotización al momento, en el instante de la transacción.

En el siguiente cuadro se resumen las características de este tipo de acciones

Tipo de instrumento:	Acciones
Emisor:	La emisora correspondiente a la acción.
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	BMV, NYSE Y NASDAQ
Fuentes de información:	BMV, INDEVAL, emisoras y Bloomberg custodio de los valores ante el INDEVAL
Tipo de valor:	Acciones cotizadas en el SIC, con tipo de cambio FIX y *spot*, respectivamente

Cuadro 8.6 Características generales de las acciones cotizadas en el SIC.

8.11.1 Proceso de valuación

Caso 1. Acciones que operaron el día de valuación en el mercado principal

El precio de valuación para este tipo de valor es igual al precio de cierre registrado en el mercado principal multiplicado por el tipo de cambio FIX, publicado por Banxico el día de valuación, esto es:

$$P = (P_e)e, \tag{8.27}$$

donde:

P : Precio de valuación.

P_e : Precio de cierre en el mercado principal al día de valuación.

e : Tipo de cambio FIX o *spot*, según sea el caso dependiendo del tiempo de entrega y el mercado, peso/dólar, publicado por Banxico al día de valuación.

Caso 2. Acciones que no operaron el día de valuación en el mercado principal

En caso de que la emisora no opere en el mercado principal, el precio de valuación es igual al último precio de cierre registrado en este mercado, multiplicado por el tipo de cambio FIX o *spot* según sea el caso.

Caso 3. Ajuste de Derechos y/o Ofertas Públicas

Si la emisora realizó algún ajuste por derechos decretados que afecten la estructura accionaria o de capital, el precio de valuación será el precio ajustado considerado en el precio de cierre obtenido de la fuente de información.

8.12 Acciones extranjeras

Como parte del mismo proceso de apertura, es posible que inversionistas locales mantengan dentro de sus portafolios acciones extranjeras, no necesariamente cotizadas en dólares, que no se encuentran inscritas en el SIC. En estos casos es necesario recurrir a los proveedores de información internacionales, *V.g.* Reuters, o en última instancia a la empresa emisora misma. En el siguiente cuadro se muestran las características generales de este tipo de acciones:

Tipo de instrumento:	Acciones
Emisor:	La emisora correspondiente a la acción
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	BMV, NYSE, AMEX (American Stock Exchange) Y NASDAQ
Fuentes de información: Tipo de valor:	BMV, INDEVAL, emisoras y Bloomberg acciones extranjeras, con tipo de cambio FIX y *spot*, respectivamente

Cuadro 8.7 Características generales de las acciones extranjeras.

8.12.1 Proceso de valuación

Caso 1. Acciones extranjeras que cotizan en la BMV: El precio de valuación se tomará de conformidad con los criterios establecidos en la sección de Acciones Nacionales.

Caso 2. Acciones extranjeras que no cotizan en la BMV: En este caso se siguen los siguientes criterios:

1. La emisora cotiza en *Pink sheets*: Para el caso de emisoras que operan en dólares, el precio de valuación mercado, es igual al precio de cierre registrado en el principal multiplicado por el tipo de cambio FIX o *spot* (según sea el caso), publicado por Banxico el día de valuación.
2. Para emisoras que operan en otras monedas, se realiza la conversión del tipo de cambio promedio frente al dólar y se multiplica por el tipo de cambio FIX o *spot* (según sea el caso), publicado por Banxico el día de valuación.

Caso 3: Ajuste de Derechos y/o Ofertas Públicas: Si la emisora realizó algún ajuste por derechos decretados que afecten la estructura accionaria o de capital en el mercado de origen, el precio de valuación será el precio ajustado considerado en el precio de cierre del mercado de origen obtenido de nuestra fuente de información.

8.13 American depositary receipts (ADR'S)

Creados al final del periodo de bonanza de las bolsas norteamericanas en los felices 20s, los ADR's son títulos físicos que respaldan el depósito en un banco norteamericano de acciones de compañías constituidas fuera de los Estados Unidos, estas acciones reciben el nombre de ADS (*American Depositary Share*). Esto se hace para poder comerciar las acciones de la compañía como si fueran títulos locales.

La explosión de colocaciones de ADR's inicia con la liberalización de mercados de la década de los 80's, aunque el primer ADR latinoamericano fue colocado hasta 1990 por la compañía telefónica de Chile.

El proceso de colocación inicia con la suscripción de un contrato con un agente colocador (*underwriting*), el cual garantiza la suscripción de la emisión en función al tipo de contrato firmado pudiendo ir desde la garantía de comprar la emisión si esta no se vende, a ofrecerlo a sus clientes o tan sólo ofrecerlo a mercado sin responsabilidad alguna. Una vez realizada la colocación, el banco depositario emite los ADR, los cuales son adquiridos por los inversionistas.

El banco colocador es el titular, a nombre de los inversionistas, de las acciones, pudiendo también convertirse en el banco custodio si es que mantiene estos títulos físicos. El inversionista puede negociar estos instrumentos en la bolsa de los Estados Unidos o convertirlos en las acciones que representan y negociarlos en la bolsa del país emisor(*flowback*). Si es el propio inversionista el que toma las acciones en el mercado del emisor y los convierte en ADR's, se dice que está realizando un *inflow*. El siguiente cuadro resume las características generales de los ADR's.

Tipo de instrumento:	Recibos americanos de depósito
Emisor:	La emisora correspondiente
Tipo de Mercado:	Mercado de capitales
Mercado donde cotiza:	NYSE, AMEX Y NASDAQ
Fuentes de información: Tipo de valor:	BMV, emisoras y Bloomberg YY ADR's con tipo de cambio FIX YYSP ADR's con tipo de cambio *spot*

Cuadro 8.8 Características generales de los ADR's.

8.13.1 Proceso de valuación

El precio de valuación es igual al precio de cierre registrado en el mercado de origen multiplicado por el tipo de cambio FIX, publicado por Banxico en el día de valuación, o por el tipo de cambio *spot* en el día de valuación.

$$P_v = P_c(e), \tag{8.28}$$

donde:

P_v : precio de valuación,

P_c : precio de Cierre en el mercado principal al día de valuación,

e : tipo de cambio peso/dólar publicado por Banxico al día de valuación.

Caso 1. La emisora no operó en el día de valuación: En este caso se siguen los siguientes criterios:

1. La emisora cotiza en *Pink sheets*: Si la acción relacionada al ADR registró precio de cierre en el día de valuación, el precio de valuación es igual al precio unitario de la acción multiplicado por el tipo de cambio correspondiente. Si la acción relacionada al ADR no registró precio de cierre en el día de valuación, el precio de valuación es igual al último precio de valuación registrado.
2. Si la emisora no cotiza en *Pink sheets*, el precio de valuación es igual al último precio de valuación registrado.

8.14 Bibliografía

Chen, N. F, and Ingersoll, E. (1983). Exact Pricing in Linear Factor Models with Finitely Many Assets: A Note, *Journal of Finance*, Vol. 13, No. 3. pp. 341-360.

Gordon, M. J. (1959). Dividends Earnings and Stock Prices, *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 41, No. 2, Part 1, pp. 99-105.

Hayashi, F. (2000). Econometrics, Princeton University Press, USA.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, No. 1, pp. 13-37.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S. A. de C. V.

Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior towards Risk, *The Review of Economic Studies*, Vol. 25, pp. 65-86.

Merton, R. C. (1973). 'Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Ross, S. A. (1976). The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, No. 3, pp. 341-360.

Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

Venegas-Martínez, F. (2001). Una guía completa para economistas en la valuación de opciones. *Gaceta de Economía*, Año 6, No. 12, pp. 155-212.

8.15 Ejercicios

8.1 Durante este capítulo se revisó el modelo de utilidades descontadas como un caso especial del modelo de Gordon. Siguiendo ese modelo, indique cual es el valor de una acción de la empresa "S" si esta paga un dividendo anual de 100 unidades monetarias, ha crecido históricamente a una tasa semestral de 1.5% aunque se espera un crecimiento semestral de 2% a partir del cambio de gerencia. Suponga también que la tasa pertinente de descuento para una empresa del ramo es de 2.5% anual.

Solución: Antes de iniciar con la solución del problema se debe aclarar que el modelo es sumamente sensible a las tasas usadas, pues se basa en perpetuidades, por lo que se debe ser cuidadoso al escoger la tasa. En general se prefieren las tasas futuras, por ser las fechas en las que se esperan recibir los ingresos, pero es prudente establecer distintos escenarios. Después se procede a tener todos los datos en la misma periodicidad, anual en este caso, con lo que se compone la tasa real semestral de 2% y se obtiene una tasa equivalente de $((1.02)^2) - 1 = 0.0404$ Esto es una tasa anual equivalente de 4.04%. Ahora se vacían los datos en la ecuación del modelo de Gordon, lo que lleva a

$$A = D\left[\frac{(1+g)}{(r-g)}\right],$$

esto es:

$$A = 100\left[\frac{(1+0.0404)}{(0.0404-0.02)}\right] = 5100.$$

Por lo que, se puede estimar el precio de esa acción en 5100 unidades monetarias si se cumplen todos los supuestos del modelo de Gordon.

8.2 Antes de iniciar con el ejercicio referente al CAPM, es conveniente recalcar que el resultado arrojado por el modelo varia fuertemente en función al premio al riesgo que se suponga y que este a su vez resulta distinto dependiendo del tipo de media usada, geométrica o aritmética, o de la ventana de tiempo pertinente. En general se aconseja al lector a usar una ventana de tiempo en la que la estructura de la economía no haya cambiado, (cambio tecnológico o estructural importante) si se desea mayor formalidad para el experimento puede recurrirse a una prueba de cambio estructural de Chow.

Para el ejercicio suponga una tasa anualizada libre de riesgo (use la tasa libre de riesgo líder en su mercado local, en el caso mexicano y mientras esta obra es realizada, es la tasa anualizada de CETES a 91 días) de 7%, una correlación de la acción "U" con el índice local de 50%, una desviación estándar de los rendimientos de la acción de 10%. Por último, suponga un rendimiento promedio del mercado de 15% con una varianza de 5%.

Solución: Inicie buscando la covarianza del mercado con la acción "U" a partir de su correlación y las desviaciones estándar dadas. Sabiendo que la correlación entre el mercado y la acción "U" es igual al cociente de la covarianza entre el mercado y la acción dividido por el producto de sus desviaciones estándar, esto es: $\gamma\left(r_m, r_i\right) = \frac{\sigma(r_m, r_i)}{\sigma(r_i)\sigma(r_m)}$, lo que lleva a la covarianza $\sigma\left(r_m, r_i\right) = \gamma\left(r_m, r_i\right)\sigma\left(r_i\right)\sigma\left(r_m\right) = (0.5)(0.1)(0.05^{0.5}) = 0.0111804$.

Ahora se obtiene la β del activo usando la ecuación (8.20), ésta dice que

$$\beta = \frac{\operatorname{Cov}\left(r_i, r_m\right)}{\operatorname{Var}\left(r_m\right)}.$$

Si se sustituyen los datos del problema, se tiene que $\beta = 0.223608$, la cual se puede sustituir en la ecuación (8.19), de donde se obtiene el rendimiento esperado para la acción "U", esto significa que:

$$\operatorname{E}\left[r_i\right] = r_f + \beta\left(\operatorname{E}\left[r_m\right] - r_f\right) = 0.07 + \left[0.223608\left(0.15 - 0.07\right)\right] = 0.08788864$$

8.3 Ahora se usarán los resultados del CAPM para hacer una cobertura sobre una cartera de inversiones usando futuros del Índice pertinente. En este caso se hará uso de la información pública proporcionada por la cámara de compensación del mercado de futuros mexicano (ASIGNA), aunque cada lector deberá adaptar el ejemplo a su mercado local.

Suponga que tiene un portafolios con un valor actual de 10 millones de pesos y que la tasa libre de riesgo es de 7%. Sabiendo que un contrato futuro a 3 meses del IPyC (actualmente ubicado en 30,000 unidades) ampara un valor nominal de 10 pesos multiplicado por el valor del índice ¿Cuántos contratos se requieren para hacer una cobertura, asegurar un valor, sobre ese portafolio?

Solución: Lo primero que se debe hacer para resolver este problema es entender que dado que se está largo en el portafolio, se es dueño del portafolio, por lo que se necesita realizar una venta en corto para cubrir esta posición. Después de esto se requiere conocer la β del portafolio. Dado que la β es una medida de riesgo lineal, la β del portafolio se puede calcular como el promedio ponderado, por sus participaciones, de las betas de los activos dentro del portafolio. Por simplicidad en el ejercicio, se supone que el portafolio está constituido en un 30% por acciones de la empresa "S", 50% por acciones de la empresa "Y" y 20% por acciones de la empresa "Sal". Cada una con una beta de 1.5, 0.5 y 2.0 respectivamente. Esto lleva al lector a una β del portafolio de $\beta = (1.5)(.3) + (0.5)(.5) + (2.0)(.2) = 1.1$

Ahora se procede a buscar el número de contratos necesarios para la cobertura, llegar a una β^* (deseada) de cero, esto se logra dividiendo el valor actual del portafolios, P, entre el valor actual del contrato de futuros, F, y ponderarlo por su sensibilidad a los movimientos del mercado, β,. Esto es:

$$N = \left(\beta - \beta^*\right)\frac{P}{F}. \tag{8.29}$$

El lector debe notar que esta ecuación supone que los días de entrega del contrato coinciden con las necesidades de la cobertura y no toma en cuenta las posibles llamadas de margen que se darían dado el "mark to market" de los mercados organizados.

Siguiendo la ecuación anterior se tiene que el valor del portafolios, P, es de \$10,000,000, el valor amparado por el contrato de futuros es de \$300,000 y la β es de 1.1, esto es:

$$N = 1.1\frac{10000000}{300000} = 36.66.$$

Dado que no se pueden adquirir fracciones de contrato en el mercado, el lector debe redondear al entero superior o inferior, esto en función a sus creencias sobre el mercado, lo que implica un pequeño riesgo remanente después de la cobertura. Ahora suponga que al final de los 3 meses, el índice toma un valor de 29,000 unidades y el lector decidió cubrir 36 contratos (creyó que el mercado subiría). La ganancia de haber vendido en corto es de: $N(I_1 - I_0)(V)$ donde I_t es el índice al tiempo t y V es el valor del contrato de futuros por cada punto del índice. Esto lleva a una ganancia de (36)(30000 - 29000)(10)=\$360000.

La pérdida en el índice fue de 3.448275%, si se supone que el índice no paga dividendos, el índice perdió esa cantidad, de pagar dividendos se debe restar la parte proporcional del porcentaje en dividendos. Ahora se calculará el rendimiento esperado en el portafolio, este se calcula usando el CAPM representado en la ecuación (8.19). Esto conduce a:

$$\mathrm{E}\left[r_i\right] = r_f + \beta\left(\mathrm{E}\left[r_m\right] - r_f\right) = 0.0175 + 1.1\left(-0.03448275 - 0.0175\right) = -0.039681025.$$

El lector debe notar que se ha usado la cuarta parte (3 de 12 meses) de la tasa libre de riesgo anualizada, esto es 0.0175. Ahora se puede calcular el valor esperado del portafolio (incluidos los dividendos de 0%) al final del trimestre, es decir, $\mathrm{E}\left[P\right] = P(1 + r_p)$, donde r_p es el rendimiento del portafolio para el periodo. Esto conduce a $\mathrm{E}\left[P\right] = 10000000(1 - .039681025) = 9,603,189.75$, lo que lleva a un valor total para el inversionista representado por la suma del valor del portafolio y de la cobertura, esto es \$9,963,189.75, lo cual es ligeramente menor al original por el error de cobertura (redondear el número de contratos).

El lector debe tener claro que esta cobertura, reducción de la β a cero, fue realizada con el supuesto de que el índice no paga dividendos (es previsible) que la tasa libre de riesgo es constante y que la β del portafolio no cambia a lo largo del trimestre, dado que estos supuestos no siempre se cumplen, la cobertura no siempre funciona tan bien como en el libro de texto.

Capítulo 9

Productos derivados

Conceptos básicos:

- ✓ **Mercado de derivados**
- ✓ **Valor a mercado**
- ✓ *Forward*, **futuro, opción,** *swap*
- ✓ **Modelo de Black y Scholes**

9.1 Introducción

En este capítulo se presenta una perspectiva de la forma en la que operan los mercados financieros en la actualidad, así como de los agentes que en ellos participan. En particular, se discuten estos aspectos en el caso de México. Se presentan las características generales y el procedimiento de valuación de los productos derivados como son los contratos *forward*, contratos futuros, opciones y *swap*s, asimismo se introduce el concepto de valor a mercado (*mark to market*) con varios ejemplos.

9.2 Mercados y operaciones

En la actualidad el intercambio de instrumentos financieros se realiza en diferentes lugares. Por ejemplo, la comercialización de acciones en una bolsa de valores, como la Bolsa Mexicana de Valores, o en bolsas más grandes en el mundo como el *New York Stocking Exchange* (NYSE) en Estados Unidos, el *London Stocking Exchange* (LSE) en Reino Unido, entre otros. Otro tipo de instrumentos que se negocian son los bonos, divisas y los denominados productos derivados como futuros u opciones en mercados especializados, como el *Chicago Board of Options Exchange* (CBOE), o el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer). Se puede distinguir entre diversos mercados o ámbitos financieros, dependiendo del tipo de valor que se comercialice en ellos como son:

(*i*) Acciones
(*ii*) Bonos
(*iii*) Productos derivados
(*iv*) Bienes y servicios
(*v*) Divisas.

Para su estudio, los mercados financieros pueden ser clasificados en mercados básicos y mercados de derivados. En los primeros, el precio de los instrumentos que se intercambian se determina sin relación a otro (acciones, bonos, *commodities* y servicios), mientras que en los segundos el precio de los instrumentos está determinado o se “deriva” a su vez de otro, al que se le denomina valor o bien subyacente.

Otro concepto importante que determina el tipo de mercado es la modalidad con la que se realizan las operaciones. Si las operaciones se realizan en una institución financiera como una bolsa de valores y de acuerdo a un conjunto de reglas establecidas previamente, se denomina mercado organizado. Si las operaciones se realizan de acuerdo a las necesidades de los agentes participantes se denomina mercado sobre mostrador (*Over The Counter*)[1].

El mercado de derivados atrae a tres tipos de agentes: los cubridores, los especuladores y los oportunistas.

1. Cubridores. Son las personas que desean protegerse de la exposición al riesgo de pérdida financiera a causa de la variación del precio del bien subyacente.

   Por ejemplo, en el contrato *forward*: se neutraliza el riesgo del movimiento en el precio que se tiene que pagar por el bien subyacente.

   En el contrato de opción: se provee seguridad. Los cubridores se protegen de los movimientos desfavorables del precio y se benefician cuando pasa lo opuesto. La pérdida más alta es el costo del contrato.

2. Especuladores. Son aquellos agentes del mercado que obtienen ganancias debido a las diferencias estimadas en los precios del activo. Toman posiciones según las tendencias esperadas. En términos generales pueden dividirse en:

   i. Aquellos que esperan hacer ganancia a través de ciertas suposiciones, información privilegiada o el haber detectado alguna tendencia. Buscan colocarse en una buena posición en el mercado.

   ii. En contraposición a los anteriores, son aquellos que practican la especulación activa o dinámica (maximizan sus beneficios en el menor tiempo posible, minimizando la aportación de fondos propios sin utilizar información adicional sobre el comportamiento del mercado), la especulación pasiva o estática (cuando no han adoptado una estrategia de cobertura especifica).

3. Oportunistas. Son los agentes que en los mercados buscan oportunidades de obtener un rendimiento seguro, sin tomar riesgo y sin haber hecho ningún desembolso inicial. Este involucra ganancias simultáneas en transacciones de dos o más mercados, esto puede deberse a la diferencia de precios de un mismo activo en mercados distintos. Sin embargo, se debe considerar que estas oportunidades, si es que se presentan, son en intervalos muy cortos. Por la ley de la oferta y la demanda esas diferencias tienden a desaparecer rápidamente.

9.2.1 Valor a mercado (*mark to market*)

Cuando las operaciones son cerradas, se fija el valor del instrumento en la institución, pero el instrumento sigue cotizándose, por lo que su valor sigue cambiando con el paso del tiempo. Las instituciones tienen que monitorear diariamente los cambios que sufren los valores pactados de los instrumentos que componen sus portafolios y así tener diariamente un reporte de ganancias y pérdidas obtenidas por las variaciones en el mercado.

Se registra la pérdida o ganancia cuando en la fecha en la que se obtiene el valor a mercado el precio del subyacente pactado sea mayor o menor al precio o valor que tendría el instrumento con la misma fecha de vencimiento pero con distinta fecha de inicio del contrato, es decir, para obtener el valor a mercado (*mark to market*) es necesario el valor cuando se adquirió el instrumento y el valor del instrumento en la fecha que se analiza con una vigencia igual a los días por vencer del instrumento, como si se estuviera adquiriendo en ese momento y no en la fecha en que se realizó la operación.

[1] El mercado *Over The Counter*, OTC, es un sistema de cotización de valores donde los participantes negocian directamente entre ellos, sin la intermediación de una bolsa o de un piso de remate. Las operaciones se realizan a través de redes de cómputo o telefónicas que vinculan entre sí a los agentes de todo el mundo.

9.3 Productos derivados

Un producto derivado se puede definir como un contrato privado cuyo valor depende de algún activo subyacente como una tasa, una acción, un bono, una divisa o un *commodity*.

Los derivados abarcan desde componentes estructurales simples, como los contratos lineales (*forward*, futuros, opciones y *swap*s) hasta productos más complejos como son las opciones exóticas o las notas estructuradas.

Los derivados son activos financieros que tienen una gran importancia en las decisiones financieras actuales, se han convertido en una herramienta indispensable para la administración del riesgo debido a que proveen un método efectivo y de bajo costo para administrar la exposición de las fluctuaciones de las tasas de interés, precios de *commodities*, tipos de cambio e inclusive sobre el clima.

Los dos principales mercados donde se llevan a cabo operaciones con instrumentos derivados son:

1. Bolsas especializadas
2. Sobre del mostrador (*Over-the-Counter*)

Los derivados negociados en mercados organizados difieren en dos aspectos de los derivados negociados *Over The Counter* (OTC). La primera diferencia es que los contratos negociados en un mercado organizado son casi siempre estandarizados, es decir, tienen características bien definidas y todos los contratos de un mismo tipo son exactamente iguales. Esto se hace con el objetivo de dar liquidez, (los contratos son más baratos). Para algunos participantes del mercado, esta liquidez representa ciertas desventajas porque puede pasar que el activo subyacente no tenga las características deseadas por los participantes del mercado, pero en general la estandarización ha probado ser una característica deseable entre los participantes del mercado.

La segunda diferencia de los contratos negociados en un mercado organizado es que los contratos son realizados con una entidad regulatoria llamada cámara de compensación[2], y no con un banco. Para garantizar que el contrato se cumpla por las partes, el mercado organizado elimina el riesgo de crédito mediante la figura y los lineamientos de la cámara de compensación, en caso de que alguna de las partes no cumpla con un pago, la cámara interviene y cubre el pago.

9.4 Principales productos derivados

Esta sección se centrará en describir las características fundamentales de los diferentes tipos de derivados, además, se mencionarán las fórmulas de valuación y su deducción. Los derivados que se estudiarán en esta sección son

(*i*) Contratos adelantados: *forward*s
(*ii*) Contratos bursátiles o estandarizados (futuros)
(*iii*) Opciones
(*iv*) *Swaps*

9.4.1 Contratos adelantados: *forward*

Los *forward*s son acuerdos de compra-venta sobre un bien subyacente que será entregado en una fecha futura, a un determinado precio, es decir, se adelanta el precio que se pagará por la transacción que se realizará en un futuro. Estos acuerdos son realizados en el mercado fuera de mostrador. En estos no existen garantías sobre las transacciones, sólo los contratos firmados por ambas partes; usualmente son entre dos instituciones financieras o entre una institución

[2] Institución que en un mercado de derivados es la contraparte de cualquier transacción y que asegura el cumplimiento de los contratos. En el MexDer es ASIGNA.

financiera y un cliente corporativo. Estos instrumentos no están sujetos a las compensaciones por diferencias diarias (*mark to market*).

Este tipo de instrumentos son también conocidos como futuros no bursátiles o extrabursátiles.

En el contrato *forward* se tienen dos posiciones:

Posición larga: es la que adquiere la persona que compra el *forward*, es decir, está obligada a comprar el bien subyacente en la fecha de vencimiento;

Posición corta: es la que adquiere la persona que vende el *forward*, es decir, se obliga a vender el bien subyacente en la fecha de vencimiento a un precio establecido.

Los términos que se manejan en el contrato son:

(*i*) Precio *forward*: es el precio que se paga por adquirir el bien subyacente en una fecha futura. Es el valor presente del precio del bien subyacente a la fecha de entrega. Cambia día con día ya que el precio depende del movimiento del mercado diario. Al pactar el *forward* éste precio es igual al precio de entrega (precio de ejercicio). El precio *forward* se define como: $F = S_t e^{r(T-t)}$.

(*ii*) Precio de entrega: denotado por K, es el precio que se pacta en el contrato para pagar en la fecha de entrega del bien subyacente. Este precio es el mismo que el precio *forward* al inicio del contrato, después se mantiene durante toda la vigencia del contrato.

(*iii*) Fecha de entrega: es la fecha de vencimiento del contrato y la entrega del bien subyacente; es un día específico.

(*iv*) Precio del contrato: al inicio del contrato es cero para ambas partes, no lleva ningún costo adicional el adquirir cualquier posición de las ya especificadas.

(*v*) Precio *spot*: es el precio del bien subyacente en el mercado para su compra-venta inmediata.

Los contratos adelantados establecen hoy la cantidad y el precio de una compra-venta a celebrarse en el futuro sobre algún activo. El objetivo principal de los *forward*s, al igual que cualquier otro derivado, es permitir a los participantes del mercado cubrir o eliminar algún riesgo específico.

9.4.2 Función de pago (ganancias)

Las ganancias por unidad del bien subyacente están dadas en términos de las posiciones:

$$\text{Posición larga: } S_T - K, \qquad \text{Posición corta: } K - S_T.$$

donde:

S_T: es el precio del bien subyacente al tiempo T;

K: es el precio de entrega.

Ejemplo. Contrato adelantado sobre tipo de cambio

El 5 de enero del año X, una empresa sabe que en tres meses (5 de abril) le llegará un millón de libras esterlinas. Se toma la decisión de contratar un *forward* al banco Y con fecha de entrega al 5 de abril, su precio *forward* y precio de entrega es de $1.6 millones (el tipo de cambio a tres meses se encuentra en $1.600 por libra). En este caso la empresa tiene la posición corta con respecto al bien subyacente y el banco la larga. Con respecto a la compra de *forward*s la empresa tiene la posición larga y el banco la corta. El costo de la transacción es cero como se había definido en el precio del contrato.

El precio de este tipo de contrato se determina en el mercado por la libre interacción de la oferta y la demanda. Generalmente, el precio *forward* se fija de manera tal que el valor del contrato por sí mismo sea cero al inicio del acuerdo.

9.4.3 Precio justo de un contrato *forward*

Este contrato ampara la obligación de comprar o vender (según la posición adoptada) el bien subyacente en una fecha futura a un precio determinado con anterioridad.

Una institución quiere comprar un bien subyacente por ejemplo, acciones, el 30 de junio de 2007, el precio en ese momento (precio *spot*) es conocido pero hay que pagar y recibir la cantidad de acciones en esta fecha. Sin embargo, la institución quiere recibir y pagar las acciones hasta el 30 de julio de 2007, porque así les conviene a sus intereses. En este ejemplo hay que determinar el precio al que se realizará la transacción, es decir, precio a pactar por cada acción: precio de ejercicio.

Hay que considerar que las condiciones del mercado cambian constantemente por lo que es difícil proporcionar ese precio, así que hay que suponer ausencia de arbitraje.

Para poder definir el precio *forward* se plantea una inversión que replique el contrato adelantado, la cual se obtiene de haber invertido en instrumentos gubernamentales por ejemplo CETES, como se muestra a continuación.

$$S_0 e^{R_c\left(\frac{T-t}{360}\right)}, \tag{9.1}$$

donde:

S_0 : precio del bien subyacente en la fecha t,

t : fecha en que se desea pactar el *forward*,

T : fecha de vencimiento del *forward*,

R_c : tasa de interés nominal anual continua al plazo $\frac{T-t}{360}$.

Se afirma que (9.1) es el precio justo para el *forward*, ya que si no cumpliera esta condición, se tendrían los siguientes casos

(*i*) $f < S_0 e^{R_c\left(\frac{T-t}{360}\right)}$

Si esto sucede los inversionistas en la fecha t venderían en corto muchas acciones al precio S_0 y con lo obtenido comprarían las necesarias en los contratos de *forward* logrando una ganancia y asegurándose de que en la fecha T se recuperarán y devolverán las acciones tomadas logrando una ganancia por arbitraje.

(*ii*) $f > S_0 e^{R_c\left(\frac{T-t}{360}\right)}$

Se pediría en préstamo una cantidad de dinero al banco para comprar un *forward*, posición corta, y en la fecha de vencimiento se venderían las acciones logrando una cantidad superior a la deuda que cuando se paga se obtiene una ganancia de la nada, ya que no se desembolsó dinero alguno. Con lo anterior se violaría el supuesto de no arbitraje.

Bajo el supuesto de no arbitraje, el precio justo del *forward* f sobre acciones, índices y mercancías, con tasa capitalizable continuamente R_c está dado por la siguiente ecuación

$$f = S_0 e^{R_c\left(\frac{T-t}{360}\right)}, \tag{9.2}$$

y con tasa discreta por

$$f = S_0\left(1 + \widetilde{R}\left(\frac{T-t}{360}\right)\right), \tag{9.3}$$

donde:

S_0 : precio del bien subyacente en la fecha t,

t : fecha en que se desea pactar el *forward*,

T : fecha de vencimiento del *forward*,

R_c : tasa de interés nominal anual continua al plazo $\frac{T-t}{360}$,

$\widetilde{R}$: tasa de interés nominal anual discreta al plazo $\frac{T-t}{360}$.

El supuesto de la ausencia de arbitraje funciona en el mundo real con los precios del *forward*, ya que cuando existe la oportunidad de arbitraje los inversionistas tienen alguna de las dos alternativas de obtener ganancias y hay muchas personas que invierten en ellas. Esta acción conlleva a que el precio baje o suba (dependiendo de la posición) por la oferta y la demanda, logrando con ello que el precio de mercado tienda al valor que se obtiene con la fórmula del precio justo.

9.4.4 Contrato *forward* sobre tipo de cambio

El contrato adelantado sobre tipo de cambio (divisas) es un instrumento derivado en el que se tiene la obligación de comprar o vender (según sea la posición en el contrato) una cantidad de moneda extranjera (monto nocional) en una fecha futura (fecha de vencimiento) a un tipo de cambio futuro (llamado tipo de cambio *forward*) pactado en al inicio del contrato. A continuación se deduce la fórmula del tipo de cambio *forward* con el siguiente caso:

Un inversionista mexicano, por ejemplo, desea realizar la importación de materia prima dentro de cuatro meses (fecha de vencimiento, T), los cuales tendrá que pagar en moneda extranjera, por ejemplo N dólares llevados de este momento (fecha actual, t) a tiempo futuro con las condiciones que hay en el mercado. Una alternativa del inversionista es comprar en t, N dólares que invertirá para tener los necesarios en T para pagar la materia prima que compró y que le será entregada. La tasa que se aplica en la inversión de dólares (por ejemplo) es R_e (se denominará tasa extranjera o foránea), entonces la cantidad de dólares que se comprarán en la fecha t y que tendrán un valor en T son los siguientes:

$$\begin{aligned} D_t &= N, \\ D_T &= N\left(1 + R_e\left(\frac{T-t}{360}\right)\right). \end{aligned}$$

Pero en la fecha t (fecha de inicio del contrato), el inversionista no cuenta con el capital para comprar dicha cantidad de dólares, así que decide pedir un préstamo en pesos, dicho préstamo será contratado a una tasa pasiva R_d, denominada tasa doméstica, a un plazo de $T - t/360$ años, es decir, a pagar en la fecha T. La cantidad en pesos que debe pedir prestada es la cantidad en dólares por el tipo de cambio de la fecha t, o sea C_t y el valor de la deuda en T. Lo anterior se resume en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} P_t &= C_t N, \\ P_T &= C_t\left(N\left(1 + R_d\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Ahora considere los valores del pasivo y del activo en la fecha T como sigue

$$D_T = N\left(1 + R_e\left(\frac{T-t}{360}\right)\right),$$
$$P_T = C_T\left(N\left(1 + R_d\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)\right).$$

Bajo el supuesto de no arbitraje, las ecuaciones anteriores tienen que ser iguales en la fecha de vencimiento T, pero se debe convertir el activo en la moneda del pasivo (pesos), es decir, la moneda doméstica, con un tipo de cambio futuro, desconocido hoy denotado por C_f

$$P_T = D_T \times C_f,$$
$$C_t \times N\left(1 + R_d\left(\frac{T-t}{360}\right)\right) = N \times C_f\left(1 + R_e\left(\frac{T-t}{360}\right)\right).$$

Para que la igualdad se cumpla se debe encontrar el tipo de cambio futuro, al que se le denomina tipo de cambio *forward*, ya que se fija en la fecha t. Este tipo de cambio *forward* se despeja de la ecuación anterior

$$C_f = C_t\left[\frac{\left(1 + R_d\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)}{\left(1 + R_e\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)}\right]. \tag{9.4}$$

9.4.4.1 Ejemplo de un *forward* sobre tipo de cambio

Considere un contrato *forward* sobre dólar con vencimiento dentro de seis meses. Si el tipo de cambio *spot* es de 10.95 pesos/dólar y las tasas de interés de CETES y T-bills son, respectivamente, 0.08 y 0.057. El tipo de cambio *forward*, suponiendo tasas de interés simples es

$$\begin{aligned} C_{f(0,0.5)} &= 10.95\left(\frac{1 + 0.08(0.5)}{1 + 0.057(0.5)}\right) \\ &= 9.072. \end{aligned}$$

9.4.5 Valor a Mercado de un contrato *forward*

Posición larga. En esta posición el que compra tiene la obligación de recibir el bien subyacente (por ejemplo: dólares) y pagarlo al *forward* pactado (F_p) y la ganancia se da cuando éste es menor al *forward* del mercado (F_S) con el periodo de contrato igual a los días faltantes para que se venza el contrato que se tiene pactado. El valor a mercado está dado por

$$MtM_S^L = N\left[\frac{F_S - F_{Sp}}{1 + R\left(\frac{D\times V}{360}\right)}\right].$$

Posición corta. Hay ganancia cuando el valor del *forward* pactado es mayor al *forward* del mercado en la fecha en que se valúa. El valor a mercado de un contrato *forward* está dado por

$$MtM_S^C = N\left[\frac{F_{Sp} - F_S}{1 + R\left(\frac{D\times V}{360}\right)}\right].$$

donde:

F_{Sp} : es el precio del *forward* pactado al inicio del contrato;

F_S : es el precio *forward* a pactar con las condiciones del mercado de día evaluado con plazo igual a los días por vencer del contrato;

$D \times V$: son los días por vencer en el contrato;

R : es la tasa correspondiente al plazo $D \times V$.

9.4.5.1 Ejemplo de MtM de *forward* sobre tipo de cambio

Una casa de bolsa desea comprar 1,000,000 de dólares dentro de 86 días, la institución desea pactar el precio hoy 30 de junio. ¿Cuál es el precio teórico en esta operación? Después de una semana, ¿Cuál es el MtM el día 7 de julio?

Suponga que el tipo de cambio al 30 de junio es 10.4385 y al 7 de julio es 10.4848. Además las curvas en pesos (tasa PRLV) y dólar (tasa LIBOR) son

30/06			07/07		
Nodo	PRLV %	LIBOR%		PRLV %	LIBOR%
1	4.4010	1.5213		4.3706	1.0950
28	4.7313	1.1203		4.9541	1.1106
91	5.3177	1.1163		5.5994	1.1101
180	5.7623	1.1194		6.1610	1.1188
360	6.2322	1.1900		6.4360	1.1700
728	7.1363	1.5609		7.8337	1.5883
1092	7.9264	2.0544		8.8324	2.1029
1820	9.3715	2.7998		10.0665	2.9430

Cuadro 9.1 Nodos de las curvas en pesos (tasa PRLV) y dólar (tasa LIBOR).

Los tipos de cambio *forward* para este ejemplo al utilizar interpolación lineal para los plazos del ejemplo son:

$$\begin{aligned} C_{f(0,86)} &= 10.4385 \left(\frac{1 + 0.0527(86/360)}{1 + 0.0111(86/360)} \right) \\ &= 10.5418. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_{f(0,79)} &= 10.4848 \left(\frac{1 + 0.0547(79/360)}{1 + 0.0111(79/360)} \right) \\ &= 10.5850. \end{aligned}$$

El MtM es

$$MtM_f^L = 452,880.13.$$

9.4.6 Contrato *forward* sobre una tasa de interés

El contrato adelantado sobre tasas de interés (llamado *forward*s sobre tasas) es un instrumento derivado en el que se tiene la obligación de pagar o recibir (según la posición de que se trate) un determinado interés obtenido al aplicar una tasa de interés en un determinado monto nocional (cantidad a invertir) en un periodo de referencia en la fecha de vencimiento del contrato.

Los contratos adelantados de tasas de interés, también conocidos como *forward rate agreements* (*FRAs*) es un contrato donde las partes convienen una cierta tasa de interés aplicada a una cierta cantidad principal durante un periodo de tiempo futuro específico. Este tipo de instrumentos se negocian de manera extrabursátil en el mercado interbancario.

La fórmula de la tasa *forward* se puede deducir con el siguiente caso:

Un inversionista pide un préstamo de N pesos en la fecha t, la deuda tiene una tasa de interés R_L (llamada tasa larga) y que se pagará en la fecha T, es decir, el plazo a pagar la deuda es en $\frac{T-t}{360}$ años, al que se le llama plazo largo. Al recibir el préstamo decide invertirlo a una tasa de rendimiento R_c (llamada tasa corta) a un plazo menor que el de la deuda, es decir, la fecha de vencimiento es t_1 tal que $t_1 < T$, al plazo $\frac{t_1-t}{360}$. El monto que recibe en t_1 lo va a invertir hasta t_2 pero la tasa a pactar es desconocida en t, sin embargo, la tasa que pacte debe cumplir con el supuesto de no arbitraje. En otras palabras, el monto que obtenga en T debe ser igual a la deuda que contrajo en t, sólo neutraliza el pasivo que se adquirió. Considere que en t_1 el monto que obtuvo de la inversión al plazo corto lo invertirá a una tasa adelantada o tasa *forward*, ya que se establece en t y no en t_1 al plazo $\frac{T-t_1}{360}$ al que se le denomina periodo de referencia, además del supuesto de que no hay arbitraje en las posiciones larga y corta (pasivo y activo). El razonamiento anterior se resume en la siguiente expresión

$$N\left(1+R_L\left(\frac{T-t}{360}\right)\right)=N\left(1+R_C\left(\frac{t_1-t}{360}\right)\right)\times\left(1+R_f\left(\frac{T-t_1}{360}\right)\right).$$

Bajo el supuesto de no arbitraje la tasa R_f aplicada sobre la inversión es la tasa de interés que al aplicarse al monto obtenido en t_1 neutraliza en T la deuda que adquirió el inversionista en t. Dicha tasa se despeja de la ecuación anterior.

$$R_f=\left[\frac{1+R_L\left(\frac{T-t}{360}\right)}{1+R_C\left(\frac{t_1-t}{360}\right)}-1\right]\frac{360}{T-t_1}. \tag{9.5}$$

Note que la tasa R_f se obtiene bajo el supuesto de no arbitraje. No obstante por la ley de oferta y demanda que establece el mercado, como con cualquier otro producto, existe la oportunidad de realizar arbitraje que los inversionistas aprovecharán pero a la vez hacen que estas oportunidades desaparezcan rápidamente y la tasa a pactar sea la que se obtuvo en forma teórica.

9.4.7 Valor a Mercado de *forward* sobre tasa de interés

Posición larga. En esta posición el que compra el *forward* sobre tasa en la fecha de vencimiento recibirá la tasa aplicada al nocional, por eso habrá ganancia cuando la tasa a pactar en otros días (según comportamiento del mercado) sea menor que la pactada, es claro que esta ganancia es en la fecha de comparación, antes del vencimiento del contrato. La fórmula para calcular el MtM en este caso está dada como sigue

$$MtM_f^L=\frac{N\left(R_p-R_f^M\right)\left(\frac{28}{360}\right)}{1+R\left(\frac{D\times V}{360}\right)}.$$

Posición corta. En esta posición el inversionista debe pagar la tasa, así que la ganancia se representa cuando la tasa pactada es menor a la tasa *forward* que señala el mercado con plazo corto igual al plazo que falta para su vencimiento y el plazo largo igual al plazo corto más el plazo de referencia, como se muestra a continuación

$$MtM_f^C=\frac{N\left(R_f^M-R_p\right)\left(\frac{28}{360}\right)}{1+R\left(\frac{D\times V}{360}\right)}.$$

donde:

R_p : es la tasa *forward* pactada al inicio del contrato,

R_f^M : es la tasa a pactar con las condiciones del mercado, con plazo corto igual a los días por vencer en el contrato,

$D \times V$: son los días por vencer en el contrato más el plazo de referencia,

R : es la tasa correspondiente al plazo $D \times V$.

9.4.7.1 Ejemplo de MtM de *forward* sobre tasa de interés

El 30 de junio un banco tiene registrado un activo que recibirá el día 29 de septiembre, el monto a recibir es de 2,000,000 de pesos. El 27 de octubre, 28 días después, tiene un pasivo con la misma cantidad, 2,000,000 de pesos. Se decide comprar un *forward* con nocional de 2,000,000 para el 29 de septiembre con tasa de referencia de TIIE 28 días. ¿Cuál es la tasa a pactar en el *forward* al 30 de junio y el MtM al 30 de julio?

	PRLV %	
Nodo	30/06	30/07
1	4.4010	4.0501
28	4.7313	4.3807
91	5.3177	5.0984
180	5.7623	5.8216
360	6.2322	6.3034
728	7.1363	7.3589
1092	7.9264	8.4002
1820	9.3715	10.1873

Cuadro 9.2 Nodos en pesos (tasa PRLV).

De acuerdo con los nodos del cuadro anterior y de (9.5) la tasa a pactar R_p es:

$$\begin{aligned} R_p &= \left[\frac{1+0.0546(119/360)}{1+0.0532(91/360)} - 1 \right] \frac{360}{28} \\ &= 0.0583. \end{aligned}$$

Para determinar el MtM al 30 de julio se requiere calcular a R_f^M:

$$\begin{aligned} R_f^M &= \left[\frac{1+0.0508(89/360)}{1+0.0476(61/360)} - 1 \right] \frac{360}{28} \\ &= 0.0572. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el MtM es:

$$\begin{aligned} MtM_f^L &= \frac{2000000\,(0.0583-0.0572)\,(28/360)}{1+(0.0508)\,(89/360)} \\ &= 168.1059. \end{aligned}$$

9.4.8 Futuros

Los mercados modernos de futuros tienen sus orígenes en el comercio de arroz en el siglo XVIII en Osaka, Japón. En los Estados Unidos, la negociación con futuros comenzó a mediados del siglo XIX con los contratos de maíz en Chicago y con los contratos de algodón en Nueva York. El primer futuro sobre divisas fue negociado en el *Chicago Mercantile Exchange* en 1972; el primer futuro sobre tasas de interés fue negociado en el *Chicago Board of Trade* en 1975. Actualmente, el mercado de instrumentos derivados es la actividad financiera más dinámica alrededor del mundo.

Los instrumentos derivados como los futuros y las opciones proporcionan varios beneficios de importancia económica, entre ellos la posibilidad de manejar o administrar el riesgo para evitar los efectos negativos ante movimientos adversos en los precios de los activos. Por otro lado, gracias al gran número de compradores y vendedores en el mercado, se promueve la eficiencia y liquidez que dan lugar a que los participantes paguen costos de transacción muy bajos y que puedan entrar y salir con facilidad del mercado.

Los contratos de futuro establecen la obligación entre dos partes para comprar o vender un activo subyacente en una fecha futura, en una cantidad, calidad y un precio predeterminado en el contrato. Al igual que los contratos *forward*, en este tipo de transacción la parte que se obliga a comprar tiene la posición larga en el subyacente y la parte que se obliga a vender tiene la posición corta en el mismo subyacente. Un contrato futuro es negociado en un mercado organizado y sus características son estandarizadas.

9.4.8.1 Funcionamiento de un contrato de futuros

Un contrato de futuros es similar a un contrato *forward* excepto por dos características importantes:

(*i*) En los contratos de futuros, las ganancias o pérdidas intermedias son registradas diariamente durante el tiempo de vida del contrato, proceso denominado *mark to market*. Estas ganancias o pérdidas intermedias son el resultado de la diferencia entre el precio del futuro "hoy" y el precio del futuro de "ayer". La reevaluación diaria de los futuros financieros es una característica que distingue a los contratos *forward* en los que no existe tal reevaluación diaria, este proceso sólo se hace al final del periodo, en este sentido se dice que un contrato de futuros es una sucesión de contratos *forward* "diarios". Esta característica de los contratos de futuros junto con el margen, reducen el riesgo por incumplimiento crediticio mediante la cámara de compensación;

(*ii*) Los contratos de futuros son negociados en un mercado de intercambio organizado en términos estandarizados, lo que por un lado reduce la flexibilidad pero por el otro le da liquidez al mercado, a diferencia de los contratos *forward*s. Esta estandarización implica que frecuentemente existan diferencias entre lo cubierto y lo expuesto en términos de vencimiento, tamaño del contrato y activo subyacente, sin embargo la teoría ha desarrollado metodologías en donde se pueden construir coberturas eficientes y óptimas, aún cuando lo cubierto y lo expuesto no coincidan en términos de vencimiento, tamaño del contrato y activo subyacente.

9.4.8.2 Futuros sobre tasas de interés

Los futuros de tasas de interés son uno de los instrumentos más importantes de cobertura contra el riesgo de tasas de interés tanto de corto plazo (mercado de dinero), como de largo plazo (mercado de capitales). La cobertura contra riesgos de tasa interés por medio de futuros es muy compleja, esto se debe a la relación entre el precio del instrumento de deuda, su vencimiento y la tasa de interés.

En un futuro sobre tasas de interés, el vendedor (posición corta) se compromete a entregar una cierta cantidad de títulos de deuda (por ejemplo: CETES, bonos, etc) que tenga un cierto periodo de vigencia (por ejemplo 90 días) a un precio pactado al momento de obtener el futuro, con una fecha de vencimiento del contrato. Por su parte, el comprador (posición larga) se compromete a recibir los títulos y pagar el precio pactado. Las ganancias de ambos, al vencimiento, se dan porque existe una diferencia en tasas de interés entre la pactada y la que existe en el mercado al vencimiento del contrato.

9.4.8.2.1 Ejemplo de futuros sobre tasas de interés

Suponga que dos partes entran en contrato futuro a plazo de un mes sobre una tasa de interés de CETES a 28 días. La tasa pactada es de 20% al vencimiento del futuro, un mes después, la tasa de CETES a 28 días es de 40%, entonces el vendedor entrega el CETE a una tasa de 20% y el comprador lo paga a ese precio. Con esto, el vendedor resulta ser el ganador, ya que está vendiendo un CETE a 28 días a un precio mayor que el precio que se esta negociando en ese momento en el mercado. Defínase las siguientes variables

T : fecha de vencimiento del futuro,

$\widetilde{T}$: fecha de vencimiento del CETE,

R : tasa *spot* al plazo T,

$\widetilde{R}$: tasa *spot* al plazo $\widetilde{T}$.

Sea $\widetilde{T} - T \geq 0$, siendo esta diferencia el plazo de la tasa que se esta negociando. Por otro lado, el valor nominal de un CETE es de \$10.00, su precio es

$$B_t = 10e^{-\widetilde{R}\left(\widetilde{T}-t\right)}, \tag{9.6}$$

entonces el precio al que se pacta el futuro es

$$F_t = B_t e^{-R(T-t)}, \tag{9.7}$$

donde:

F_t : precio del futuro,

B_t : precio actual al que se está negociando el activo subyacente,

R : tasa de interés *spot* libre de riesgo al plazo $T - t$,

$(T - t)$: periodo de vigencia del futuro.

Si se sustituye (9.6) en (9.7) se tiene que

$$\begin{aligned} F_t &= 10e^{-\tilde{R}(T-t)}e^{-R(T-t)} \\ &= 10e^{-\bar{R}\left(\tilde{T}-T\right)}, \end{aligned}$$

donde $\bar{R}$ es las tasa *forward* de $\widetilde{T}$ a T. La tasa que se aplica es el promedio de las dos tasas *spot*.

9.4.8.2.2 Ejemplo de futuros sobre un índice

Considere un contrato futuro sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC). Suponga que el contrato inicia "hoy" y que no hay pago de dividendos. Si el nivel del IPC al cierre es de 27929.29 puntos y la tasa de cetes al plazo de 91 días es de 7.62% anual, el valor teórico del contrato que inicia "hoy" a tres meses (91 días) es:

$$F_{T=91} = 27929.29 \times [1 + 0.0762\,(91/360)] = 28467.25.$$

9.4.9 Opciones financieras

En esta sección se presenta una breve descripción de las opciones financieras que permitirá diferenciar las características y relaciones entre opciones de compra o de venta de los principales contratos que existen en los mercados financieros, así como los factores y supuestos para la determinación de los precios de estos instrumentos.

Una opción es un producto derivado que por el pago de una prima da a su tenedor (comprador) el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente (bienes, acciones, índices bursátiles, divisas, futuros, tasas de interés, etc.) a un precio determinado, llamado precio de ejercicio durante la vigencia del contrato y hasta la fecha de vencimiento. La contraparte, el emisor, de estos títulos tiene la obligación de vender o comprar el activo subyacente.

En un contrato de opción se especifican cinco elementos:

(*i*) tipo de opción: opción de compra o de venta (americana o europea);

(*ii*) activo subyacente: es el activo (acciones, divisas, tasas de interés, petróleo, oro, etc.);

(*iii*) cantidad del activo negociado: es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción;

(*iv*) fecha de vencimiento: es la fecha en que se vence el contrato. Las fechas de vencimiento se fijan de acuerdo con el calendario trimestral, de tal manera que existen vencimientos cada tres meses;

(*v*) precio de ejercicio: es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente, según la opción sea de compra o de venta;

Hay otro elemento determinado por el mercado que no figura estipulado en el contrato, que es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado organizado de opciones, siguiendo la ley de la oferta y la demanda. Este precio recibe el nombre de prima.

9.4.9.1 Opción de compra

Una opción de compra otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de comprar al emisor el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha predeterminada o antes. El comprador tiene que pagar una prima al emisor en el momento de la realización del contrato. El contrato debe especificar entre otras cosas

(*i*) concepto a negociar (activo subyacente);

(*ii*) cantidad a negociar;

(*iii*) precio de compra;

(*iv*) fecha de vencimiento.

Este tipo de opciones presentan para el comprador ganancias ilimitadas al mismo tiempo que sus pérdidas se ven reducidas al valor de la prima que paga al firmar el contrato. En cambio el emisor presenta como ganancia máxima el valor de la prima y sus pérdidas son ilimitadas.

9.4.9.2 Opción de venta

Una opción de venta otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha preestablecida. El contrato especifica los mismos puntos que el de opciones de compra. En estos contratos al igual que en los de compra el emisor tiene una ganancia reducida a la prima y pérdidas ilimitadas, la situación del comprador es la contraria, es decir, presenta pérdidas reducidas a la prima y ganancias ilimitadas.

9.4.9.3 Posiciones en un contrato de opción

En las opciones se presentan dos posiciones, las cuales indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato:

Posición larga: es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si se trata es un opción de compra o de venta;

Posición corta: es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Una vez firmado un contrato de opciones, existen tres formas de cerrarlo:

(*i*) El comprador ejerce su derecho.

(*ii*) El comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, dándose por terminado el contrato.

(*iii*) El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir, la opción se liquida.

9.4.9.4 Opción europea y americana

Una opción también se puede clasificar de acuerdo al tiempo en que se puede ejercer el derecho que esta estipulado en el contrato de la siguiente manera:

(*ii*) Opción europea: es aquella que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.

(*i*) Opción americana: es aquella en la que se puede ejercer el derecho a comprar o vender en cualquier fecha hasta el día de vencimiento, es decir, durante la vida de la opción.

Ejemplos de las combinaciones de las clasificaciones anteriores son:

i. Opción *call* europea, este contrato obliga al vendedor de la opción a vender el activo en el caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho a comprar el activo en la fecha de vencimiento.

ii. Opción *put* europea, este contrato obliga al vendedor de la opción a comprar el activo en el caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho a vender el activo en la fecha de vencimiento.

iii. Opción *call* americana, este contrato obliga al vendedor de la opción a vender el activo en el caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho a comprar el activo en o antes la fecha de vencimiento.

iv. Opción *put* americana, este contrato obliga al vendedor de la opción a comprar el activo en el caso de que el comprador de la opción ejerza el derecho a vender el activo en o antes la fecha de vencimiento.

La mayoría de los contratos negociados en todo el mundo se realizan mediante opciones americanas. Pero estas presentan una mayor dificultad para su valuación que las europeas, y por lo mismo las propiedades de las americanas se derivan y explican a través de las propiedades de las europeas.[2]

9.4.9.5 Opción dentro, fuera y en el dinero

Dependiendo de la relación que exista entre el precio pactado de ejercicio y el precio de mercado, una opción se puede clasificar de la siguiente manera:

[2] Consultar Hull (2005).

(*i*) Dentro del dinero (*in-the-money*): cuando el precio de mercado excede el precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio para una de venta.

(ii) Fuera del dinero (*out-of-the-money*): cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio en una de venta.

(*iii*) En el dinero (*at-the-money*): cuando el precio de mercado y el precio de ejercicio son iguales, se cumple tanto para opciones de compra como para las de venta.

El Cuadro 9.3 muestra las condiciones para que una opción se encuentre *in-the-money*, *at-the-money* y *out-of-the-money*

Precio de mercado *vs.* precio de ejercicio	Opción “call”	Opción *put*
$S_t > K$	*in-the-money*	*out-of-the-money*
$S_t = K$	*at-the-money*	*at-the-money*
$S_t < K$	*out-of-the-money*	*in-the-money*

Cuadro 9.3 Clasificación de una opción según la relación entre S_t y K.

9.4.9.6 Factores que determinan el precio de una opción

Los factores de los cuales depende el valor de una opción se enumeran y explican muy brevemente a continuación:

(*i*) Precio actual del bien subyacente. Es el determinante más importante. Cuanto mayor es el precio del activo subyacente, mayor es el precio de la opción de compra (mayor posibilidad de encontrarse dentro del dinero) y menor el de la opción de venta (menor posibilidad de encontrarse dentro del dinero).

(*ii*) Precio de ejercicio de la opción. Cuánto más alto, más barata debe ser la opción de compra y más cara debe ser la opción de venta. Sin embargo, cabe recordar que el precio de una opción de compra no puede ser negativo aún si el precio de ejercicio es muy alto. Mientras la opción tenga aún cierta vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente exceda al precio de ejercicio antes de su vencimiento y la posición tiene algún valor en el tiempo. Análogamente, en el caso de una opción de venta, su valor intrínseco no puede ser negativo, aún si el precio de ejercicio es muy bajo, y mientras la opción de venta tenga vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente sea menor que el precio de ejercicio y por tanto la opción tiene al menos cierto valor en el tiempo.

(*iii*) Tasa de interés libre de riesgo. Es el costo de oportunidad de la inversión en una opción, a medida que la tasa de interés libre de riesgo se incrementa, el precio de las opciones de compra aumenta y el precio de las opciones de venta disminuye. Este impacto no es tan evidente. Mientras más altas sean las tasas de interés, más bajo es el precio de ejercicio de una opción de compra. Así, las tasas de interés producen el mismo efecto que bajar el precio de ejercicio de la opción de compra.

(*iv*) Dividendos. Los pagos de dividendos en efectivo también alteran el precio de las opciones. En relación a las opciones sobre acciones, si se espera que la acción reparta altos dividendos, el valor de la opción de compra disminuye y el valor de la opción de venta aumenta. Esto debido a que el precio del subyacente desciende en el mercado en una cantidad similar al pago de dividendos.

(*v*) Tiempo al vencimiento. Mientras mayor es el plazo que aún tiene de vigencia la opción, mayor es la posibilidad de ejercer, por lo tanto mayor será el precio de las opciones, tanto de compra como de venta.

(*vi*) Volatilidad del activo subyacente. La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Los incrementos en la volatilidad del precio del bien subyacente siempre tienen el efecto de que aumenta el precio de las opciones, sean estas de compra o venta, americanas o europeas, porque aumentan la posibilidad de que el precio del bien subyacente rebase el precio de ejercicio provocando que la opción sea ejercida.

Los cuatro primeros factores están relacionados con el valor intrínseco de la opción, en tanto que los dos últimos con el valor en el tiempo de la opción. Estas variables interactúan entre sí para determinar el valor de las opciones.

9.4.9.7 Modelo de Black y Scholes

El modelo de Black y Scholes es el más conocido y aplicado de los modelos de valuación en finanzas. Inicialmente fue desarrollado en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes. El modelo fue formulado para valuar opciones europeas para acciones sin pago de dividendos. Trabajos posteriores de otros investigadores han refinado el modelo y lo han hecho aplicable para el caso de opciones americanas, opciones con pago de dividendos del activo subyacente, y opciones sobre otros instrumentos, como los futuros, divisas, entre otros. En la obtención de la fórmula original se hicieron los siguientes supuestos:

(*i*) la tasa de interés a todos los plazos es constante;

(*ii*) el mercado opera en forma continua;

(*iii*) los costos de transacción e impuestos son cero;

(*iv*) la acción no paga dividendos;

(*v*) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;

(*vi*) la volatilidad de la acción es conocida y es constante durante la vida de la opción.[3]

A continuación se obtiene la fórmula de Black y Scholes bajo el enfoque probabilista. Se supone que el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato. El precio o la prima de la opción se calcula como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Con este objetivo, se determina, primero, la función de densidad del precio del subyacente en la fecha de vencimiento. Posteriormente, se calcula la integral que define el valor presente del valor intrínseco esperado, cantidad que proporciona el precio teórico de la opción.

9.4.9.7.1 Función de densidad del precio del activo subyacente en un mundo neutral al riesgo

En esta sección se obtiene la función de densidad del precio del activo subyacente bajo el supuesto de neutralidad al riesgo. Se tiene que $\ln(S_T/S_t)$ tiene una distribución normal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)$ y varianza $\sigma^2(T-t)$. Considere $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$ y su función de densidad

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{9.8}$$

Si se define ahora

$$g(\mathcal{E}) := S_T = S_t \exp\left\{ (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\ \mathcal{E} \right\}, \tag{9.9}$$

[3] Black, F. and M. Scholes, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-654.

se tiene que

$$g^{-1}(S_T) = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{9.10}$$

De esta manera, la función de densidad de S_T, dado S_t, está dada por la expresión

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \phi(g^{-1}(s))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}\right|. \tag{9.11}$$

De esta manera

$$\phi(g^{-1}(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\},$$

y la derivada indicada en la ecuación (9.11) es

$$\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(s)}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{s\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)^2\right\}. \tag{9.12}$$

Esta función de densidad se utilizará para calcular el valor esperado del valor intrínseco de una opción europea. El valor esperado del precio del subyacente al vencimiento, T, es una cantidad que sirve como referencia para calcular el precio de ejercicio de la opción. Observe primero que, a partir de (9.10), se tiene

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

lo cual implica que

$$s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}. \tag{9.13}$$

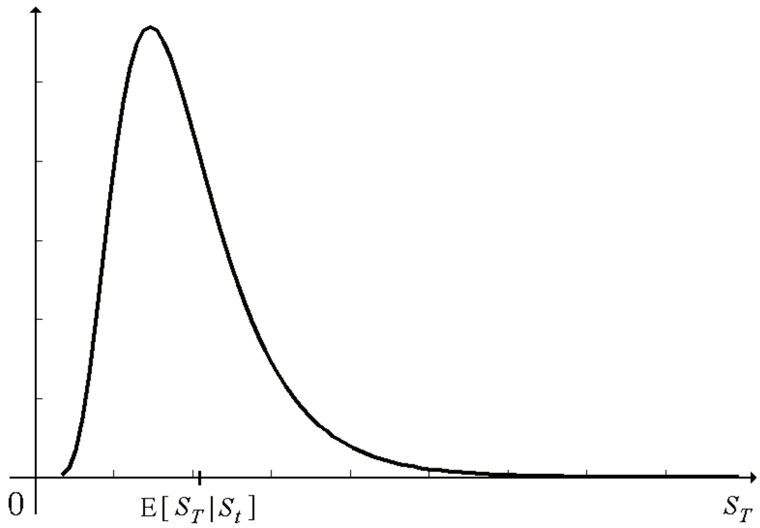
Por lo tanto, la diferencial satisface:

$$\mathrm{d}s = S_t e^{\epsilon\sigma\sqrt{T-t} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}\sigma\sqrt{T-t}\,\mathrm{d}\epsilon \tag{9.14}$$

ó

$$\mathrm{d}s = s\sigma\sqrt{T-t}\,\mathrm{d}\epsilon.$$

En la Gráfica 9.1 se puede apreciar la función de densidad de S_T, dado S_t. Se observa que la función es positivamente sesgada.



Gráfica 9.1 Función de densidad de S_T/S_t.

9.4.9.7.2 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de compra

El precio de una opción de compra europea en t con precio de ejercicio K y vencimiento en T, $c = c(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por el valor esperado del valor presente del valor intrínseco:

$$c = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}\left\{\max(S_T - K, 0)\right\}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned}
c =& e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \max(s-K,0) f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\
=& e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{s>K} s f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \mathrm{d}s \\
& - K e^{-r(T-t)} \int_{s>K} \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)^2 \right\} \mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{9.15}$$

En lo que sigue, las dos integrales de (9.15) se denotarán, respectivamente, mediante $\mathcal{I}_1$ y $\mathcal{I}_2$. Si ahora se utiliza el cambio de variable definido por (9.14), la primera integral se calcula como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 :=& e^{-r(T-t)} S_t \int_{\left\{\epsilon > \frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\sigma\sqrt{T-t}\ \epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \mathrm{d}\epsilon \\
=& S_t \int_{\left\{\epsilon-\sigma\sqrt{T-t} > \frac{\ln(K/S_t)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T-t})^2} \mathrm{d}\epsilon \\
=& S_t \int_{\left\{-\infty < u < \frac{\ln(S_t/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u,
\end{aligned}
\tag{9.16}
$$

donde se ha utilizado el hecho de que $-\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$ y el cambio de variable $u = \epsilon - \sigma\sqrt{T-t}$. Asimismo, a partir del cambio de variable de (9.14), la segunda integral satisface

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 :=& -K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{\epsilon > \frac{\ln(K/S_t)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon \\
=& -K e^{-r(T-t)} \int_{\left\{-\infty < \epsilon < \frac{\ln(S_t/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon.
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

Por lo tanto, de (9.16) y (9.17), se sigue que

$$
c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \tag{9.18}
$$

donde la función $\Phi(d)$ es la función de distribución acumulada de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir,

$$
\Phi(d) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}}\{\mathcal{E} \leq d\} = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon = 1 - \Phi(-d), \tag{9.19}
$$

$$
d_1 = d_1(S_t, t; T, K, r, \sigma) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{9.20}
$$

y

$$
\begin{aligned}
d_2 = d_2(S_t, t; T, K, r, \sigma) =& \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
=& d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

9.4.9.7.3 Valuación neutral al riesgo de una opción europea de venta

A través de un análisis similar al de la sección anterior se puede mostrar que el precio de una opción de venta del tipo europeo, $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$, está dado por

$$
p = K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1). \tag{9.22}
$$

Es importante notar que el precio de una opción europea de venta también se puede obtener a través de la condición de paridad *put-call*, $p + S_t = c + K e^{-r(T-t)}$.

9.4.9.7.4 Condición de paridad de opciones de venta y de compra

A partir de (9.18) y (9.21) se puede establecer la condición de paridad de opciones de venta y compra (*put-call*)

$$\begin{aligned} p + S_t &= K e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1) + S_t \\ &= K e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + S_t(1 - \Phi(-d_1)) \\ &= K e^{-r(T-t)}(1 - \Phi(d_2)) + S_t\Phi(d_1) \\ &= -K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + S_t\Phi(d_1) + e^{-r(T-t)}K \\ &= c + K e^{-r(T-t)}. \end{aligned} \tag{9.23}$$

La utilidad de la relación (9.23) radica en que una vez que se ha calculado el precio de opción de compra $c(S_t, t)$, el precio de una opción de venta, $p(S_t, t)$, con características similares se calcula mediante $p = c - (S_t - K e^{-r(T-t)})$ o bien $p = c - F$, donde $F = F(S_t, t)$ es el precio de un contrato *forward*.

9.4.9.8 Fórmula de Brenner y Subrahmanyam para calcular el precio aproximado de una opción europea

A continuación se desarrolla una fórmula aproximada para el precio de una opción europea de compra bajo ciertas condiciones sobre el precio de ejercicio. Esta aproximación es muy fácil de emplear y proporciona resultados, en general, satisfactorios. Suponga que el precio de ejercicio, K, es igual al precio futuro del subyacente, $S_t e^{r(T-t)}$. En este caso, se puede verificar, de forma inmediata, que

$$d_1 = \tfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}.$$

Asimismo, en virtud de (9.19), se verifica que

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = -d_1. \tag{9.24}$$

Ahora bien, dado que $\Phi(d_1) + \Phi(-d_1) = 1$, se sigue que

$$\begin{aligned} c =& S_t\left(\Phi(d_1) - \Phi(-d_1)\right) \\ =& S_t\left(1 - 2\Phi(-d_1)\right). \end{aligned} \tag{9.25}$$

La diferencial de $\Phi(-d_1)$ evaluada en cero produce

$$\begin{aligned} \Phi(-d_1) =& \Phi(0) - \Phi'(0)d_1 + o(d_1) \\ =& \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d_1 + o(d_1), \end{aligned}$$

donde $o(d_1)/d_1 \to 0$ cuando $d_1 \to 0$. Observe que la cantidad $1/\sqrt{2\pi}$ es el máximo de $\phi(d) := \Phi'(d)$, $d \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} c \approx& S_t\left[1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}d_1\right)\right] \\ =& \frac{S_t 2d_1}{\sqrt{2\pi}} \\ \approx& S_t\tfrac{2}{5}\sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned} \tag{9.26}$$

En el Cuadro 9.4 se muestra el precio de una opción con el precio de Black y Scholes dado un conjunto de parámetros. En este caso $c_{\text{BS}} = 2.792$. Si se utiliza (9.26), se encuentra un precio aproximado de 2.8.

Precios y parámetros relevantes					
S	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
100.00	102.78	0.12	0.14	0.25	2.792

Cuadro 9.4 Precio de una opción con la fórmula de Black y Scholes dado un conjunto de valores de los parámetros.

9.4.10 *Swap*

Un *swap* es un contrato entre dos partes en el que se establece la obligación bilateral de intercambiar una serie de flujos sobre un monto nocional de referencia, durante un periodo de tiempo determinado y en fechas preestablecidas.

Los *swap*s son contratos hechos a la medida de cada contraparte y comercializados en su mayoría en el mercado secundario, se consideran contratos OTC (*Over The Counter*), aunque en el MexDer se han listado algunos contratos denominados engrapados, que son considerados como un *swap*, pero al ser listados y con características establecidas, dejan de ser un instrumento OTC para convertirse en un instrumento listado.

En 1986 se creó la *International swaps and Derivatives Association, Inc.* (ISDA), dicha asociación ha establecido estándares de los contratos marco con efectos legales y cláusulas para la operación de *swap*s de cualquier tipo a nivel internacional. No obstante, en la práctica hay un número importante de características particulares que se deben negociar con la contraparte, las más importantes son la tasa de interés que prevalecerá durante la vigencia del contrato, la frecuencia de los pagos (mensual, trimestral, semestral o anual), la tasa flotante de referencia y la convención de los días por aplicar (360 ó 365 días del año).

Los *swap*s de TIIE-28 días son los derivados más comunes en México y representan uno de los mercados más profundos de los derivados OTC. Su profundidad es tal, que en la práctica sus cotizaciones se dan en tiempo real, presentándolas las principales empresas de provisión de información como *Reuters* y *Bloomberg*.

Normalmente se interpreta un *swap* como un conjunto de contratos *forward*, ya sea de divisas o de tasas de interés. Los *swap*s a diferencia de los contratos *forward* y futuros son a plazos y montos mayores. Algunos conceptos importantes en la valuación de un *swap* son los siguientes:

(*i*) Mercados OTC, de mostrador y fuera de Bolsa. Términos equivalentes que indican que las operaciones son de naturaleza privada, como en el caso de los *swap*s.

(*ii*) Liquidación en especie y en efectivo. La liquidación en especie se realiza con la entrega del bien subyacente, la liquidación en efectivo se realiza con los diferenciales de tasas de interés.

(*iii*) Posición larga. Acuerdo para recibir un bien subyacente, también significa una posición activa. En un *swap*, la posición larga se refiere a una posición activa. Ejemplo: en un *swap* de tasa de interés, comprar tasa fija significa recibir tasa fija y pagar tasa variable.

(*iv*) Posición corta. Acuerdo para entregar un bien subyacente, también significa una posición pasiva. En un *swap*, la posición corta se refiere a una posición pasiva. Ejemplo: en un *swap* de tasa de interés, vender tasa fija significa pagar tasa fija y recibir tasa variable.

En ausencia de riesgo crédito, un *swap* se puede modelar como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y el otro de tasa cupón flotante. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como “pata fija” y al bono cuponado de tasa cupón flotante como “pata flotante”, es por ello que en las siguientes dos subsecciones se hace una revisión breve sobre la valuación de bonos cuponados y bonos cuponados con tasa cupón flotante.

9.4.10.1 Bonos cuponados con tasa cupón constante

En esta sección se valúa un bono que paga cupones con tasa cupón constante. Por simplicidad, se supone que sólo se efectúan tres pagos en periodos de igual magnitud.

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga cupones en tres fechas futuras, T_1, T_2 y T_3, igualmente espaciadas. Suponga que el principal, o nominal, es $N > 0$. Si en cada una de estas fechas los cupones se calculan como

$$C_1 = R_K T_1 N, \qquad C_2 = R_K(T_2 - T_1)N \qquad \text{y} \qquad C_3 = R_K(T_3 - T_2)N,$$

donde $R_K > 0$ es una tasa de interés anualizada y constante, entonces el precio del bono, utilizando interés simple para descontar, está dado por:

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{C_1}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{C_2}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{C_3+N}{1+\widetilde{R}_3}, \tag{9.27}$$

donde

$$\widetilde{R}_i = R(0,T_i)(T_i - 0) = R(0,T_i)T_i, \qquad i = 1,2,3.$$

Si, en virtud de que T_1, T_2 y T_3 están igualmente espaciados, se reescribe $\widetilde{R}_K = R_K \Delta T_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, y $N = 1$, se sigue que

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K+1}{1+\widetilde{R}_3}, \tag{9.28}$$

ó

$$B_{\text{fija}}^{(0)} = \widetilde{R}_K\,(B_1 + B_2 + B_3) + B_3, \tag{9.29}$$

donde $B_i = B(0,T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i),\ i = 1,2,3$. De esta manera, $R(0,T)$ puede verse como una curva de ceros, asociada al bono cuponado de tasa constante, B_i, la cual puede ser una estimación con base en precios de mercado o definirse mediante algún modelo teórico.

9.4.10.2 Bonos cuponados con tasa cupón flotante

En esta sección se valúa un bono cuponado con tasa cupón flotante (también llamado FRN por las iniciales en inglés de *forward rate note*).

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga tres cupones en las fechas futuras, T_1, T_2 y T_3. Suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan como

$$C_1 = \widetilde{R}_1 N, \qquad C_2 = \widetilde{f}_{12} N \qquad \text{y} \qquad C_3 = \widetilde{f}_{23} N,$$

donde

$$\widetilde{f}_{12} = f(0,T_1,T_2)(T_2 - T_1) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{f}_{23} = f(0,T_2,T_3)(T_3 - T_2)$$

son, respectivamente, las tasas *forward* en $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$ aplicadas en sus correspondientes periodos, entonces el precio del bono satisface

$$B_{\text{flot}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23}+1)N}{1+\widetilde{R}_3}, \tag{9.30}$$

donde $R(0,T_i) = \widetilde{R}_i/T_i, i = 1,2,3$. En equilibrio, es decir, en ausencia de oportunidades de arbitraje, las tasas *forward* implícitas se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$(1+\widetilde{R}_1)(1+\widetilde{f}_{12}) = 1 + \widetilde{R}_2$$

y

$$(1+\widetilde{R}_2)(1+\widetilde{f}_{23}) = 1+\widetilde{R}_3.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{f}_{12} = \frac{1+\widetilde{R}_2}{1+\widetilde{R}_1} - 1 \tag{9.31}$$

y

$$1+\widetilde{f}_{23} = \frac{1+\widetilde{R}_3}{1+\widetilde{R}_2}. \tag{9.32}$$

Si se sustituyen (9.31) y (9.32) en (9.30), se sigue que

$$\begin{aligned}
B^{(0)}_{\text{flot}} &= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_2}\left(\frac{1+\widetilde{R}_2}{1+\widetilde{R}_1} - 1\right) + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3}\left(\frac{1+\widetilde{R}_3}{1+\widetilde{R}_2}\right) \\
&= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \left(\frac{N}{1+\widetilde{R}_1} - \frac{N}{1+\widetilde{R}_2}\right) + \frac{N}{1+\widetilde{R}_2} \\
&= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_1} \\
&= N.
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Es decir, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par. Observe que aunque el ejercicio anterior toma en cuenta tres periodos, el mismo resultado se obtiene para cualquier número de periodos. Evidentemente, si se valúa el bono inmediatamente después del primer pago y se conoce la curva de rendimiento $R(T_1, T)$, entonces el precio del bono es $B^{(1)}_{\text{flot}} = N$. Observe además que si se escribe $B_i = B(0, T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i),\ i = 1, 2, 3$, y $N = 1$, entonces, a partir de (9.33), se tiene que

$$1 = \widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3 + B_3. \tag{9.34}$$

Así, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, B_i, asociada al bono cuponado de tasa flotante.

9.4.10.3 *Swap* de tasas de interés

Las tasas de interés flotante que se emplean en los contratos *swap*s son tasas de fondeo entre instituciones financieras (*V.g.* tasas interbancarias), por ejemplo, TIIE28, LIBOR91, u otras de la misma naturaleza. Estas tasas de referencia representan el costo de fondeo de las instituciones financieras. En términos generales, la duración de los contratos tipo *swap* oscila entre 2 y 20 años, siendo los de 5 y 9 años los más populares en el mercado. La frecuencia de los pagos puede ser mensual, trimestral, semestral o anual, y usualmente es un múltiplo del plazo de la tasa de fondeo de referencia.

Los principales tipos de *swap*s de tasas de interés son los siguientes:

(*i*) *Interest rate swap*: Un agente paga tasa variable y otro paga tasa fija; los pagos se hacen en la misma divisa.

(*ii*) *Basis swap*: dos agentes pagan tasa variable; los pagos se hacen en la misma divisa.

(*iii*) *Rate collar*: uno o dos agentes pagan tasa fija, cada uno hace sus pagos a la misma tasa y ambos garantizan una tasa *cap* o una tasa *floor*.

Los *swap*s de tasa de interés se cotizan de manera estándar, de acuerdo a la cantidad de cupones o revisiones de tasa de interés cada 28 días durante 3, 6, 9 meses, un año, 2 y hasta 10 años. La nomenclatura utilizada es el número de cupones antecediendo a un "×1" (por 1). De esta manera, en el mercado se encuentran cotizaciones que van desde 3×1, 6×1, 9×1, 13×1, y asi hasta 130×1. Lo que se intercambia es el pago de la tasa de interés a un nivel fijo, por otro que se determina de manera variable de acuerdo a la TIIE de cada 28 días.

En ausencia de riesgo crédito, un *swap* de tasa de interés se puede ver como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa cupón fija y otro de tasa cupón flotante. Es usual llamar al bono cuponado de tasa cupón fija como "pata fija" y al bono cuponado de tasa cupón flotante como "pata flotante". En este sentido, las curvas de ceros de los bonos, ya sea con tasa cupón fija o flotante, pueden pensarse como "equivalentes" a las "estructuras de plazo" de la tasa de fondeo de referencia.

El valor presente de las diferencias en intereses en un *swap* de tasa de interés está dado por

$$\begin{aligned}
V_0 =& \frac{(\widetilde{R}_1 - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{(\widetilde{f}_{12} - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23} - \widetilde{R}_K)N}{1+\widetilde{R}_3}\\
=& \left(\frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{f}_{23} N}{1+\widetilde{R}_3}\right) - \left(\frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_3}\right)\\
=& \quad \left(\frac{\widetilde{R}_1 N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{f}_{23} N}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3}\right)\\
& - \left(\frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_2} + \frac{\widetilde{R}_K N}{1+\widetilde{R}_3} + \frac{N}{1+\widetilde{R}_3}\right)\\
=& B^{(0)}_{\text{flot}} - B^{(0)}_{\text{fija}}.
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Observe que para escribir el valor presente de las diferencias en intereses en un *swap* como la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa flotante y otro de tasa constante, se ha sumado y restado, en (9.35), la cantidad $N/(1+\widetilde{R}_3)$. Asimismo, si $V_0 = 0$, entonces,

$$0 = \left(\widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3\right) - \widetilde{R}_K \left(B_1 + B_2 + B_3\right), \tag{9.36}$$

donde $B_i = B(0, T_i) = 1/(1+\widetilde{R}_i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Ahora bien, de acuerdo con (9.36), la tasa *swap* de equilibrio está dada por

$$\widetilde{R}_K = \frac{\widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3}{B_1 + B_2 + B_3} = \frac{1 - B_3}{B_1 + B_2 + B_3}. \tag{9.37}$$

9.4.10.4 Valuación de un *swap* de tasa de interés

En el momento en que se pacta un *swap*, su precio es cero. Inmediatamente después, su precio ya no es cero, a menos que sea por pura casualidad. Observe que con respecto de la pata flotante, inmediatamente después de cualquier pago, el precio del bono con tasa cupón flotante es N. Por ejemplo, inmediatamente después del primer pago $B^{(t)}_{\text{flot}} = N$, $t = T_1 + \mathrm{d}T_1$ con $\mathrm{d}T_1 > 0$. Así,

$$V_t = N - \widetilde{R}_K N \left(\frac{1}{1+\widehat{R}_1} + \frac{1}{1+\widehat{R}_2}\right) - \frac{N}{1+\widehat{R}_2},$$

donde $\widehat{R}_i = R(t, T_{i+1})(T_{i+1} - t)$, $\ i = 1, 2$. Ahora bien, inmediatamente antes de T_1 se espera el pago del primer cupón, por esta razón la pata flotante vale $N + \widetilde{R}_1 N$. Para valuar el *swap*, es necesario traer $N + \widetilde{R}_1 N$ a valor presente y deducir los pagos a tasa fija, es decir,

$$V_t = (N + \widetilde{R}_1 N)\left(\frac{1}{1+\overline{R}_1}\right) - \widetilde{R}_K N \left(\frac{1}{1+\overline{R}_1} + \frac{1}{1+\overline{R}_2} + \frac{1}{1+\overline{R}_3}\right) - \frac{N}{1+\overline{R}_3},$$

donde $t = T_1 - \mathrm{d}T_1$ con $\mathrm{d}T_1 > 0$, y $\overline{R}_i = R(t, T_i)(T_i - t)$, $i = 1, 2, 3$.

9.4.10.5 *Swap* de tipo de cambio

Otro tipo de *swap* común en el mercado es el *swap* de tipo de cambio (divisas). En este tipo de contrato las partes intercambian el principal y los intereses en una divisa por el principal y los intereses en otra divisa. Usualmente, los principales se intercambian al final del contrato. En este caso las dos tasas son flotantes y, por simplicidad, serán etiquetadas como doméstica y extranjera.

El precio de un *swap* de tipo de cambio con dos patas flotantes, en moneda doméstica está dado por

$$v_0 = B^{(0)}_{d,\text{flot}} - S_0 B^{(0)}_{f,\text{flot}},$$

donde $B^{(0)}_{d,\text{flot}}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda doméstica, $B^{(0)}_{f,\text{flot}}$ es un bono cuponado con tasa cupón flotante en moneda extranjera, S_0 es el tipo de cambio de contado, los nominales se calculan de tal manera que $N_d = S_T N_f$ donde S_T es una estimación del tipo de cambio, en términos de las tasa de interés doméstica y extranjera, en la fecha de vencimiento del contrato. Por supuesto, *swap*s con dos patas fijas o con una pata fija y la otra flotante se valúan de manera similar. Es importante mencionar que en ocasiones también hay intercambio de principales al inicio del contrato.

Los principales tipos de *swap* de divisas son los siguientes:

(*i*) *Cross-Currency Rate swap*: Un agente paga tasa fija y otro agente paga tasa variable; los pagos se hacen en diferentes divisas.

(*ii*) *Cross-Currency Basis swap*: Dos agentes pagan tasa variable; los pagos se hacen en diferentes divisas.

(*iii*) *Currency swap*: Dos agentes pagan tasa fija; los pagos se hacen en diferentes divisas.

9.5 Bibliografía

Black, F. and M. Scholes (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Brenner, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). “A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model”. *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.

Hull, J. C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V.

Palacios Paz, Ana Bertha, Modelos de Riesgo de Crédito. Tesis de Licenciatura, UNAM., México, 2002.

Venegas Martínez, Francisco (2006). “Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre”. International Thomson Editores, México.

9.6 Ejercicios

9.1 Considere un contrato *forward* sobre dólar con vencimiento dentro de tres meses. Si el tipo de cambio *spot* es de 10.91 pesos/dólar y las tasas de interés de CETES y T-bills son, respectivamente, 0.09 y 0.049. Determine el tipo de cambio *forward* (suponga tasas de interés simples).

Solución:

$$\begin{aligned} C_{f(0,0.25)} &= 10.91\left(\frac{1+0.09(0.25)}{1+0.049(0.25)}\right) \\ &= 11.02. \end{aligned}$$

9.2 Considere un contrato *forward* sobre un bono cupón cero (un CETE a 90 días). El contrato vence dentro de tres meses. Si el nominal del bono es 10.00 pesos y las tasas de interés a tres y seis meses son, respectivamente, 0.067 y 0.075. Determine el precio *forward* del bono cupón cero (suponga tasas de interés simples).

Solución:

$$\begin{aligned} F_{(0,0.25)} &= 10.00\left(\frac{1+0.067(0.25)}{1+0.075(0.25)}\right) \\ &= 9.98. \end{aligned}$$

9.3 Considere un contrato futuro sobre el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC). Si el contrato establece que el valor de cada punto del IPC es de 10.00, suponga que el contrato inicia "hoy" ($t = 0$) y que no hay pago de dividendos. Si el valor del IPC es de 29345 puntos y la tasa de interés libre de riesgo es $r = 0.08581$. Determine el precio futuro del IPC dentro de 7 semanas.

Solución:

$$F_{(0,49/360)} = 29345 \times \left[1 + 0.08581\left(\frac{49}{360}\right)\right] = 29687.74.$$

9.4 Obtenga el precio de una opción europea de venta mediante el cálculo del siguiente valor esperado:

$$p = \mathrm{E}\left\{e^{-r(T-t)}\max(K - S_T, 0)\right\} = e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max(K - s, 0) f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s,$$

donde $f_{S_T|S_t}(s|S_t)$ está dada como (9.12).

9.5 Con la información de la siguiente tabla obtenga el precio de la opción con la fórmula de Brenner y Subrahmanyam.

Precios y parámetros relevantes					
S	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
84.00	89.95	0.12	0.16	0.5	3.61

9.6 Una empresa tiene una deuda a un plazo de 112 días (4 periodos de 28 días), con pagos de intereses a TIIE-28 cada 28 días y un pago del principal al vencimiento de $200,000,000. El objetivo de la empresa es tener una cobertura por cambios en tasas y negocia con un banco un *swap* de tasa de interés, en el que la empresa cambie su deuda de tasa flotante a tasa fija y, por tanto realice un pago constante durante el plazo de 112 días de su deuda. Las características del *swap* de tasa son las siguientes

Principal	\$200,000,000
Tasa flotante	TIIE-28 + 2.9%
TIIE 28 días actual	7.71%
Convención de días/año	360
Fecha de firma del contrato	01/01
Fecha efectiva de inicio	03/01
Fecha de vencimiento	22/04
Frecuencia de pago	Cada 28 días

Suponga que los nodos de TIIE-28 son los siguientes

Plazo	TIIE-28 %
28	7.710000
56	7.763423
84	7.817296
112	7.861509

Solución: El banco para asegurar la tasa del crédito debe pactar una serie de *forwards* que se muestran a continuación

	Tasa *forward* %	Tasa *forward* efectiva %
$S_{28\times 28}$	7.710000	0.599667
$FRA_{28\times 56}$	7.770251	0.604353
$FRA_{56\times 84}$	7.830478	0.609037
$FRA_{84\times 112}$	7.850943	0.610629

La tasa *forward* efectiva se utiliza para calcular los flujos de la "pata flotante", por ejemplo, para el año 1 es $200000000 \times 0.005997 = 1199333.33$ y así sucesivamente. El diferencial fijo en este caso es: $0.029 \times (28/360) \times 200000000 = 451111.11$.

Como se ha mostrado el valor presente de las diferencias en intereses en un *swap* es la diferencia de dos bonos cuponados, uno de tasa flotante y otro de tasa fija

$$V_0 = B^{(0)}_{\text{flot}} - B^{(0)}_{\text{fija}}$$

Una vez que se tienen los datos para encontrar la tasa *swap*, el precio del $B^{(0)}_{\text{flot}}$ es:

Plazo	Flujo	Flujo+diferencial	Valor presente
28	1199333.33	1650444.44	1640606.28
56	1208705.71	1659816.82	1640011.33
84	1218074.31	1669185.42	1639284.29
112	201221257.78	201672368.90	196857619.80
			$B^{(0)}_{\text{flot}}$=201777521.69

Ahora se necesita calcular el flujo fijo α que satisface que $B^{(0)}_{\text{flot}} = B^{(0)}_{\text{fija}}$ como sigue:

$$\begin{aligned}201777521.69 = {} & \frac{\alpha}{1+0.077100(28/360)} + \frac{\alpha}{1+0.077634(56/360)} + \frac{\alpha}{1+0.078173(84/360)} \\ & + \frac{\alpha}{1+0.078615(112/360)} + \frac{200000000}{1+0.078615(112/360)}\end{aligned}$$

de donde se tiene que $\alpha = 1662896.95$.

Por tanto, la empresa tendrá que hacer pagos mensuales de \$1,662,896.95, lo cual equivale a una tasa nominal fija anual de

$$\bar{R} = \frac{1662896.95}{200000000} \times \left(\frac{360}{28}\right) = 10.69\%,$$

la contraparte, en este caso el banco, deberá venderle a la empresa el *swap* con una tasa fija del 10.69% anual contra una tasa flotante de TIIE+2.9%.

9.7 Una empresa tiene una deuda con un banco a un plazo de 4 meses, con pagos de intereses a TIIE-28 cada 30 días y un pago del principal al vencimiento de \$10,000,000. El objetivo de la empresa es tener una cobertura por cambios en tasas y negocia con un banco un *swap* de tasa de interés, en el que la empresa cambie su deuda de tasa flotante a tasa fija y, por tanto realice un pago constante durante el plazo de 4 meses de su deuda. Las características del *swap* de tasa son las siguientes:

Principal	\$10,000,000
Tasa flotante	TIIE-28 + 3.6%
TIIE 28 días actual	7.7138%
Convención de días/año	360
Fecha de firma del contrato	12/02
Fecha efectiva de inicio	14/02
Fecha de vencimiento	16/06
Frecuencia de pago	Cada 30 días

Suponga que los nodos de TIIE-28 son los siguientes:

Plazo	TIIE-28 %
30	7.713800
60	7.711100
90	7.826700
120	7.874200

Obtenga el pago mensual que la empresa deberá hacer y la tasa nominal fija anual.

9.8 Una empresa tiene una emisión de 10 millones de euros en obligaciones emitidas al 5% anual, y con vencimiento de cinco años, estima que las tasas de interés van a bajar en los próximos años. Por ello, solicita cotización a un banco para realizar un *swap* de tasas de interés. El banco le cotiza Euribor anual (A/360) contra tipo fijo del 3.80% a cinco años. Si los sucesivos Euribor anuales son:

Plazo	Euribor %
1	2.80
2	4.35
3	3.60
4	2.90
5	2.50

(i) Obtener el costo de financiamiento final R de la empresa durante el periodo considerado.

(ii) Obtener las sucesivas liquidaciones por diferencias del *swap*.

Solución:

(i) Los pagos anuales por la deuda que tiene la empresa son: $10000000 \times 0.05 = 500000$. Si a esto se le suma la cotización del banco: $10000000 \times 0.038 = 380000$.

El costo por la tasa variable para el año 1 es:

$$10000000 \times 0.028 \times \left(\frac{360}{365}\right) = 283888.89, etc.$$

Los flujos netos para el *swap* se resumen en el siguiente cuadro:

Año	Flujo (tasa variable)	Flujo (cotización)	Deuda (anual)	Flujo neto
1	283888.89	-380000	500000	403888.89
2	441041.67	-380000	500000	561041.67
3	365000.00	-380000	500000	485000.00
4	294027.78	-380000	500000	414027.78
5	253472.22	-380000	500000	10373472.22

Para encontrar el costo de financiamiento total se debe calcular la tasa que satisface

$$10000000 = \frac{403888.89}{1+R} + \frac{561041.67}{(1+R)^2} + \frac{485000.00}{(1+R)^3} + \frac{414027.78}{(1+R)^4} + \frac{10373472.22}{(1+R)^5}$$

al resolver la expresión anterior resulta que $R = 4.492351\%$.

(ii) Las liquidaciones por diferencias del *swap* se muestran en el siguiente cuadro:

Año	Tasa fija	Tasa flotante	Liquidación por diferencias
1	-380000	283888.89	-96111.11
2	-380000	441041.67	61041.67
3	-380000	365000.00	-15000.00
4	-380000	294027.78	-85972.22
5	-380000	253472.22	-126527.78

A partir del cuadro anterior se observa que sólo en el año 2 hay una diferencia a favor del banco y en los demás las diferencias son a favor de la empresa.

9.9 Las empresas A y B tienen las siguientes posibilidades de endeudamiento a 2 años para 1 millón de euros:

Empresa	Tasa fija	Tasa variable
A	5.75% con pago semestral de intereses	Euribor semestral + 20 p.b.
B	6.15% con pago semestral de intereses	Euribor semestral + 50 p.b.

La empresa A decide endeudarse a tasa variable, mientras que la empresa B decide endeudarse a tasa fija.

(i) ¿Qué procedimiento podrían utilizar estas empresas para abaratar su financiamiento? Describirlo gráficamente;

(ii) ¿Cuál sería el costo financiero en tasa efectiva anual de la empresa B, si ambas empresas deciden repartirse a partes iguales el abaratamiento obtenido?

(iii) En los cuatro semestres, las cotizaciones del euribor han sido las siguientes:

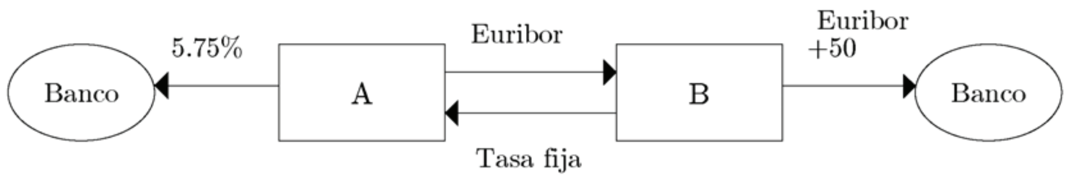
Semestre	Euribor %
1	3.5
2	3.9
3	3.3
4	3.2

Calcular cuáles han sido los flujos reales que se han producido entre las empresas.

(iv) ¿Cuál ha sido la tasa efectiva global del financiamiento de la empresa durante los dos años?

Solución:

(i) La empresa A se endeuda a tasa fija, y hace un *swap* con B para pagar tasa variable, B se endeuda a tasa variable, y hace un *swap* con A para pagar tasa fija. Gráficamente,



(ii) Si A se endeudara a tasa variable pagaría Euribor + 0.20 semestral y si B se endeudara a tasa fija pagaría 6.15% semestral, lo que da un costo total de:

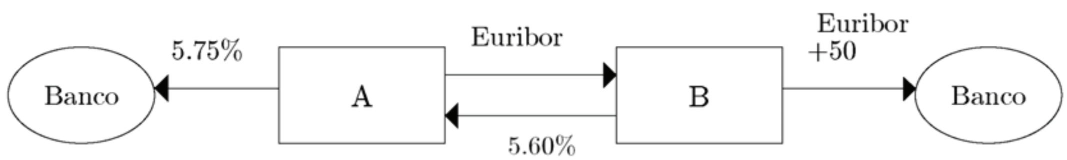
$$\text{Euribor } + 6.35\% \text{ semestral.}$$

Por otro lado, con el *swap* A paga 5.75 semestral y B paga Euribor + 0.50 semestral, lo que da un total de:

$$\text{Euribor } + 6.25\% \text{ semestral,}$$

por lo que el beneficio es de: $6.35\% - 6.25\% = 0.10\%$, y el beneficio es de $0.10/2 = 0.05\%$ para cada empresa.

Para la empresa B se tiene que: Euribor $+ 0.50 + R -$ Euribor $= 6.15 - 0.05 = 6.10$, por lo tanto, la tasa fija R que B paga es de $R = 5.6\%$ como se muestra en la siguiente gráfica:



(*iii*) Los flujos reales se muestran en el siguiente cuadro:

Tasa *swap* %	Tasa Euribor %	Diferencia para B	En euros
5.60	3.5	2.10	10645.83
5.60	3.9	1.70	8618.06
5.60	3.3	2.30	11659.72
5.60	3.2	2.40	12166.67

(*iv*) Para calcular la tasa efectiva global sea: $0.061 \times \left(\frac{365}{360}\right) = 0.061847$, entonces la tasa efectiva global es

$$\left[1 + \frac{0.061847}{2}\right]^2 = 1 + R_{ef}$$
$$\Rightarrow R_{ef} = \left[1 + \frac{0.061847}{2}\right]^2 - 1 = 6.280349\%.$$

9.10 Una empresa mexicana tiene una deuda en dólares a una tasa LIBOR+1.50% a un plazo de 112 días (4 periodos de 28 días). Los riesgos que está enfrentando la empresa son los siguientes:

(*i*) Un aumento en la tasa LIBOR;

(*ii*) Un aumento en el tipo de cambio.

Con el objetivo de evitar este tipo de riesgos, la empresa cotiza un "Cross-Currency Rate *swap*" con un banco que le ofrezca cambiar la tasa LIBOR por una tasa fija en pesos. Las características del CCRS son las siguientes:

Principal	50,000 USD
Tasa flotante	LIBOR + 1.5%
TIIE 28 días actual	1.3%
Convención de días/año	360
Fecha de firma del contrato	01/01
Fecha efectiva de inicio	03/01
Fecha de vencimiento	22/04
Frecuencia de pago	Cada 28 días

Suponga que los nodos de LIBOR y TIIE-28 son los siguientes:

Plazo	LIBOR	TIIE
28	5.495500%	7.710000%
56	5.505200%	7.763400%
84	5.505600%	7.817300%
112	5.473100%	7.861500%

Solución: El banco tendrá que asegurar la tasa del crédito pactando una serie de *forwards* a tasa LIBOR como sigue:

	LIBOR *forward* %	LIBOR *forward* efectiva %
$S_{28\times28}$	5.495500	0.427428
$FRA_{28\times56}$	5.491428	0.427111
$FRA_{56\times84}$	5.459646	0.424639
$FRA_{84\times112}$	5.307419	0.412799

El banco también tendrá que asegurar el tipo de cambio pactando una serie de *forwards* de tipo de cambio:

	Tipo de cambio *forward*
S_{F28}	10.868608
S_{F56}	10.887790
S_{F84}	10.907782
S_{F112}	10.929272

La tasa *forward* efectiva se utiliza para calcular un elemento de los flujos de la "pata flotante", por ejemplo, para el año 1 es $50000 \times 0.004275 \times 10.868608 = 2322.77$ y así sucesivamente. El diferencial es $0.015 \times (28/360) = 0.001167$. El otro elemento para el año 1 en este caso es: $0.015 \times (28/360) \times 50000 \times 10.868608 = 634.00$, etc. Una vez que se han calculado las tasas *forward*, el diferencial y los tipos de cambio *forward* en los diferentes periodos, se calculan los flujos de pago de interés en cada uno de ellos y se traen a valor presente con las tasas domésticas dado que los flujos ya están en pesos, como se muestra a continuación:

Plazo	$N_f \times$LIBOR-fwd efva$\times S_F$	diferencial$\times N_f \times S_F$	Flujo	Valor Presente
28	2322.77	634.00	2956.77	2939.15
56	2325.15	635.12	2960.27	2924.95
84	2315.94	636.29	2952.22	2899.34
112	2255.80	637.54	2893.34	2824.26
			546463.60	533417.28
				$S_0 B_{f,\text{flot}}^{(0)}$=545004.97

Ahora se necesita calcular el flujo fijo α que satisface que $S_0 B_{\text{flot}}^{(0)} = B_{\text{fija}}^{(0)}$ como sigue

$$\begin{aligned} 545004.97 = {} & \frac{\alpha}{1+0.077100(28/360)} + \frac{\alpha}{1+0.077634(56/360)} + \frac{\alpha}{1+0.078173(84/360)} \\ & + \frac{\alpha}{1+0.078615(112/360)} + \frac{50000}{1+0.078615(112/360)} \end{aligned}$$

de donde se tiene que $\alpha = 3922.69$.

Por tanto, la empresa tendrá que hacer pagos mensuales de \$3,922.69, lo cual equivale a una tasa nominal fija anual de

$$\bar{R} = \frac{3922.69}{50000 \times 10.85} \times \left(\frac{360}{28}\right) = 9.30\%,$$

de esta manera la empresa cambió de una deuda pactada en dólares por 50000 USD a tasa flotante (LIBOR), a una deuda en pesos y a tasa fija.

Capítulo 10

Griegas del modelo de Black y Scholes

Conceptos básicos:

- ✓ **Griegas de Black y Scholes**
- ✓ **Condición de paridad entre opciones europeas de venta y compra**
- ✓ **Cobertura Delta**

10.1 Introducción

En este capítulo se estudia la sensibilidad del precio de una opción europea ante cambios en las diferentes variables y parámetros que intervienen en el modelo de Black y Scholes. Las razones de cambio del precio de una opción, ya sea de compra o de venta, con respecto a las variables relevantes del modelo, *ceteris paribus*, reciben nombres de letras griegas. Estas razones de cambio juegan un papel importante en la administración del riesgo de mercado: coberturas delta, gama y vega. Se puede afirmar que es más importante hacer una cobertura correcta que valuar un contrato con precisión, puesto que si la cobertura es precisa se habrá reducido o eliminado la incertidumbre futura, lo cual resulta en una ganancia o una pérdida que es conocida en el momento en que se compra o vende un contrato, pero si la cobertura es imprecisa puede haber una pérdida mayor.

En el marco de la metodología de Black y Scholes, si S_t es el de un activo subyacente, una acción que no paga dividendos, el precio, $c = c(S_t, t; r, \sigma, T, K)$, de una opción europea de compra sobre dicha acción, con emisión en t, vencimiento en T y precio de ejercicio K, está dado por:

$$c = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \tag{10.1}$$

donde

$$d_1 = d_1(S_t, t; r, \sigma, T, K) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{10.2}$$

$$d_2 = d_2(S_t, t; r, \sigma, T, K) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{10.3}$$

y

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon = \mathbb{P}_{\mathcal{E}} \left\{ \mathcal{E} \leq d \right\}, \tag{10.4}$$

donde $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

10.2 Lema fundamental de las griegas del modelo de Black y Scholes

En esta sección se demuestra un lema de gran utilidad en el cálculo de las griegas del modelo de Black y Scholes. El lema establece que si

$$c = S_t\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{10.5}$$

entonces

$$S_t\Phi'(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2) = 0, \tag{10.6}$$

donde

$$\Phi'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2}. \tag{10.7}$$

En efecto, en virtud de (10.3), se sigue que

$$\begin{aligned}
d_2^2 &= (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2 \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}d_1 + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right] + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2r(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2\ln e^{r(T-t)} \\
&= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{K}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\tfrac{1}{2}d_2^2 = -\tfrac{1}{2}d_1^2 + \ln\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{K}\right),$$

lo cual conduce, a su vez, a

$$e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{S_te^{r(T-t)}}{K}\right). \tag{10.8}$$

Observe ahora que, a partir de (10.7) y (10.8), se sigue el resultado establecido en (10.6).

10.3 Griegas de una opción europea de compra

A continuación se obtienen las griegas de una opción europea de compra.

10.3.1 La Delta de una opción de compra, Δ_c

El cambio del precio de una opción de compra europea con respecto a un cambio en el precio del subyacente, *ceteris paribus*, juega un papel muy importante en la elaboración de estrategias de cobertura con opciones, la llamada cobertura Delta. Esta razón de cambio entre el precio de la opción y el precio del subyacente se denota por $\Delta_c \equiv \partial c/\partial S_t$ y se calcula como:

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} = \Phi(d_1) + S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K\,e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t}.$$

Observe ahora que a partir de (10.3), se tiene que

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma S_t \sqrt{T-t}}.$$

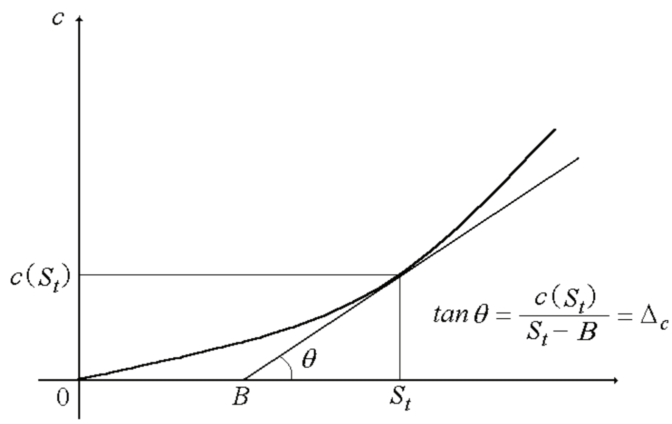
En consecuencia,

$$\Delta_c = \Phi(d_1) + [S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi'(d_2)] \frac{\partial d_1}{\partial S_t}.$$

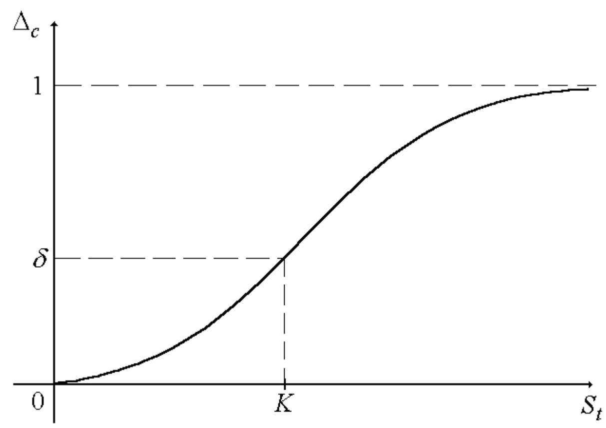
En virtud del lema fundamental de las griegas, así como de (10.6), se concluye un primer resultado relevante,

$$0 \leq \Delta_c = \Phi(d_1) \leq 1. \tag{10.9}$$

Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y el precio del activo subyacente. Un valor grande de Δ_c significa que el precio de la opción es muy sensible a cambios en el precio del subyacente. Recíprocamente, si la Δ_c es pequeña, entonces un cambio en el precio del activo subyacente afecta poco al precio de la opción. Claramente, la pendiente de la recta tangente a c en S_t está dada por Δ_c, como se muestra en la Gráfica 10.1. Observe también que Δ_c indica la probabilidad de que la opción sea ejercida.



Gráfica 10.1 Δ_c es la pendiente de la recta tangente a c en S_t.

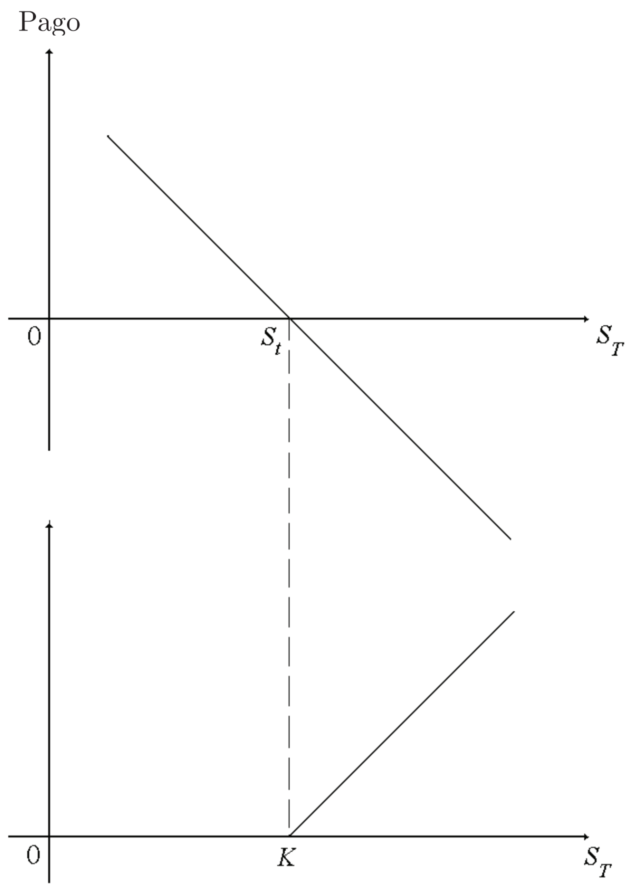


Gráfica 10.2 Δ_c como función de S_t.

La Gráfica 10.2 muestra a Δ_c como función de S_t. Observe que si $S_t \to 0$, entonces $d_1 \to -\infty$, en cuyo caso $\Delta_c = \Phi(d_1) \to 0$, y que si $S_t \to \infty$, entonces $d_1 \to \infty$, así $\Delta_c = \Phi(d_1) \to 1$. En particular, si $S_t = K$, entonces

$$\delta \equiv \Delta_c(K) = \Phi\left(\frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

A partir del modelo de Black y Scholes, es posible construir un portafolio libre de riesgo al combinar una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente con una posición larga sobre una opción europea de compra en el mismo subyacente. Si al recomprar el activo subyacente para ser devuelto a la contraparte de la venta en corto, el precio se ha incrementado con respecto al precio inicial pactado en la venta en corto, entonces se produce una pérdida. En este caso, se ejerce la opción a fin de compensar dicha pérdida con una ganancia de magnitud igual al valor intrínseco de la opción. En otras palabras, una operación de venta en corto de Δ_c unidades del subyacente queda cubierta tomando una posición larga sobre una opción del mismo subyacente (véase la Gráfica 10.3). Ahora bien, dado que $0 < \Delta_c < 1$, se tiene que una opción cubre solamente una fracción Δ_c del subyacente. Por último, es importante destacar que la cobertura es efectiva solamente en un intervalo pequeño de tiempo, de longitud $[t, t + \mathrm{d}t]$. Conforme el tiempo transcurre, la cobertura se deteriora y será necesario rebalancear el portafolio.



Gráfica 10.3 Perfiles de ganancia en un portafolio de cobertura Delta.
La gráfica superior representa una operación de venta en corto,
la inferior una posición larga sobre una opción de compra.

Para una opción que está fuera del dinero (*out of the money*) tiene delta cercana a cero porque no es muy sensible a cambios en el precio del activo subyacente. Para una opción que está dentro del dinero (*in the money*) tiene delta cercana a +1 o -1 porque se mueve según el precio del activo subyacente. La delta de una opción que está en el dinero (*at the money*) tiende a acercarse a 0.5.

La delta de un portafolio de opciones es la suma de las deltas de todas las posiciones individuales, esta relación se establece como:

$$\Delta_P = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i,$$

donde:

Δ_P = delta del portafolio;

w_i = peso de la opción i (valor nominal de la opción / valor nominal del portafolio);

Δ_i = delta de la i-ésima opción en el portafolio.

Observe también que la elasticidad de c con respecto a S_t, es decir la razón de cambios porcentuales entre c y S_t, está dada por

$$\eta_{c,S} = \frac{\partial \ln(c)}{\partial \ln(S_t)} = \frac{\frac{\partial c}{c}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = \Phi(d_1)\frac{S_t}{c}.$$

Equivalentemente,

$$\eta_{c,S} = \frac{S_t\Phi(d_1)}{S_t\Phi(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)}.$$

Por último, si se definen los ponderadores

$$\omega_1 = \frac{\Phi(d_1)}{(\Phi(d_1) + \Phi(d_2))} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 1 - \omega_1 = \frac{\Phi(d_2)}{(\Phi(d_1) + \Phi(d_2))}.$$

Se puede escribir

$$c = (\Phi(d_1) + \Phi(d_2))\left(\omega_1 S_t - \omega_2 K\,e^{-r(T-t)}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\eta_{c,S} &= \frac{\omega_1 S_t}{\omega_1 S_t - \omega_2 K\,e^{-r(T-t)}}\\ &= \left[1 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\frac{K\,e^{-r(T-t)}}{S_t}\right]^{-1}.\end{aligned}$$

10.3.2 La Gamma de una opción de compra, Γ_c

La sensibilidad de la cobertura Δ_c con respecto a un cambio en el precio del subyacente, se define por $\Gamma_c \equiv \partial^2 c/\partial S_t^2$. Claramente, si Γ_c es pequeña, Δ_c cambia lentamente cuando cambia el precio del activo subyacente, en cuyo caso el rebalanceo (cambio en el número de unidades del subyacente y la opción) en el portafolio no tiene que ser frecuente. Si, por el contrario, Γ_c es grande, entonces Δ_c es muy sensible a cambios en el precio del subyacente y el rebalanceo tiene que hacerse frecuentemente. En este caso, existe una exposición importante al riesgo mercado cuando la cobertura Δ_c se mantiene sin cambios durante períodos prolongados de tiempo. En la práctica, la posición en una opción no se ajusta con frecuencia por los costos de transacción. Γ_c se calcula como sigue

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\right) = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_t} = \Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}.$$

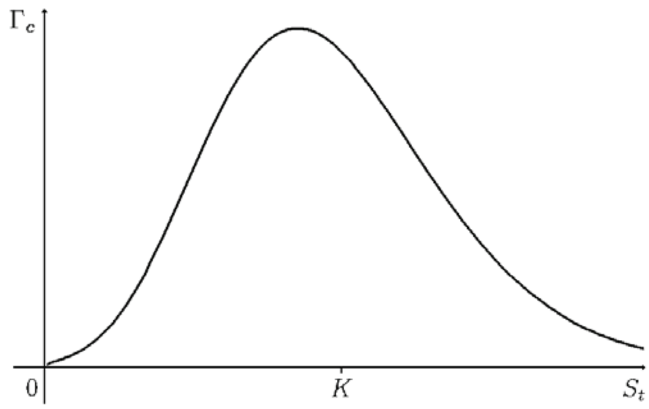
Es decir,

$$\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} > 0. \tag{10.10}$$

Observe que

$$\frac{\partial \Gamma_c}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \frac{S_t \Phi''(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - \Phi'(d_1)}{S_t^2}.$$

La Gráfica 10.4 muestra Γ_c como función de S_t.



Gráfica 10.4 Γ_c como función de S_t.

Para una opción que está fuera o dentro del dinero (*out of the money* o *in the money*) tiene *Gamma* cercana a cero porque no es muy sensible a cambios en el activo subyacente.

Para una opción en el dinero (*at the money*), particularmente donde el tiempo para el vencimiento es relativamente corto tienen la *Gamma* más alta, reflejando el hecho que la opción es ejercida o expira sin ejercerse y la *Delta* resultante tenderá a 1 (en el caso de ser ejercida) o a 0 (en el caso de no ser ejercida).

10.3.3 La Vega de una opción de compra, v_c

Uno de los supuestos del modelo de Black y Scholes es que la volatilidad se mantiene constante en el tiempo. Sin embargo, en la práctica la volatilidad casi nunca es constante. No sólo es difícil de medir en cualquier tiempo; sino que es más difícil de predecir su comportamiento futuro. La razón de cambio del precio de una opción europea con respecto a la volatilidad del subyacente, se denota por v_c, se lee la "vega" de la opción, y se calcula como

$$v_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t \Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$$

y

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}. \tag{10.11}$$

En consecuencia,

$$v_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \left(S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\sqrt{T-t}.$$

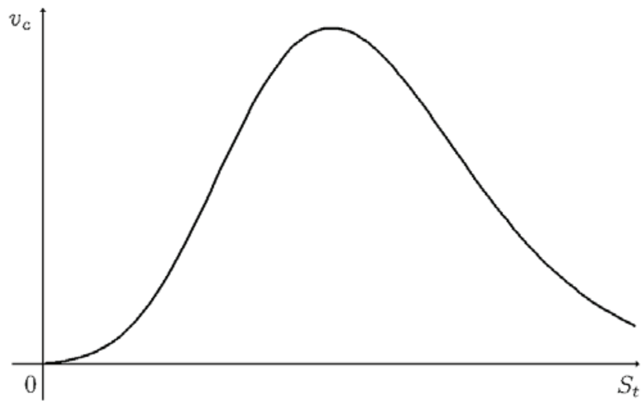
Con base en (10.6), se tiene que

$$v_c = K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\sqrt{T-t}. \tag{10.12}$$

Equivalentemente,

$$v_c = S_t \Phi'(d_1)\sqrt{T-t} > 0.$$

Es decir, existe una relación directa entre el precio de la opción y la volatilidad del subyacente. Observe que si v_c es grande, entonces un cambio en la volatilidad impacta significativamente al precio de la opción. La Gráfica 10.5 muestra v_c como función de S_t. Se observa que primero crece y después decrece si el subyacente aumenta. Si la opción está fuera del dinero, entonces no será ejercida. Si la opción está dentro del dinero, es casi seguro que será ejercida. En este caso el tenedor de la opción obtiene el subyacente con certeza, pero el valor del subyacente no depende de su volatilidad. En consecuencia, la volatilidad impacta poco si hay cambios en el precio del subyacente.



Gráfica 10.5 v_c como función de S_t.

10.3.4 La Theta de una opción de compra, Θ_c

La razón de cambio del precio de la opción y la fecha de vencimiento, manteniendo todas las otras variables fijas, se denota por θ_c y se calcula mediante

$$\frac{\partial c}{\partial T} = S_t \Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} - K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} + rK e^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

Ahora bien, como $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, entonces

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}},$$

por lo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial T} = &\left(S_t \Phi'(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial T} + rK e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\\ &+ \frac{K e^{-r(T-t)}\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}.\end{aligned}$$

En virtud de (10.6), se sigue que

$$\begin{aligned}\theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= rK e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{K e^{-r(T-t)}\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\\ &= K e^{-r(T-t)}\left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned} \tag{10.13}$$

La variación de c al transcurrir el tiempo, denotada por Θ_c, está dada por

$$\Theta_c = \frac{\partial c}{\partial t} = -K\,e^{-r(T-t)}\left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right). \tag{10.14}$$

En otras palabras, Θ_c es el cambio en el precio de la opción con respecto a una reducción en la vida del contrato. Claramente, se cumple la siguiente igualdad:

$$\Theta_c = -\theta_c. \tag{10.15}$$

El signo de Θ_c es ambiguo, es decir, no se puede determinar de antemano si una disminución en la fecha de vencimiento va a incrementar o disminuir el precio de la opción.

Por último, note que la ecuación diferencial parcial de segundo orden y parabólica para el precio de una opción de compra, determinada con la metodología de Black y Scholes[1], se puede reescribir en términos de las griegas Δ_c, Γ_c y Θ_c como

$$\Theta_c + \tfrac{1}{2}\Gamma_c\sigma^2 S_t^2 + \Delta_c r S_t - rc = 0,$$

con la condición $c(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$.

10.3.5 La Kappa de una opción de compra, κ_c

La variación de c con respecto de K, está dada por

$$\begin{aligned}\kappa_c \equiv \frac{\partial c}{\partial K} &= S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial K} - K\,e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial K} - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\\ &= \Big(S_t\Phi'(d_1) - K\,e^{-r(T-t)}\Phi'(d_1)\Big)\frac{\partial d_1}{\partial K} - e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\\ &= -e^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < 0.\end{aligned} \tag{10.16}$$

Por lo tanto, existe una relación inversa entre el precio de ejercicio y el precio de la opción. Note que para una opción europea el precio de ejercicio está dado.

10.3.6 La Rho de una opción de compra, ρ_c

La variación de c con respecto de r, está dada por

$$\frac{\partial c}{\partial r} = S_t\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - K\,e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} + K\,e^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2).$$

Dado que

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$$

y junto con (10.6), se tiene que

$$\rho_c \equiv \frac{\partial c}{\partial r} = K\,e^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2) > 0. \tag{10.17}$$

Es decir, existe una relación directa entre la tasa de interés y el precio de la opción: si r crece, c aumenta, y si r decrece, c disminuye. En la práctica se utiliza una estructura de plazos de tasas de interés, lo que significa una tasa que depende del tiempo: $r(t)$, por lo que ρ sería entonces

[1] La ecuación diferencial parcial es $\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t}S_t r - rc = 0$.

la sensibilidad en el nivel de las tasas suponiendo un cambio paralelo en las tasas a todos los plazos, por lo que se debe tener cuidado para cuales contratos se mide ρ.

10.3.7 Ejemplo numérico

El Cuadro 10.1 muestra el precio de una opción europea de compra y sus griegas.

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
40.00	40.00	0.12	0.30	0.25	2.994
Griegas					
Δ	Γ	v	Θ	κ	ρ
0.608	0.064	7.683	7.170	-0.533	5.335

Cuadro 10.1 Precio de la opción de compra europea y las griegas.

La interpretación de las griegas del cuadro anterior es la siguiente:

(*i*) *Delta*: Un cambio instantáneo \$1 en el precio del subyacente conduce a un cambio 0.608 centavos en el precio de la opción;

(*ii*) *Gamma*: El cambio en la delta para un cambio de \$1 en el precio del subyacente es 0.064;

(*iii*) *Vega*: El precio de la opción se incrementa en \$7.683 para un incremento unitario en la desviación estándar; por lo que al utilizar interpolación lineal, un error de 0.01 en la volatilidad (*i.e.* si la volatilidad es realmente 0.30 ó 0.31) conducirá a un error de cerca 7.6 centavos en el precio de la opción;

(*iv*) *Theta*: El precio de la opción decrece a la tasa de \$7.17 por año; por lo que, al utilizar interpolación lineal, para una semana el precio de la opción decrecerá en 10.8 centavos siempre que los otros parámetros no cambien;

(*v*) *Kappa*: Si el precio de ejercicio se incrementa en \$1 el precio de la opción se reduce en 53.3 centavos;

(*vi*) *Rho*: Para un incremento de una unidad en la tasa de interés el precio de la opción se incrementará en \$5.335, por lo que; al utilizar interpolación lineal, si la tasa de interés fuera realmente 13%, el precio de la opción se incrementaría en aproximadamente cinco centavos.

10.4 Griegas de una opción europea de venta

En esta sección se calculan las griegas para una opción europea de venta (*put*). En este caso, el precio teórico de una opción de venta obtenido mediante la metodología de Black y Scholes $p = p(S_t, t; T, K, r, \sigma)$ satisface

$$p = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1). \tag{10.18}$$

Con base en (10.1) y (10.18), se sigue que

$$\begin{aligned} c - p &= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + S_t\Phi(-d_1) \\ &= S_t\left(\Phi(d_1) + \Phi(-d_1)\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\Phi(d_2) + \Phi(-d_2)\right) \\ &= S_t - Ke^{-r(T-t)}, \end{aligned}$$

es decir,

$$p + S_t = c + Ke^{-r(T-t)}. \tag{10.19}$$

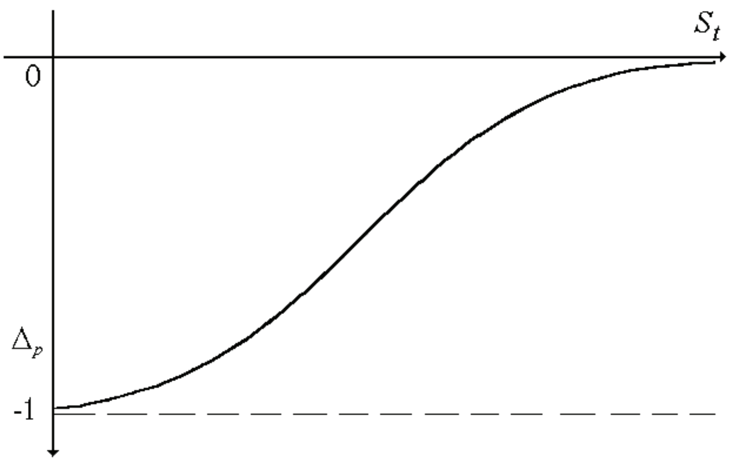
La expresión anterior es conocida como la condición de paridad entre opciones de venta y compra, también llamada condición de paridad *put-call*. Esta condición permite calcular las griegas de una opción de venta cuando se conocen las griegas de una opción de compra. En efecto, a partir de (10.19), se sigue que

$$\Delta_p = \Delta_c - 1. \tag{10.20}$$

Por lo tanto,

$$-1 < \Delta_p \equiv \frac{\partial p}{\partial S_t} = \Phi(d_1) - 1 < 0.$$

La Gráfica 10.6 muestra Δ_p como función de S_t.



Gráfica 10.6 Δ_p como función de S_t.

A continuación se calcula la *Gamma* de una opción de venta europea denotada por Γ_p. De la condición (10.20), se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial p}{\partial S_t}\right) = \frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\right).$$

Es decir,

$$\Gamma_p = \Gamma_c = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}} > 0. \tag{10.21}$$

Ahora, se calcula la *Vega* de una opción de venta. A partir de (10.19), se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}.$$

Por lo tanto,

$$v_p = v_c = S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t} > 0. \tag{10.22}$$

La razón de cambio de p con respecto de T, denotada por θ_p, se calcula como

$$\begin{aligned}\theta_p \equiv \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{\partial c}{\partial T} - rKe^{-r(T-t)}\\ &= Ke^{-r(T-t)}\left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right) - rKe^{-r(T-t)}\\ &= -Kre^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) + \frac{Ke^{-r(T-t)}\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\\ &= -Ke^{-r(T-t)}\left(r\Phi(-d_2) - \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right).\end{aligned} \tag{10.23}$$

En consecuencia,

$$\Theta_p = -\theta_p = K e^{-r(T-t)} \left(-r\Phi(-d_2) + \frac{\sigma \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} \right). \tag{10.24}$$

Con base en (10.19), la variación de p con respecto a variaciones en K, está dada por

$$\begin{aligned} \kappa_p &= \kappa_c + e^{-r(T-t)} \\ &= -\Phi(d_2)e^{-r(T-t)} + e^{-r(T-t)} \\ &= (1 - \Phi(d_2))e^{-r(T-t)} \\ &= \Phi(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0. \end{aligned} \tag{10.25}$$

El cambio de p con respecto a un cambio en r, es

$$\begin{aligned} \rho_p \equiv \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial c}{\partial r} - (T-t)K e^{-r(T-t)} \\ &= K e^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2) - (T-t)K e^{-r(T-t)} \\ &= (\Phi(d_2) - 1)K e^{-r(T-t)}(T-t) \\ &= -\Phi(-d_2)K e^{-r(T-t)}(T-t) < 0. \end{aligned} \tag{10.26}$$

10.4.1 Ejemplo numérico

El Cuadro 10.2 muestra el precio de una opción europea de venta y sus griegas.

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T-t$	$p_{\rm BS}$
40.00	40.00	0.12	0.30	0.25	1.812
Griegas					
Δ	Γ	v	Θ	κ	ρ
-0.392	0.064	7.683	2.512	0.437	-4.370

Cuadro 10.2 Precio de la opción de venta europea y las griegas.

La interpretación de las griegas del cuadro anterior es la siguiente:

(*i*) *Delta*: Se requieren 0.392 de subyacente para cubrir una posición larga en un *put*;

(*ii*) *Gamma*: El cambio en la delta para un cambio de \$1 en el precio del subyacente es 0.064;

(*iii*) *Vega*: El precio de la opción se incrementa en \$7.683 para un incremento unitario en la desviación estándar; por lo que al utilizar interpolación lineal, un error de 0.01 en la volatilidad (*i.e.* si la volatilidad es realmente 0.30 ó 0.31) conducirá a un error de cerca 7.6 centavos en el precio de la opción;

(*iv*) *Theta*: El precio de la opción decrece a la tasa de \$2.512 por año; por lo que, al utilizar interpolación lineal, para una semana el precio de la opción decrecerá a una tasa de 4.8 centavos siempre que los otros parámetros no cambien;

(*v*) *Kappa*: Si el precio de ejercicio se incrementa en \$1 el precio de la opción se incrementa en 43.7 centavos;

(*vi*) *Rho*: Para un incremento de una unidad en la tasa de interés el precio de la opción decrecerá en \$4.370, por lo que; al utilizar interpolación lineal, si la tasa de interés fuera realmente 13%, el precio de la opción se reduciría en aproximadamente cuatro centavos.

Por último, el Cuadro 10.3 muestra las griegas del modelo de Black y Scholes.

	Opción de compra	Opción de venta
Valor V Modelo B&S	$S_t\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$	$K e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)$
Delta: $\frac{\partial V}{\partial S_t}$	$\Phi(d_1)$	$\Phi(d_1) - 1$
Gamma: $\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$	$\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}$	$\frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}$
Vega: $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	$S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$	$S_t\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$
Theta: $\frac{\partial V}{\partial t}$	$-K e^{-r(T-t)}\left(r\Phi(d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right)$	$K e^{-r(T-t)}\left(-r\Phi(-d_2) + \frac{\sigma\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right)$
Kappa: $\frac{\partial V}{\partial K}$	$-e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$	$e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2)$
Rho: $\frac{\partial V}{\partial r}$	$K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2)(T-t)$	$K e^{-r(T-t)} - \Phi(-d_2)(T-t)$

Cuadro 10.3 Griegas del modelo de Black y Scholes.

10.5 Bibliografía

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Hull, J. C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

Jarrow, R. A. and Rudd A. (1983). Option Pricing. 1st ed., Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V.

Venegas Martínez, F. (2006). "Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre". 1a. ed.,International Thomson Editores, México.

Wilmott, P. (1998). Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering). John Wiley & Sons, England.

10.6 Ejercicios

10.1 Considere una opción europea de compra con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
100.00	101.00	0.05	0.20	0.5	6.374

Calcule e interprete las griegas del modelo de Black y Scholes.

10.2 Repita el ejercicio anterior con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T-t$	c_{BS}
100.00	99.00	0.05	0.20	0.5	7.431

10.3 Considere una opción europea de venta con los parámetros que se muestran en la siguiente tabla:

Precios y parámetros relevantes					
S_t	K	r	σ	$T-t$	p_{BS}
100.00	101.00	0.05	0.20	0.5	4.880

Calcule e interprete las griegas del modelo de Black y Scholes.

10.4 Muestre que la "deltas" para una opción binaria de compra y de venta están dadas por:

$$\Delta_c = \frac{e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}},$$

$$\Delta_p = -\frac{e^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}.$$

10.5 Muestre que la elasticidad de p con respecto a S_t, es decir la razón de cambios porcentuales entre p y S_t, está dada por $(\Phi(d_1) - 1)S_t/p$.

Solución:

$$\eta_{p,S} = \frac{\partial \ln(p)}{\partial \ln(S_t)} = \frac{\frac{\partial p}{p}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = (\Phi(d_1) - 1)\frac{S_t}{p}.$$

10.6 Obtenga la sensibilidad de Δ_c cuando varía la fecha de vencimiento suponiendo que el precio no cambia; es decir, calcule:

$$\frac{\partial \Delta_c}{\partial T}.$$

Capítulo 11

Notas estructuradas

Conceptos básicos:

- ✓ **Valuación de un bono a tasa flotante**
- ✓ **Modelo de Black para la valuación de opciones sobre precios** *forward*
- ✓ *Caplets*
- ✓ *Floorlets*
- ✓ **Paridad** *cap-floor*
- ✓ **Collares**, *swaptions*, *captions* **y** *floortions*
- ✓ **CEDES :** *call spread*, *put spread*, **dual, gana si sube, gana si baja,** *collar*, *floor*, *cap*, *knock out down and out*, *knock out up and out*, *knock out up and out*, *down and out (no touch)*, **doble barrera (al** *hit* **acumulable), extendible y** *swaption*.

11.1 Introducción

La necesidad de mantener rendimientos competitivos y atractivos con cierta tolerancia al riesgo en un portafolio ha hecho que inversionistas sumamente aversos al riesgo, *V.g.* tesorerías, fondos de pensiones que necesitan garantizar un monto de capital mínimo integren sus portafolios con notas estructuradas, con la finalidad es garantizar un monto mínimo de capital que permanece a salvo a la vez que se puede acceder a una parte del rendimiento de los mercados de renta variable sin enfrentar las posibles caídas de este.

Los inversionistas en mercados latinoamericanos no están exentos de estas necesidades, sobre todo después de los episodios de privatización de los sistemas de pensiones de las últimas décadas en la región, lo que ha creado mercados crecientes de instrumentos híbridos, como los Certificados de Depósito (CEDES) con todas sus variantes.

La idea básica detrás de una nota estructurada es la de un bono, por lo general a tasa flotante, al cual se le asocia un derivado. El comportamiento del derivado, típicamente una opción, es lo que le da nombre a la nota estructurada en cuestión. Un ejemplo sencillo de una nota estructurada es la emisión de un bono cuponado flotante acompañado de la opción de recompra en una fecha futura en caso de que la tasa llegue a un límite superior o techo (*cap*), un límite inferior o piso (*floor*) o salga de una banda preestablecida (collar). También es posible que los pagos de las notas estructuradas estén ligados a un índice o a un tipo de cambio. En general, las notas estructuradas en el mercado son emitidas por empresas gubernamentales, con respaldo gubernamental o calificaciones crediticias altas, por lo que el riesgo crédito es mínimo, aunque el riesgo de liquidez o de mercado permanece presente.

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de notas estructuradas en los Estados Unidos de Norteamérica y el Reino Unido se debe en gran medida a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado, gracias al producto derivado inmerso, el cual determina el vencimiento de la nota.

Los principales emisores dentro del mercado de los Estados Unidos, al momento de esta edición, son: *Federal Home Loan Bank of Dallas*, *Federal National Mortgage Association*, *Student Loan Marketing Association*. En particular, el *Federal Home Loan Bank of Dallas*, uno de los principales emisores de notas estructuradas del mercado estadounidense, tiene más de 175 índices o combinaciones de índices sobre los cuales se calculan los pagos. Otro ejemplo institucional de manejo de esta clase de instrumentos, lo da *"The World Bank"* (*The International Bank for Reconstruction and Development*), quien es un importante emisor de notas estructuradas, entre las que destacan:

(*i*) Bonos cuponados flotantes llamables (redimibles) o con opción de recompra por el emisor (*callable bonds*)

(*ii*) Bonos cuponados flotantes colocables o con opción de reventa por el emisor (*putable bonds*)

(*iii*) Bonos cuponados flotantes con pisos, techos o collares

(*iv*) Bonos cuponados flotantes *step-up* y *step-down*

(*v*) Bonos cuponados flotantes ligados a índices

(*vi*) Bonos cuponados flotantes duales de tipo de cambio

(*vii*) Bonos cuponados flotantes con opcionalidad de tipo de cambio.

Los mercados de notas estructuradas son atractivos para los inversionistas por sus potenciales rendimientos y su alta calidad crediticia, permitiéndoles manejar y redistribuir riesgos de forma que cumplan con los estándares de seguridad que les son solicitado por las diferentes regulaciones; tanto internas como externas; a las que tienen que acogerse.

A pesar de lo atractivas que pueden sonar de inicio, las notas estructuradas no están exentas de riesgos, los que vienen de juntar derivados a los bonos, pues pueden acortar drásticamente las duraciones de estos, como descubrieron las autoridades reguladoras de los Estados Unidos en el primer semestre de 1994. En ese momento, como resultado de los aumentos en las tasas de interés de la Reserva Federal, las notas estructuradas vinculadas a las tasas de interés experimentaron cambios radicales afectando su calendario de pagos y originando grandes e imprevistas pérdidas para los tenedores de estas notas. Los valores de mercado de estos instrumentos cayeron bajo par y sus cupones se redujeron comparados con los de otros instrumentos de deuda disponibles en el mercado, estas pérdidas se realizaron aun cuando las notas estructuradas estaban calificadas AAA. Lo que mostró que, aunque el riesgo crédito es mínimo en las notas estructuradas, los riesgos de mercado y liquidez prevalecen.

Después de este episodio de pérdidas, la SEC (*Securities and Exchange Comission*) advirtió a los administradores (particularmente bancos) sobre la adecuada cuantificación y administración de los riesgos de algunos tipos de notas estructuradas. En particular, notas con flotación inversa, flotación COFI (*Cost of Funds Index*), flotación CMT (*Constant Maturity Treasury*), flotación dual de índices y flotación de rango.

Por otro lado, en el segundo semestre de 1994, la Reserva Federal emitió una circular en la cual se destaca el papel que desempeñan las notas estructuradas en la administración de riesgos y enfatiza el cuidado que deben tener los bancos para la adecuada valuación de sus portafolios cuando contienen notas estructuradas. Por esas mismas fechas, *The Office of Thrift Supervision* emitió un boletín donde reconoce que las notas estructuradas pueden ser un magnífico vehículo de inversión y puntualizó sobre la importancia de llevar a cabo su valuación bajo distintos escenarios en la tasa de interés. En dicho boletín, la OTS recomendó que las pruebas de *stress* se efectuaran cada trimestre tomando en cuenta movimientos en las tasas de interés hasta de ± 400 puntos base.

Después de 2002, las autoridades reguladoras de los Estados Unidos y organismos supranacionales como el comité de Basilea han extendido recomendaciones para regular y controlar los riesgos de estos instrumentos en todos los mercados alrededor del mundo. En América Latina, donde estos mercados aún son incipientes, ya se han adoptado estas medidas, aunque nunca se han enfrentado periodos de crisis lo suficientemente acusadas como para permitir poner a prueba las mismas.

Para comenzar con el análisis de la valuación de estos instrumentos, se repasará la valuación de los bonos a tasa flotante, para después analizar los derivados que particularizan a cada una de las distintas clases de CEDES.

11.2 Valuación de un bono a tasa flotante

Considere un bono que se coloca en $t = 0$ y paga, por ejemplo, tres cupones en las fechas futuras, T_1, T_2 y T_3, suponga que el principal es $N > 0$. Si los cupones se calculan como

$$C_1 = \widetilde{R}_1 N, \qquad C_2 = \widetilde{f}_{12} N, \qquad C_3 = \widetilde{f}_{13} N, \tag{11.1}$$

donde

$$\widetilde{f}_{12} = f(0, T_1, T_2)(T_2 - T_1) \tag{11.2}$$

y

$$\widetilde{f}_{23} = f(0, T_2, T_3)(T_3 - T_2) \tag{11.3}$$

son, respectivamente, las tasas *forward* en $[T_1, T_2]$ y $[T_2, T_3]$ aplicadas a sus correspondientes periodos, entonces el precio del bono satisface

$$B_{\text{flot}}^{(0)} = \frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{\widetilde{f}_{12} N}{1 + \widetilde{R}_2} + \frac{(\widetilde{f}_{23} + 1)N}{1 + \widetilde{R}_3}, \tag{11.4}$$

donde $\widetilde{R}_i = R(0, T_i)T_i, i = 1, 2, 3$. En equilibrio, lo cual implica la ausencia de oportunidades de arbitraje, se tiene que las tasas *forward* implícitas se obtienen mediante las siguientes relaciones:

$$(1 + \widetilde{R}_1)(1 + \widetilde{f}_{12}) = 1 + \widetilde{R}_2$$

y

$$(1 + \widetilde{R}_2)(1 + \widetilde{f}_{23}) = 1 + \widetilde{R}_3.$$

Por lo tanto,

$$\widetilde{f}_{12} = \frac{1 + \widetilde{R}_2}{1 + \widetilde{R}_1} - 1 \tag{11.5}$$

y

$$\widetilde{f}_{23} = \frac{1 + \widetilde{R}_3}{1 + \widetilde{R}_2} - 1. \tag{11.6}$$

Si se sustituyen (11.5) y (11.6) en (11.4), se sigue que

$$\begin{aligned}
B_{\text{flot}}^{(0)} &= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_2}\left(\frac{1 + \widetilde{R}_2}{1 + \widetilde{R}_1} - 1\right) + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_3}\left(\frac{1 + \widetilde{R}_3}{1 + \widetilde{R}_2} - 1\right) \\
&= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \left(\frac{N}{1 + \widetilde{R}_1} - \frac{N}{1 + \widetilde{R}_2}\right) + \left(\frac{N}{1 + \widetilde{R}_2} - \frac{N}{1 + \widetilde{R}_3}\right) + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_3} \\
&= \frac{\widetilde{R}_1 N}{1 + \widetilde{R}_1} + \frac{N}{1 + \widetilde{R}_1} \\
&= N.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Es decir, un bono cuponado con tasa cupón flotante se negocia a la par. Observe que aunque el ejercicio anterior toma en cuenta tres periodos, el mismo resultado se obtiene para cualquier número de periodos. Evidentemente, si se evalúa el bono inmediatamente después del primer pago y se conoce la curva de rendimiento $R(T_1, T)$, entonces el precio del bono es $B_{\rm flot}^{(1)} = N$.

Note además que si se denota el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria en el vencimiento T_i mediante $B_i = B(0, T_i) = 1/(1 + \widetilde{R}_i)$, $i = 1, 2, 3$, y $N = 1$, entonces, a partir de (11.7), se tiene que

$$1 = \widetilde{R}_1 B_1 + \widetilde{f}_{12} B_2 + \widetilde{f}_{23} B_3 + B_3. \tag{11.8}$$

Así, $R(0, T)$ puede verse como una curva de ceros, B_i, asociada al bono cuponado de tasa flotante.

11.3 Valuación de una opción usando el modelo de Black

Aunque la valuación de opciones ya fue tratada con detalle en otro capítulo de este libro, resulta prudente revisar el modelo de valuación de opciones propuesto por Fisher Black en 1976. En este modelo, Black valúa una opción de compra sobre un futuro. El supuesto básico del modelo es que el subyacente (la tasa de interés) sigue una distribución lognormal. Este modelo es el más popular en la valuación de *caplets* y de *floorlets*, siendo la tasa subyacente más usada la LIBOR.[1]

Originalmente, el modelo de Black fue formulado para valuar una opción sobre el precio futuro de una acción, F_t, el cual es conducido por un movimiento geométrico Browniano[2], con precio de ejercicio K y que se inicia en t para vencer en T. Observe que el precio futuro de la acción, $F_{t,T} = S_t e^{r(T-t)}$ también sigue un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$\mathrm{d}F_{t,T} = (\mu - r) F_{t,T} \mathrm{d}t + \sigma F_{t,T} \mathrm{d}W_t, \tag{11.9}$$

lo que deja con un precio de la opción de la forma:

$$c(F_{t,T}, t) = B(t, T) \left[F_{t,T} \Phi(d_1) - K \Phi(d_2) \right], \tag{11.10}$$

donde $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$,

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{F_{t,T}}{K} \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \tag{11.11}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}. \tag{11.12}$$

Considere ahora $f(t, T, S)$, una tasa *forward* aplicable en $[T, S]$, $S > T$, con referencia en t tal que

$$\mathrm{d}f(t, T, S) = \sigma_f f(t, T, S) \mathrm{d}W_t, \qquad \sigma_f > 0. \tag{11.13}$$

Suponga que un agente contratará un crédito, de monto N, durante las fechas futura, T y S, $S > T$, a la tasa *forward* $f(t, T, S)$. Aquí σ_f es la volatilidad de la tasa *forward*. En el presente, al tiempo t, el agente desea comprar un contrato de opción, europea, para cubrirse contra pérdidas cuando la tasa *forward* de mercado $f(t, T, S)$ exceda una cota superior f_K. El pago de esta opción, en el tiempo S (cuando vence el crédito), está dado por

$$N(S - T) \mathrm{E} \left[\max \left(f(t, T, S) - f_K, 0 \right) \ \middle| \ \mathcal{F}_t \ \right],$$

[1] *London Inter Bank Offered Rate* Es una tasa diaria de referencia basada en la tasa de interés a la cual los bancos ofrecen prestar fondos no colateralizados a otros bancos en el mercado londinense, es la tasa opuesta a la LIBID, *London Inter Bank Bid Rate*.

[2] Véase el Apéndice B.

donde $\mathrm{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ es la esperanza condicional dada la información disponible asociada con $\mathcal{F}_t$. Observe que el pago $N(S-T)\max(f(t,T,S)-f_K,0)$ se determina en T pero se entrega hasta S. En este caso, el precio de una opción sobre la tasa *forward* es

$$c(t,T,S) = B(t,S)N(T-S)\left[f(t,T,S)\Phi(d_1) - f_K\Phi(d_2)\right], \tag{11.14}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{f(t,T,S)}{f_K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_f^2(T-t)}{\sigma_f\sqrt{T-t}}, \tag{11.15}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_f\sqrt{T-t}. \tag{11.16}$$

El factor de descuento $B(t,S)$ para traer a valor presente el pago de la opción se supone conocido. Por último, observe que la tasa *forward spot* se calcula mediante

$$f(t,T,S) = \frac{\ln[B(t,T)] - \ln[B(t,s)]}{S-T}. \tag{11.17}$$

11.4. Entendiendo los conceptos de *caplet*, *floorlet*, *cap* y *floor*

Una vez revisado el modelo de Black, se procederá a revisar el concepto de *caplet* y *cap*. A *grosso modo* un *caplet* es un instrumento derivado que paga al tenedor la diferencia entre la tasa fija que se designó como tasa de ejercicio y la tasa flotante que funge como subyacente para el periodo de pago de cupón designado, mientras que a un conjunto de *caplets* se le denomina *cap*.

Suponga, como antes, que un agente recibirá un crédito, de monto N, en una fecha futura, t_1, a tasa flotante. Suponga también que el crédito se liquida en t_2. En el presente, t_0, el agente podría comprar un contrato de opción, europea, para cubrirse contra pérdidas cuando la tasa *forward* de mercado $f(t_0,t_1,t_2)$ exceda una cota superior, o techo, especificada de antemano, f_c. El pago de esta opción, en el vencimiento t_2, está dado por

$$N(t_2-t_1)\max(f(t_0,t_1,t_2)-f_c,0),$$

y el precio que se tendría que pagar por la opción, en condiciones de equilibrio, es

$$\mathrm{Cap}_0 = B(t_0,t_2)N(t_2-t_1)\max(f(t_0,t_1,t_2)-f_c,0).$$

Este tipo de contrato de opción recibe el nombre de *cap* de tasa de interés. Suponga ahora que en lugar de comparar el valor de la tasa *forward* de mercado con la tasa *cap* en un solo periodo, se compara en dos periodos, t_2 y t_3. En este caso, el agente podría comprar dos opciones de valor total

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}_0 =& B(t_0,t_2)N(t_2-t_1)\max(f(t_0,t_1,t_2)-f_c,0)\\ &+ B(t_0,t_3)N(t_3-t_2)\max(f(t_0,t_2,t_3)-f_c,0).\end{aligned}$$

Como se menciono párrafos atrás, es frecuente llamar a cada opción *caplet* y la suma de las ellas *cap*. En equilibrio, la tasas *forward*, $f(t_0,t_1,t_2)$ y $f(t_0,t_2,t_3)$, satisfacen

$$(1+R(t_0,t_1)(t_1-t_0))(1+f(t_0,t_1,t_2)(t_2-t_1)) = 1+R(t_0,t_2)(t_2-t_0)$$

y

$$(1+R(t_0,t_2)(t_2-t_0))(1+f(t_0,t_2,t_3)(t_3-t_2)) = 1+R(t_0,t_3)(t_3-t_0),$$

en donde $R(t_0, t_1)$ y $R(t_0, t_2)$ son cantidades conocidas. Dado que

$$R(t_0, t_i) = -\ln[B(t_0, t_i)]/(t_i - t_{i-1}),$$

también se cumple que

$$f(t_0, t_1, t_2) = \frac{\ln[B(t_0, t_1)] - \ln[B(t, t_2)]}{t_2 - t_1}, \tag{11.18}$$

y

$$f(t_0, t_1, t_3) = \frac{\ln[B(t_0, t_2)] - \ln[B(t, t_3)]}{t_3 - t_2}. \tag{11.19}$$

Para su valuación, se recurre al modelo de Black, el cual tiene la desventaja de suponer que las tasas siguen un comportamiento log-normal, lo que implica que en el largo plazo las tasas explotan.

Cada *caplet* puede valuarse, en t, utilizando el modelo de Black (1976) en donde la variable subyacente es la tasa *forward* implícita, la cual se supone que tiene distribución lognormal. A continuación se introduce la siguiente notación para el precio de este tipo de opciones de tasas de interés:

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\text{E}\left[\max\left(f(t_0, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0\right)|\mathcal{F}_t\right], \quad i = 2, 3.$$

En general, si t es la fecha en que se pacta un *cap* con n caplets, el precio del *cap* es la suma de los precios de los caplets, es decir,

$$\text{Cap}_t = \sum_{i=2}^{n+1} \text{Caplet}_{t,t_{i-1}}. \tag{11.20}$$

Bajo el supuesto de que la tasa *forward* tiene una distribución lognormal, se sigue que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\left[f(t, t_{i-1}, t_i)\Phi(d_i) - f_c\Phi(d_i - \sigma_f\sqrt{t_i - t_{i-1}})\right], \tag{11.21}$$

donde

$$d_i = \frac{\ln(f(t, t_{i-1}, t_i)/f_c) - (\sigma_f^2/2)(t_i - t_{i-1})}{\sigma_f\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \tag{11.22}$$

y σ_f es la volatilidad de la tasa *forward*. En este caso, la tasa *forward spot* se calcula como

$$f(t, t_{i-1}, t_i) = \frac{\ln[B(t, t_{i-1})] - \ln[B(t, t_i)]}{t_i - t_{i-i}}. \tag{11.23}$$

Observe también que

$$\begin{aligned}
&\text{Caplet}_{t,t_{i-1}}\\
=&\text{E}\left[B(t, t_i)N(t_i - t_{i-1})\max\left(f(t_0, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0\right)|\mathcal{F}_t\right]\\
=&\text{E}\left[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N(t_i - t_{i-1})\max\left(f(t, t_{i-1}, t_i) - f_c, 0\right)|\mathcal{F}_t\right]\\
=&\text{E}\left[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N(t_i - t_{i-1})\max\left(\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right)\frac{1}{t_i - t_{i-1}} - f_c, 0\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
=&\text{E}\left[B(t, t_{i-1})B(t_{i-1}, t_i)N\max\left(\left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1\right) - f_c(t_i - t_{i-1}), 0\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\\
=&\text{E}\left[B(t, t_{i-1})N\max\left(1 - B(t_{i-1}, t_i) - f_cB(t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}), 0\right)\middle|\mathcal{F}_t\right].
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = N B(t, t_{i-1}) \text{E} \left[\max \left(1 - B(t_{i-1}, t_i)(1 + f_c(t_i - t_{i-1}), 0 \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

Si se denota $\widehat{f_c} = 1 + f_c(t_i - t_{i-1})$, se tienen que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = N B(t, t_{i-1}) \text{E} \left[\max \left(1 - B(t_{i-1}, t_i) \widehat{f_c}, 0 \right) | \mathcal{F}_t \right].$$

De esta manera un *caplet* puede verse también como un put sobre $B(t_{i-1}, t_i)\widehat{f_c}$ con precio de ejercicio 1. Como puede suponer el lector, un *floorlet* es una opción, al igual que el *caplet*, que cubre al tenedor en caso de que la tasa de referencia (la que sirve de subyacente) baje de un piso determinado por la tasa fija que hace las veces de un precio de ejercicio en un periodo determinado de pago de cupón. Siguiendo la lógica de los *caps*, un *floor* es un conjunto de *floorlets*, típicamente en una nota estructurada, esta tiene tantos *floorlets* como tasas conocidas quedan, es decir se tienen $n - 1$ *floorlets*, pues la tasa actual ya es conocida. Para su valuación sea:

$$\text{Floor}_t = \sum_{i=2}^{n+1} \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}}, \tag{11.24}$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} =& B(t, t_i) N (t_{i-1} - t_i) \Big[- f(t, t_{i-1}, t_i) \Phi(-d_i) \\ &+ f_p \Phi(-d_i + \sigma_f \sqrt{t_{i-1} - t_i}) \Big], \end{aligned} \tag{11.25}$$

donde

$$d_i = \frac{\ln(f(t, t_{i-1}, t_i)/f_p) - (\sigma_f^2/2)(t_i - t_{i-1})}{\sigma_f \sqrt{t_i - t_{i-1}}}. \tag{11.26}$$

11.5 Paridad *cap-floor* y collares

Como puede intuir el lector, existe una relación entre los *caplets* y los *floorlets*; heurísticamente puede ser imaginada como la paridad *put - call* existente entre las opciones simples (*vanilla*). De existir simetría (en tasas de ejercicio, periodos, volatilidades, etc.) entre cada uno de estos *caplets* y *floorlets* entonces el concepto de paridad puede extenderse hasta llegar al concepto de "cap − floor parity". En esta sección se establece la relación que existe entre *caps*, *floors* y *swaps*.

Considere un portafolio consistente de una posición larga de un *cap* con tasa *cap* f_c y una posición corta con un *floor* con tasa *floor* f_p. Suponga que $f_c = f_p = f_K$, dado que

$$\text{Caplet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i) N (t_i - t_{i-1}) \text{E} \left[\max \left(f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K, 0 \right) \right]$$

y

$$\text{Floorlet}_{t,t_{i-1}} = B(t, t_i) N (t_i - t_{i-1}) \text{E} \left[\max \left(f_K - f(t, t_{i-1}, t_i), 0 \right) \right],$$

lo cual implica que

$$\text{Caplet}_{t_{i-1}} - \text{Floorlet}_{t_{i-1}} = B(t, t_i) N (t_i - t_{i-1}) \left[f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K \right]. \tag{11.27}$$

Al sumar sobre i, se tiene que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \text{Caplet}_{t,t_{i-1}} - \sum_{i=2}^{n+1} \text{Floorlet}_{t_{i-1}} = \sum_{i=2}^{n+1} B(t, t_i) N (t_i - t_{i-1}) \left[f(t, t_{i-1}, t_i) - f_K \right]$$

ó

$$\text{Cap}_t - \text{Floor}_t = V_t, \tag{11.28}$$

donde V_t es el precio de un *swap* con tasa *swap* f_K.

Al igual que con las opciones simples[3] es posible realizar coberturas sintéticas similares a las "mariposas"[4] usadas durante la operación en el mercado, con las tasas de interés asociadas a las notas estructuradas. Esto es conocido como un collar. La definición de un collar es la de un contrato que establece una cota inferior, f_p, y una cota superior, f_c, sobre la tasa *forward*, es decir, un contrato de collar es un portafolio con una posición larga en un *cap* con tasa *cap* f_c y una posición corta en un *floor* con tasa *floor* f_p. De esta manera, un contrato de collar efectúa pagos en el vencimiento si la tasa *forward* excede a f_c o es menor que f_p.

También existen otros instrumentos relacionados a los *caps* o a los *floors*. estos son los *swaptions*, los *captions* y los *floortions*. A grandes rasgos, dentro de un *call swaption*, el propietario tiene el derecho de cambiar pagos de tasa flotante a pagos de tasa fija. Mientras que en un *put swaption* el propietario tiene el derecho de cambiar pagos de tasa fija a pagos de tasa flotante. *Captions* y *floortions* son opciones sobre *caps* y *floors*, respectivamente.

11.6 Características generales de los CEDES

Estos certificados se estructuran con opciones europeas tanto *plain vanilla* como exóticas. Por ejemplo, entre las primeras se encuentran: *put spreads*, *call spreads*, *collars* y *floors*. Entre las exóticas se tienen: *knock outs*, doble barrera y *cash or nothing*. Los subyacentes empleados en este tipo de certificados de depósito son principalmente, índices accionarios, acciones listadas en bolsa, tipo de cambio, generalmente FIX, y tasas de interés (CETES 28 y TIIE 28). Dependiendo de las características específicas de cada una de las notas estructuras, los modelos de valuación

---

[3] Las opciones conocidas como "*vanilla*" son las opciones europeas de compra y de venta bajo todos los supuestos establecidos por Merton y Black & Scholes en sus trabajos.

[4] Una mariposa, larga en este caso, es una estrategia de *trading* en un mercado de poca volatilidad, *i.e.,* que parece estancado. Consiste en vender dos opciones de compra con un precio de ejercicio igual al precio actual del mercado (en el dinero), mientras que compra una opción con un precio de ejercicio bajo (cota inferior) y otra con un precio de ejercicio superior al actual (cota superior). Preferentemente estos precios deben de ser simétricos al precio actual de mercado, pues se supone que este no va a cambiar en el corto plazo. Al vencimiento de las opciones, se realiza una ganancia si el precio del subyacente permanece en el precio de ejercicio de las opciones vendidas, mientras que se experimentan pérdidas si el precio del subyacente está fuera de las cotas. Una mariposa corta invierte las posiciones de las opciones, esto significa estar largo en dos opciones de compra, y corto en una opción de compra con un precio de ejercicio superior al precio actual del subyacente, y corto en otra opción de compra con precio de ejercicio menor al precio actual del subyacente.

y los insumos son diferentes como se muestra en el siguiente cuadro:

Nota	Tipo de certificado de depósito	Derivado asociado	Subyacente
1	CEDE *call spread*	Opciones *call* tipo europeas	Índices bursátiles Acciones
2	CEDE *put spread*	Opciones *put* tipo europeas	Índices bursátiles Acciones
3	CEDE *collar* (*spread* de tasas de interés)	*caps* de tasas de interés	TIIE 28
4	CEDE *floor*	*Floorlets* de tasas de interés	TIIE 28
5	CEDE gana si sube y CEDE gana si baja	Opcion binaria: *cash or nothing* no dependiente de la trayectoria del subyacente	FIX MXP/USD Subasta CETES 28
6	CEDE *knock out down out* y CEDE *knock out up and out*	Opción binaria con barreras dependiente de la trayectoria del subyacente	FIX MXP/USD
7	CEDE dual tipo de cambio	Opción de tasa de interés	Tipo de cambio

Cuadro 11.1 Características específicas de los CEDES.

11.6.1 CEDE *call spread*

El rendimiento de este instrumento depende del diferencial que exista al vencimiento entre el valor del subyacente y su nivel inicial determinado al momento de pactar la operación. Esta nota se estructura con: 1) un bono cuyo valor al vencimiento es igual al 100% del capital invertido y 2) un portafolio de opciones: un *call* largo y un *call* corto, donde la condición es que el precio de ejercicio del *call* largo, K_1, sea menor al pactado en la posición corta, K_2. El precio del CEDE *call* spread está dado por:

$$P_V = B + (P_D \times F), \tag{11.29}$$

donde:

B : precio de un bono cupón cero;

P_D : prima neta de las opciones inmersas en la estrategia, el cual está dado por:

$$P_D = c_1 - c_2,$$

donde c_1 y c_2 representan las primas de los "calls" con precios de ejercicio K_1 y K_2, respectivamente, y F es el factor establecido en el prospecto del certificado, determinado por el emisor desde el inicio del depósito, el cual ajusta el rendimiento del certificado de depósito.

La valuación de cada uno de los componentes del CEDE se lleva a cabo de la siguiente manera: se calcula, primero, el precio del bono, el cual es un bono con capital protegido al vencimiento (con valor nominal establecido en el prospecto) mediante:

$$B = \frac{N}{1 + R(t,T)(T-t)},$$

donde:

N : valor nominal del CEDE,

$T - t$: número de días por vencer del CEDE como proporción de año,

$R(t,T)$: tasa de rendimiento asociada al número de días por vencer, la cual se obtiene de las curvas nominales bancarias de acuerdo al riesgo emisor.

Posteriormente, el valor de la prima de ambas opciones se obtiene mediante la fórmula de Black y Scholes:

$$c_i = S_t e^{(b-r)(T-t)}\Phi(d_1) - K_i e^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \qquad i = 1,2,$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

y

c_i : prima de la opción tipo *call* con precio de ejercicio K_i, $i = 1,2$;

S_t : precio *spot* del subyacente;

K_i : precio de ejercicio de la opción, $i = 1,2$;

r : tasa de interés libre de riesgo continuamente capitalizable;

$\Phi(\cdot)$: probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar;

σ : volatilidad del rendimiento del subyacente;

$b = r - q$: donde q es la tasa anual de dividendos decretados.

11.6.2 CEDE *put spread*

Los certificados CEDE *put spread* contemplan una estrategia *bear spread* integrada con dos opciones tipo *put* europeas. Para el caso de los *puts* incorporados en el CEDE, el precio de ejercicio de la posición larga, K_2, es mayor al precio de ejercicio de la posición corta, K_1. El precio de valuación del CEDE *put spread* está dado por:

$$P_V = B + (P_D \times F), \tag{11.30}$$

donde B es el precio del bono cupón cero, P_D es la prima neta de las opciones inmersas en la estrategia dada por:

$$P_D = p_2 - p_1,$$

donde p_1 y p_2 son las primas de los *puts* con precios de ejercicio K_1 y K_2, respectivamente, y F es el factor establecido en el prospecto del certificado determinado por el emisor desde el inicio del depósito y ajusta el rendimiento del certificado de depósito.

Los valores tanto del bono cupón cero como de los *puts* incorporados en el CEDE se determinan de la siguiente manera. Primero, se calcula el precio del bono cupón cero mediante:

$$B = \frac{N}{1 + R(t,T)(T-t)}.$$

Posteriormente, se determina el valor de las primas de ambos *puts* con la fórmula de Black y Scholes:

$$p_i = K_i e^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t e^{(b-r)(T-t)}\Phi(-d_2), \qquad i = 1, 2,$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(S_t/K\right) + \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

p_i : prima de la opción tipo *put* con precio de ejercicio K_i, $i = 1, 2$,

S_t : precio *spot* del subyacente,

K_i : precio de ejercicio de la opción, $i = 1, 2$,

$\Phi(\cdot)$: probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar, $\mathcal{N}(0, 1)$,

σ : volatilidad del rendimiento del subyacente,

$T - t$: número de días al vencimiento de la opción como proporción de año,

$b = r - q$: donde q es igual a la tasa anual de dividendos decretados, en caso de que estos existan.

11.6.3 CEDE *collar* (*spread* de tasas de interés)

Esta estructura contempla una estrategia de opciones con tasas de interés. Esta estrategia se forma con un *collar* limitado a una tasa piso y una tasa techo y se estructura con dos *caps* de tasas de interés. Como ya se vio anteriormente los *caps* de tasas de interés consisten en una serie de opciones europeas tipo *call* llamados individualmente *caplets*. El número de *caplets* que se utilizan para estructurar esta nota es igual al número de cupones n menos uno; dado que para el primer cupón la tasa se conoce al inicio de la emisión.

Por lo anterior, si R es el rendimiento de referencia y κ es la sobretasa pactada en el protocolo, entonces la tasa de rendimiento para los cupones que van del segundo hasta el n-ésimo depende de las siguientes condiciones en la fecha de vencimiento de cada *caplet* como se muestra en el siguiente cuadro:

Rango	Tasa cupón
$R \leq K_1$	$K_1 + \kappa$
$K_1 < R < K_2$	$R + \kappa$
$R \geq K_2$	$K_2 + \kappa$

Cuadro 11.2 Condiciones en la fecha de vencimiento.

Este tipo de instrumento está integrado por: 1) un bono flotante con pagos periódicos de interés, 2) una posición larga sobre un *cap* integrado por una serie de *caplets* con precio de ejercicio igual a la tasa piso y plazo igual al de los cupones que componen el bono y 3) una posición corta sobre un *cap* integrado por una serie de *caplets*, con precio de ejercicio igual a la tasa techo y plazo igual al de los cupones del bono. El precio de valuación del CEDE *collar* es:

$$P_V = B_f + P_D, \tag{11.31}$$

donde:

B_f : precio teórico del bono flotante;

P_D : prima de las opciones que integran la estrategia dado por:

$$P_D = \sum_{i=2}^{n} (c_{1,i} - c_{2,i}), \tag{11.32}$$

donde:

$c_{j,i}$: precio de un *caplet* con precio de ejercicio igual a K_j, $j = 1, 2$, para el i-ésimo periodo;

n : número de cupones que componen el CEDE estructurado.

La valuación de cada uno de los componentes del CEDE se lleva a cabo de la siguiente manera. Primero, se obtiene el precio del bono, después se determinan los flujos del bono flotante. El primer flujo pendiente de pago se calcula con la tasa cupón vigente; mientras que los siguientes flujos se calculan con la tasa de mercado al día de valuación (en caso que lo especifique el prospecto se agrega la sobretasa). En el último flujo se agrega el valor nominal de acuerdo con:

$$\psi_i = \begin{cases} N \times DC_i \times TC_V(t_i - t_{i-1}) & \text{para} \quad i = 1, \\ N \times DC_i \times TC_M(t_i - t_{i-1}) & \text{para} \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ N \times DC_i \times TC_M(t_i - t_{i-1}) + N & \text{para} \quad i = n. \end{cases}$$

donde:

ψ_i : flujo correspondiente al período i;

N : valor nominal;

$t_i - t_{i-1}$: número de días, como proporción de año, del i-ésimo cupón;

TC_V : tasa del cupón vigente, ésta es conocida desde el último corte de cupón;

TC_M : tasa cupón de mercado, que corresponde a la tasa de referencia del bono en el día de valuación más la sobretasa especificada en el prospecto.

Posteriormente, se calcula el precio del bono flotante con el valor presente de sus flujos:

$$B_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_i}{(1 + R_s \tau)^{D_i/\tau}}, \tag{11.33}$$

donde:

D_i : número de días del cupón i (fecha en la que vence el cupón i menos la fecha de valuación) como proporción de año;

n : número de cupones pendientes de pago, incluyendo al vigente;

τ : periodo del cupón;

R_s : estructura de plazos obtenida a partir de

$$R_s = R_{\text{ref}} + \nu,$$

para descontar los flujos, capitalizable al plazo del cupón;

ν: sobretasa especificada en el prospecto de la emisión;

R_{ref} : tasa de referencia asociada al periodo cupón del bono.

Después, el valor de la prima para cada *caplet* se obtiene mediante la fórmula de Black (1976). En este caso, el valor de cada *caplet* es:

$$c_{j,i} = \frac{M \times D}{1 + f(0, t_{i-1}, t_i)D} e^{-rT} \left[f(0, t_{i-1}, t_i)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \right], \tag{11.34}$$

donde:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left[f(0, t_{i-1}, t_i)/K_j\right] + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}, \end{aligned}$$

$c_{j,i}$: prima del i-ésimo *caplet* con precio de ejercicio igual a K_j, $j = 1, 2$;

M : valor nominal del bono flotante;

D : plazo *forward* asociado, como proporción de año, a la tasa *forward* $f(0, t_{i-1}, t_i)$ con referencia en $t = 0$;

$f(0, t_{i-1}, t_i)$: tasa *forward*, obtenida a partir de la curva cupón cero correspondiente al subyacente en el día de valuación que va de t_{i-1} a t_i;

r : tasa libre de riesgo continuamente capitalizable;

T : número de días al vencimiento del *caplet*, como proporción de año;

$\Phi(\cdot)$: probabilidad acumulada de una variable normal estándar;

σ : volatilidad del rendimiento del subyacente;

En consecuencia, el precio limpio de valuación del CEDE está dado por la siguiente expresión:

$$PLV = PV - ID, \tag{11.35}$$

donde:

PV : precio sucio de valuación del CEDE *collar*;

ID : intereses devengados del cupón vigente.

11.6.4 CEDE *floor*

Esta estructura contempla una estrategia formada por un *floor*, con lo que se garantiza que la tasa de interés del bono flotante no sea inferior a cierto nivel acotado por una tasa piso. El número de *floorlets* que componen un certificado de depósito TIIE–*floor*, será igual al total de cupones del bono menos uno, dado que para el primer cupón la tasa se conoce al inicio de la emisión. De esta manera, si R es el rendimiento de referencia, K_1 es la tasa piso y ν es la sobretasa establecida en el inicio de la emisión, entonces la tasa de interés para los cupones que van desde el segundo hasta el n-ésimo, será determinada por las condiciones en la fecha de vencimiento de cada *floorlet* que se resumen en el siguiente cuadro:

Rango	Tasa cupón
Si $R \leq K_1$	$K_1 + \nu$
Si $R > K_1$	$R + \nu$

Cuadro 11.3 Determinación de la tasa de interés.

En virtud de que este instrumento representa la estructuración de una nota integrada por: 1) un bono flotante con pagos periódicos de interés y 2) una posición larga sobre un *floor* integrado por una serie de *floorlets* con precio de ejercicio igual a la tasa piso y plazo igual al de los cupones que componen el bono, el precio de valuación del CEDE TIIE-*floor* está dado por:

$$P_V = B_f + \text{Floor}, \tag{11.36}$$

donde:

B_f : Precio teórico del bono flotante;

Floor : Valor del *floor* que integra la estrategia.

La valuación por separado de cada uno de los componentes del CEDE se lleva a cabo de la siguiente manera. Observe primero que el precio del bono flotante se calcula de la misma manera que el CEDE *collar*, visto en la sección anterior. El valor de la prima de la opción se obtiene mediante la fórmula de Black (1976). Las siguientes expresiones determinan el valor de la prima para el *floor* que conforma la estructura del certificado de depósito:

$$\text{Floor} = \sum_{i=2}^{n} \text{Floorlet}_i,$$

donde el valor del i-ésimo *floorlet* es determinado por:

$$\text{Floorlet}_i = \frac{M \times (t_i - t_{i-1})}{1 + f(0, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})}\ e^{-r(t_i - t_{i-1})} \left[-f(0, t_{i-1}, t_i)\Phi(-d_1) + K\Phi(-d_2) \right] \quad (11.37),$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left[f(0, t_{i-1}, t_i)/K\right] + \frac{1}{2}\sigma^2(t_i - t_{i-1})}{\sigma\sqrt{(t_i - t_{i-1})}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(t_i - t_{i-1})},$$

con:

M : Valor nominal del bono flotante;

$f(0, t_{i-1}, t_i)$: Tasa *forward*, obtenida a partir de la curva cupón cero correspondiente al subyacente en el día de valuación que va de t_{i-1} a t_i;

r : Tasa libre de riesgo continuamente capitalizable;

$\Phi(\cdot)$: Probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar;

σ : Volatilidad del rendimiento del subyacente;

Por último, el precio limpio de valuación del CEDE está dado por:

$$PLV = PV - ID, \tag{11.38}$$

donde, como antes:

PV : Precio sucio de valuación del CEDE *collar*;

ID : Intereses devengados del cupón vigente.

11.6.5 CEDE gana si sube y CEDE gana si baja

Este tipo de instrumentos contemplan una opción de tipo binaria *cash or nothing* cuyo subyacente es regularmente el tipo de cambio FIX determinado por Banco de México o bien la tasa de subasta de CETES a 28 días. No obstante, la característica binaria del pago al vencimiento de la opción incorporada en esta nota no es dependiente de la trayectoria del subyacente. En este sentido, una opción *cash or nothing* paga un monto preestablecido X al vencimiento si la opción en la fecha de ejercicio termina *in the money*. Dado que este instrumento representa una estructura integrada por: 1) un bono cupón cero y 2) una opción de tipo binaria *cash or nothing*, con precio de ejercicio igual al nivel inicial del tipo de cambio establecido en el prospecto de la emisión, el precio de valuación del CEDE gana si sube (gana si baja) está dado por:

$$P_V = B + P_D, \tag{11.39}$$

donde:

B : Precio del bono cupón cero;

P_D : Prima de la opción binaria *cash or nothing* inmersa en el CEDE determinada por:

$$P_D = c_b \text{ para un CEDE gana si sube,}$$
$$P_D = p_b \text{ para un CEDE gana si baja.}$$

La valuación por separado de cada componente del CEDE se determina de la siguiente manera. En primer lugar, el valor del bono cupón cero en la fecha de valuación está determinado por:

$$B = \frac{N}{1 + R(t,T)(T-t)}.$$

Después, el valor de la prima de la opción puede obtenerse mediante la fórmula de Reiner y Rubinstein (1991) para valuación de opciones binarias *cash or nothing*. Las siguientes expresiones determinan, respectivamente, el valor de la prima de la opción inmersa en un CEDE gana si sube (*call*) y para un CEDE gana si baja (*put*):

$$c_b = X e^{-r(T-t)} \Phi(d),$$
$$p_b = X e^{-r(T-t)} \Phi(-d),$$

donde:

$$d = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$X = N \frac{TIM \times \tau}{360},$$

donde:

c_b : Prima de la opción *call cash or nothing* (gana si sube),

p_b : Prima de la opción *put cash or nothing* (gana si baja),

X : Monto preestablecido desde la emisión si la opción expira *in the money* representado por la tasa de interés máxima (TIM),

S_t : Valor del subyacente,

K : Precio de ejercicio,

r : Tasa libre de riesgo compuesta de manera continua,

r_f : Tasa libre de riesgo extranjera compuesta de manera continua,

$\Phi(\cdot)$: Probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar,

σ : Volatilidad del rendimiento del subyacente,

$T-t$:Número de días al vencimiento de la opción, como proporción de año,

τ : Plazo de la emisión,

TIM : Tasa de interés máxima establecida en el prospecto de la emisión.

11.6.6 CEDE *knock out down and out* y CEDE *knock out up and out*

Los CEDES *knock out* son certificados de depósito que llevan inmersa una opción binaria de barrera, la cual por lo regular se encuentra ligada al comportamiento de la paridad cambiaria peso-dólar. La principal característica de este tipo de notas estructuradas es que el rendimiento que pueden generar se paga al vencimiento y depende de si el subyacente alcanza o no la barrera especificada en los términos del contrato. El perfil de pago de un CEDE *knock out* del tipo *down and out* es:

$$\begin{array}{lll} N & \text{si en algún tiempo } t & S_t \leq H_L, \\ N+X & \text{si para todo tiempo } t & S_t > H_L. \end{array}$$

Mientras que para un CEDE *knock out* del tipo *up and out*, el perfil de pago es:

$$\begin{array}{lll} N+X & \text{si para todo tiempo } t & S_t < H_U, \\ N & \text{si en algún tiempo } t & S_t \geq H_U. \end{array}$$

donde:

S_t : Valor del subyacente,

N : Valor nominal del CEDE,

X : Flujo generado por el rendimiento establecido en el contrato,

H_L : Barrera inferior del subyacente que se especifica para un CEDE *down and out*,

H_U : Barrera superior del subyacente que se especifica para un CEDE *up and out*.

La barrera para cada uno de los CEDES (H_L y H_U) se establece en la fecha de emisión del certificado. Para el *down and out*, la barrera se encuentra por debajo del nivel del subyacente a la fecha de emisión, mientras que en el *up and out*, la barrera tiene un nivel superior.

Dado que este tipo de instrumentos representan la estructuración de una nota integrada por: 1) un bono cuyo valor al vencimiento es igual al 100% del capital invertido y 2) una opción binaria *down and out* (*up and out*) donde el subyacente es la paridad cambiara FIX MXP/USD con plazo igual al del bono, el precio de valuación del CEDE está dado por:

$$P_V = B + P_D,$$

donde:

B : Precio del bono cupón cero;

P_D : Prima de la opción binaria de barrera insertada en el CEDE determinada por:

$$P_D = \begin{cases} c_O & \textit{down and out}, \\ c_U & \textit{up and out}, \end{cases}$$

donde:

c_O : Prima de una opción binaria de barrera *down and out*,

c_U : Prima de una opción binaria de barrera *up and out*.

La valuación de cada componente del CEDE se determina de la siguiente manera. El valor del bono cupón cero en la fecha de valuación se calcula mediante:

$$B = \frac{N}{1 + R(t,T)(T-t)}$$

El precio de las opciones *down and out* y *up and out* utiliza el modelo propuesto por Rubinstein y Reiner (1991):

$$P_D = A - C,$$

donde

$$A = X r^{-T} N\left(\varphi x_1 - \varphi\sigma\sqrt{T-t}\right),$$

$$C = X r \left(\frac{H}{S_t}\right)^{2\lambda - 2} N\left(\eta y_1 - \eta\sigma\sqrt{T-t}\right)$$

con

$$x_1 = \left(\frac{\ln(S_t/H)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \lambda\sigma\sqrt{T-t},$$

$$y_1 = \left(\frac{\ln(H/S_t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \lambda\sigma\sqrt{T-t},$$

$$\lambda = 1 + \frac{\mu}{\sigma^2},$$

$$\mu = \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

donde:

X : Monto preestablecido desde la emisión si la opción expira *in the money* representado por la tasa de interés máxima (TIM),

r : 1 + tasa libre de riesgo,

σ : Volatilidad del rendimiento del subyacente,

$\Phi(\cdot)$: Probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar,

H : Barrera,

S_t : Precio del subyacente,

ρ : 1 + tasa de rendimiento del activo subyacente asociada al plazo anualizado.

φ y η son términos binarios cuyo valor depende del tipo de opción,

$\varphi = 1, \quad \eta = 1$, para la opción *down and out* (c_O),

$\varphi = -1, \quad \eta = -1$, para la opción *up and out* (c_U).

11.6.7 CEDE dual tipo de cambio

La estructura de este CEDE contempla una opción de tasas de interés. Este instrumento adiciona a la tasa de rendimiento mínima garantizada (TMG) un rendimiento que está en función de la paridad cambiaria MXP/USD. Esta nota tiene estructurado un *bullet bond* con una tasa mínima garantizada fija, la cual se determina al inicio de la emisión.

El subyacente de estos certificados de depósito es el rendimiento del tipo de cambio FIX que se obtenga en una fecha específica, respecto a un nivel inicial de tipo de cambio MXP/USD establecido por el emisor al inicio del certificado de depósito.

Este instrumento se integra por: 1) un bono (*bullet bond*) cuyo único cupón se paga al vencimiento, junto con el principal 100% garantizado y 2) una opción europea de tasas de interés, con precio de ejercicio igual a la tasa mínima garantizada establecida en el prospecto de la emisión.

El precio sucio de valuación del CEDE dual tipo de cambio es:

$$P_V = B_b + P_D,$$

donde:

B_b : Precio del *bullet bond*;

P_D : Prima de la opción de tasas de interés incorporada en el CEDE calculada mediante:

$$P_D = \max\left(TMG, TR\right),$$

donde:

TMG : Tasa mínima garantizada establecida en el prospecto de la emisión;

TR : Tasa de rendimiento ligada al tipo de cambio final.

La valuación de cada componente del CEDE se obtiene a continuación: primero se calcula el precio del *bullet bond*, mismo que liquidará a su vencimiento el 100% del capital invertido (valor nominal establecido en el prospecto), más los intereses devengados a la tasa mínima garantizada. De esta manera, el valor del bono está dado por:

$$B_b = \frac{N \times (1 + TMG(\tau/360))}{1 + R(t,T)(T-t)},$$

donde

N : Valor nominal del CEDE.

TMG : Tasa mínima garantizada establecida en el prospecto de la emisión.

τ : Plazo de la emisión.

R : Tasa de rendimiento asociada al número de días por vencer, que se obtiene de las curvas nominales bancarias.

$T - t$: Días por vencer de la emisión a la fecha de valuación.

Posteriormente, la prima de la opción se obtiene a partir de la fórmula propuesta por Black (1976) para valuación de futuros de tasa. Sin embargo, existen algunas consideraciones que hay que tomar en cuanta en la valuación de la opción de tasas de interés inmersa en este tipo de nota:

(i) El *pay-off* de la opción inmersa en el CEDE es ajustado mediante un factor o porcentaje de garantía establecido en el prospecto de la emisión, es decir, el tipo de cambio final debe ajustarse por dicho factor.

(*ii*) El rendimiento adicional a la tasa mínima garantizada que puede pagar el certificado de depósito es liquidado justamente al vencimiento de la emisión junto con el valor al vencimiento del *bullet bond* con el cual fue estructurada la nota. Por esta razón, el valor futuro de dicho rendimiento (en caso de que éste tenga valor en la fecha de valuación), es descontado desde la fecha de vencimiento del certificado de depósito.

(*iii*) Dado que el prospecto de la emisión establece una fecha determinada para la observación del tipo de cambio final (FIX final) que será tomado como referencia a fin de obtener el valor de la opción al vencimiento. El valor del tipo de cambio de referencia para cada uno de los días que van desde la fecha de emisión hasta la fecha de la observación es calculado de la siguiente manera:

$$TC_{\mathrm{ref}_t} = FIX_t + PF,$$

donde:

FIX_t : Tipo de cambio FIX dado a conocer por Banco de México en la fecha de valuación t.

PF : Puntos *forward* del día de la valuación.

(*iv*) Con el tipo de cambio de referencia obtenido a partir del inciso anterior, se calcula la tasa de rendimiento ligada al tipo de cambio final $TC_{f,t}$ a la fecha de valuación mediante:

$$TR_f = \max\left[\left(\frac{TC_{f,t} \times F}{TC_i} - 1\right)\frac{1}{\tau}, 0\right],$$

donde:

TR_f : Tasa de rendimiento ligada al tipo de cambio final.

$TC_{f,t}$: Tipo de cambio de referencia en la fecha de valuación t.

F : Factor establecido en el prospecto de la emisión (Porcentaje de Garantía).

TC_i : Tipo de cambio inicial.

τ : Plazo de la emisión como proporción de año.

Bajo las consideraciones anteriormente expuestas, la prima de la opción de tasas con la cual es estructurado el certificado de depósito se obtiene a partir de:

$$P_D = N \times \tau\ e^{-r(T-t)}\left[TR_f\Phi(d_1) - TMG\ \Phi(d_2)\right],$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(TR_f/TMG\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

donde:

N : Valor nominal del CEDE;

τ : Plazo de la emisión del CEDE;

r : Tasa libre de riesgo compuesta de manera continua;

TR_f : Tasa de rendimiento ligada al tipo de cambio final;

TMG : Tasa mínima garantizada establecida en el prospecto de la emisión;

$\Phi(\cdot)$: Probabilidad acumulada de una variable aleatoria normal estándar;

σ : Volatilidad del rendimiento del subyacente;

$T - t$: Número de días al vencimiento de la opción;

En consecuencia, el precio limpio de valuación del CEDE está dado por:

$$PLV = PV - ID,$$

donde, como antes, PV es el precio sucio del CEDE dual tipo de cambio e ID son los intereses devengados del cupón vigente.

11.7 Bibliografía

Black, F. (1976). The Pricing of Commodity Contracts, *The Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167-179.

Black, F., and M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Choudhry, M. (2004). Corporate bonds and structured financial products, Elsevier Butterworth –Heinemann, Oxford; UK.

Das, S. (2000). Credit derivatives and credit linked notes, John Wiley and Sons, Singapore.

Fabozzi, F. J. (2006). Handbook of Structured Financial Products; Frank J. Fabozzi Editors, NY, USA; 1st. ed.

Hull, J. C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives (6th Edition). Prentice Hall International, UK.

Hull, J., and A, White (1990). Pricing Interest Rate Derivatives Securities. *Review of Financial Studies*, Vol. 3. No. 4, pp. 573-592.

Jamshidian, F. (1973). An Exact Bond Option Pricing Formula , *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 205-20.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S.A. de C.V.

McCann, K., and Cilia, J. (1994). Structured Notes. Federal Reserve Bank of Chicago, Financial Markets Unit (Supervision and Regulation), manuscript.

Rubinstein, M., and E. Reiner (1991). Breaking down the barriers, *Risk* , Vol. 4, pp. 28-35.

Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

11.8 Ejercicios

11.1 Existen una gran gama de posibilidades dentro de la confección de instrumentos estructurados, aunque existen estilos de estos instrumentos que están ya definidos dentro de los mercados. Uno de ellos son las notas llamadas "Set up's" Estas notas son bonos con pagos de cupón crecientes en determinadas fechas, pero con la característica de ser redimibles (llamables) por el emisor justo antes del pago del cupón. Para ejemplificarlo, considere en un bono de valor nominal de \$100, cuya tasa de ejercicio sea de 8.0% en una entorno donde la tasa libre de riesgo es de 5%, la volatilidad de la tasa libre de riesgo es de 20% y que además muestra las siguientes características

Fecha	Tasa de cupón	Redimible
Ene-07	0.06	no
Ene-08	0.06	no
Ene-09	0.08	no
Ene-10	0.1	si

Cuadro 11.4 Pago de cupones y posibilidades de remisión del bono.

Solución: El valor de los instrumentos estructurados es, a la fecha, uno de los temas de vanguardia dentro de la investigación financiera. Aunque los métodos de valuación actuales no toman en cuenta las relaciones entre el precio del bono y las opciones incrustados en ellas (los valúan por separado), son la mejor aproximación para la valuación diaria de estos híbridos.

Iniciaremos la valuación del bono bajo el supuesto de que la opción de compra europea en la que se encuentra corto el tenedor del bono no es ejercida. Este supuesto nos lleva a que el precio del bono es igual a la suma de los valores presentes de los cupones desde el periodo 1 hasta el periodo n más el valor presente del nominal; pagadero en el último periodo, lo que se puede leer como: $B_t = \sum_{t:1}^{n} r_{ct} N\left(1+r_f\right)^{-t} + N\left(1+r_f\right)^{-n}$. De lo anterior; la conocida ecuación para obtener el precio de un bono cuponado; podemos inferir que el precio del bono es:

$$B_t = \frac{6}{(1.05)^1} + \frac{6}{(1.05)^2} + \frac{8}{(1.05)^3} + \frac{10}{(1.05)^4} + \frac{100}{(1.05)^4} = 108.5644356.$$

Si supone que la estructura de plazo es plana; *i.e.* la tasa de interés es la misma para todos los plazos. Este supuesto se hace por simplicidad, pero si se aplica la estructura de plazo real, los resultados seguirán la misma lógica.

Ahora se procede a valuar la opción europea de compra que va implícita en el bono. Comencemos por entender la posición del tenedor del bono en esta opción. Como puede suponer el lector, la opción de recompra implica que el emisor será liberado de sus obligaciones a cambio del pago de una cantidad preestablecida; generalmente el valor nominal del bono; si la tasa de interés subyacente pasa un nivel previamente acordado; K. Para seguir con el ejercicio, suponga que el emisor "llamará" el bono si la tasa de interés subyacente S_t, es menor a la tasa de ejercicio dado que le será más barato financiarse en el mercado que seguir con el pago del bono. Todo lo anterior, apunta a que el tenedor del bono se encuentra corto en una opción de compra del tipo europea, la cual se valuará a continuación. Sabemos de capítulos anteriores que el precio de una opción europea de compra está dado por:

$$\begin{aligned}
C_B &= N(T-t)e^{-r(T-t)}\left[F_0\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right] \\
d_1 &= \frac{\ln\left(F_0/K\right) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.
\end{aligned}$$

Lo que lleva a $d_1 = \frac{\ln(.05/0.08)+0.2^2(4)/2}{0.2\sqrt{4}} = -0.9750090731$ y $d_2 = -1.375009073$. Una vez que se buscan estos valores en la tabla normal (o sus aproximados) se tiene que $\Phi(d_1) = 0.1647778797$ y $\Phi(d_2) = 0.0845643159$. Usando estos valores se puede decir que la prima por la opción de compra (usando el modelo de Black tal y como se explica en este capítulo) es de $C_B = 0.48264136$. Se mencionó que al comprar esta clase de bonos, el tenedor quedaba corto en una opción europea de compra, por lo que tiene derecho a recibir una prima (el valor anteriormente calculado), la cual se debe descontar del precio al que se adquirirá el bono, por lo que el precio final del instrumento será el precio del bono sin opción menos la prima de la misma, esto es 108.0817942.

Este resultado debe de ser manejado con prudencia pues los supuestos que respaldan la valuación de opciones en el modelo de Black, se han trasladado a nuestro ejercicio. El supuesto más problemático es la distribución lognormal del subyacente, lo cual no es creíble en una tasa de interés (puesto que la evidencia empírica indica que presentan reversión a la media). También se debe tener cuidado con el supuesto de volatilidad constante y por lo tanto con la "sonrisa de volatilidad". Aún con todos sus bemoles, esta forma de valuación es la más usada en el mercado hoy en día y sirve para dar una referencia del precio justo del instrumento. Es responsabilidad de cada agente el refinar o modificar la metodología para obtener mejores valuaciones y buscan con ello una ganancia dentro del mercado.

11.2 El lector ha podido constatar que las notas estructuradas son en esencia bonos con alguna(s) clase(s) de opción(es) pegadas a él, y que esta opción puede cambiar drásticamente el perfil de pagos del bono. A continuación se dará un ejemplo de el riesgo mercado aparejado a un instrumento estructurado calculando la duración (una medida usada para cuantificar el riesgo de los bonos) del bono con y sin la opción.

Solución: La duración de un bono es la medida de cuanto tiempo tarda; en promedio; el tenedor del bono en recuperar su inversión. Esta es expresada mediante

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right]$$

En el Cuadro (11.5) siguiente se muestra que la duración del bono anterior; suponiendo que la opción no es ejercida; es de 3.665991202.

Duración del bono cuando la opción no es ejercida							
yield = 0.07		Nominal =100		Precio de bono	101.2969653		
T	Fecha	Tasa cupón	Cupón	Flujo	VP Flujo	Participación	Tiempo × Ponderación
1	Ene-07	0.06	6	6	5.607476636	0.055356808	0.055356808
2	Ene-08	0.06	6	6	5.24063237	0.051735334	0.103470669
3	Ene-09	0.08	8	8	6.530383015	0.064467706	0.193403119
4	Ene-10	0.1	10	110	83.91847333	0.828440152	3.313760606
Σ				130	101.2969653	1	3.665991202

Cuadro 11.5 Duración del bono cuando la opción no es ejercida.

Ahora; dentro del Cuadro 11.6; se muestra el mismo cálculo cuando la opción es ejercida. Como puede observar el lector la duración cae drásticamente a 2.833795863 generando una nueva fuente de incertidumbre para el inversionista a pesar de que por construcción ambos bonos tienen el mismo *yield* (tasa interna de retorno que hace la suma de los flujos; incluida inversión; cero).

Duración del bono cuando la opción es ejercida							
yield = 0.07		Nominal =100		Precio de bono	99.00827971		
T	Fecha	Tasa cupón	Cupón	Flujo	VP Flujo	Participación	Tiempo × Ponderación
1	Ene-07	0.06	6	6	5.607476636	0.056636441	0.056636441
2	Ene-08	0.06	6	6	5.24063237	0.052931254	0.105862507
3	Ene-09	0.08	8	108	88.1601707	0.890432305	2.671296915
Σ				120	99.00827971	1	2.833795863

Cuadro 11.6 Duración del bono cuando la opción es ejercida.

Es posible hacer escenarios sobre el cambio porcentual en el precio de un bono ante cambios en su *yield* si se conoce su duración. Esta relación está dada por:

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y.$$

Ahora suponga que se mueve el *yield* un punto base (0.0001); para ambos casos; esto conduce a cambios de valores de

$$\Delta B = -D\Delta y B = -3.665991202 \times 0.0001 \times 101.2969653 = -0.03713537836$$

cuando la opción no es ejercida y de

$$\Delta B = -D\Delta y B = -2.833795863 \times 0.0001 \times 99.00827971 = -0.02805692534$$

cuando la opción es ejercida. Aunque todos estos cálculos se basan en la idea de que la tasa *yield* se compone continuamente; para arreglarlo se usa la duración modificada: $\Delta B = \frac{-D\Delta y B}{1+y/m}$; se puede ver que un aumento de 0.0001 en la tasa *yield* genera pérdidas de 4 y 3 centavos (aproximadamente) respectivamente por bono. Cuando las opciones abarcan más periodos, los cambios son más dramáticos y representan una fuente de incertidumbre aún mayor para los inversionistas.

11.3 Ahora se enfrenta al lector con el problema de valuar un instrumento similar al anterior, pero cuya opción se extiende a dos periodos. En estos casos; cuando la opción abarca más de un periodo; el valuador se encuentra con el problema de tener varios puntos a lo largo del tiempo donde la opción puede ser ejercida; *i.e.* el bono llamado.

Siguiendo la lógica; que aunque sea defectuosa, es la mejor aproximación; de separar al bono de la opción, se puede tratar de resolver la opción que permite al emisor; si así conviene a sus intereses; recomprar el bono en n fechas futuras especificadas con antelación en el contrato. A este tipo de derivados se les conoce como opciones "Bermuda" o "Atlánticas" por encontrarse entre las opciones "europeas" con sólo un periodo de ejercicio y las "americanas" ejecutables en cualquier momento.

Para la resolver este problema, se procede de manera similar a como se resolvería una opción americana; sólo aumentando el tamaño de los intervalos de acuerdo a los tiempos de ejercicio especificados en el contrato. Esto es usando la técnica de los árboles binomiales[4] que son resueltos hacia atrás. A continuación se revisan las características del instrumento estructurado en cuestión

Fecha	Tasa de cupón	Redimible
Ene-07	0.06	no
Ene-08	0.06	no
Ene-09	0.08	no
Ene-10	0.1	si
Ene-11	0.12	si

Cuadro 11.7 Pago de cupones y posibilidades de remisión del bono.

Solución: Para obtener el valor de la opción “Bermuda” planteada por el problema anterior se necesita conocer la forma en que la tasa subyacente se irá moviendo. Para ello se construye un primer árbol donde a cada periodo, el subyacente pueda subir o bajar de forma aleatoria $\sigma\sqrt{T-t}$; por comodidad se supondrá que se sigue una capitalización continua; lo que lleva a que la tasa subyacente para el periodo $i+1$ será de: $s_i = s_0 e^{M\sigma\sqrt{T-t}}$. Donde M es la suma algebraica de las veces que el subyacente ha subido y bajado hasta el momento. Esta lógica lleva al siguiente árbol:

Movimientos de las tasas						
M/T	0	1	2	3	4	5
5						0.135914091
4					0.111277046	0.111277046
3				0.09110594	0.09110594	0.09110594
2			0.074591235	0.074591235	0.074591235	0.074591235
1		0.061070138	0.061070138	0.061070138	0.061070138	0.061070138
0	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
-1		0.040936538	0.040936538	0.040936538	0.040936538	0.040936538
-2			0.033516002	0.033516002	0.033516002	0.033516002
-3				0.027440582	0.027440582	0.027440582
-4					0.022466448	0.022466448
-5						0.018393972

Cuadro 11.8 Árbol binomial para los movimientos de la tasa de interés.

A continuación se verifican los movimientos del derivado tomando en cuenta la tasa de ejercicio de 8%. Esta tasa de ejercicio implica que a cualquier otra tasa menor a K, el derivado no tiene valor. Una vez que el lector tiene presente este detalle y que se hará una valuación hacia atrás, sabrá que sólo necesita la última columna de valores del derivado. Reste ahora a la última columna de valores del subyacente K y deje como 0 aquellos que sean negativos. A partir de ese punto se valúa hacia atrás el derivado en el *Universo Neutral al Riesgo* [5].

Para hacerlo, necesitamos conocer que tanto subirá o bajará el subyacente a cada paso. Este dato lo usamos para construir el árbol del subyacente, esto es: $u = e^{\sigma\sqrt{T-t}}$ y $d = e^{-\sigma\sqrt{T-t}}$. Los cuales dentro del ejercicio son respectivamente $u = 1.22140276$ y $d = 0.81873075$

[4] Véase el Apéndice C.

[5] Dejando a un lado los tecnicismos, el UNR implica que la tasa de crecimiento del subyacente es la tasa libre de riesgo y que para obtener las probabilidades de que el subyacente suba o baje se puede, en un periodo de tiempo usar la tasa libre de riesgo.

Con estos valores podemos llegar a la probabilidad neutral al riesgo p de que el subyacente suba, esta es: $p = \frac{e^{r(T-t)}-d}{u-d} = 0.5774932$. Ahora sólo resta llevar a cabo la valuación hacia atrás de cada nodo del árbol. Por cuestión de espacio, sólo mostraremos al lector el proceso de un nodo, el situado en la casilla (4,4) de la tabla, dejándole la revisión del resto.

En general, el valor de un nodo se obtiene como el valor presente del valor ponderado, por la probabilidad neutral al riesgo, del nodo, esto es:

$$f_i = e^{r(T-t)} \left(f_{iu}p + f_{id} \left(1-p\right)\right)$$

donde f_i es el valor del derivado en el nodo i, f_{iu} es el valor del derivado al siguiente periodo si este sube y f_{id} si baja. Para el nodo antes mencionado, se tiene un valor de 0.03888. A continuación se muestra el árbol de los valores del derivado en el UNR.

Movimientos de las tasas						
M/T	0	1	2	3	4	5
5						0.05591
4					0.03888	0.03128
3				0.02660	0.01899	0.01111
2			0.01797	0.01153	0.00674	0.00000
1		0.01201	0.00700	0.00409	0.00000	0.00000
0	0.00796	0.00425	0.00249	0.00000	0.00000	0.00000
-1		0.00151	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-2			0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-3				0.00000	0.00000	0.00000
-4					0.00000	0.00000
-5						0.00000

Cuadro 11.9 Árbol binomial para los valores del derivado ante movimientos del subyacente.

Después de esto se buscan los valores máximos entre los árboles de la valuación en el UNR y el de los valores del derivado a cada movimiento del subyacente. Dado que en un call siempre serán mayores los del árbol del UNR, se deja el cuadro anterior como el resultado final. Con lo que la opción de compra tiene un valor de $0.00796N$ donde N es el valor nominal del bono, con lo que tenemos un valor de la opción de 0.796194. Para concluir con el ejercicio sólo debemos restar, la lógica de la resta se explica en el primer ejercicio, el valor de la "Bermuda" al valor del bono, lo que proporciona un valor de $108.5644356 - 0.796194 = 107.768242$.

Capítulo 12

Valor en Riesgo

Conceptos básicos:

- ✓ **Valor en riesgo** (VaR^X_{1-q})
- ✓ **Mapeo de flujos**
- ✓ VaR^X_{1-q} **paramétrico**
- ✓ VaR^X_{1-q} **y Función de cuantiles**
- ✓ **Descomposición de Cholesky**
- ✓ VaR^X_{1-q} **y CAPM (Modelo Diagonal)**
- ✓ VaR^X_{1-q} **Delta-Gama para derivados**
- ✓ VaR^X_{1-q} **de un bono cupón cero**
- ✓ VaR^X_{1-q} **de un *swap* de tasa de interés**
- ✓ VaR^X_{1-q} **de un contrato *forward* de tipo de cambio**

12.1 Introducción

Han pasado más de 10 años desde que JP Morgan dio a conocer la metodología de lo que ellos mismos llamaron VaR^X_{1-q} (Value at Risk)[1] y aunque ha sufrido varias modificaciones con la finalidad de mantenerla vigente, su finalidad básica sigue siendo la misma, dar una idea de la peor pérdida esperada con un intervalo deseado de confianza en un horizonte de tiempo.

La metodología básica, actualmente aceptada, fue desarrollada por Mina y Xiao en 2001, siendo hecha la más reciente modificación en 2007, donde se hace uso de un modelo I-GARCH(1), el cual trata de modelar las colas anchas[2] de los rendimientos haciendo uso de una distribución "Student t" con cinco grados de libertad como función a maximizar en el proceso de máxima verosimilitud.

En el más reciente documento técnico se hace explícito que la metodología anterior puede ser vista como una particularidad del nuevo modelo I-GARCH, dado que el decaimiento exponencial[3] es un caso particular del I-GARCH cuando los ponderadores son todos iguales al parámetro usado en el decaimiento exponencial.

[1] El documento original fue desarrollado en 1994.

[2] Una distribución con colas pesadas es aquella distribución de densidad de probabilidad que tiene alguno de sus momentos infinito, mientras que una distribución de colas pesadas es aquella que sólo concentra más masa de probabilidad en las colas que una normal.

[3] El parámetro usualmente usado era de 0.94, este se obtuvo de manera empírica según lo indican Mina y Xiao en el documento de 2001.

Dentro de las mejoras que han hecho a la metodología del VaR_{1-q}^{X} en la revisión de 2006, se encuentra la adaptabilidad intertemporal del cálculo. En la versión anterior, el VaR_{1-q}^{X} a varios días se calculaba multiplicando el VaR_{1-q}^{X} a un día por $\sqrt{t}$ creando una distorsión para plazos mayores a 3 meses, causada por los supuestos hechos en su construcción. En la actualización, el I-GARCH(1) se usa como una forma de parametrizar un proceso (que es usado como una ecuación en diferencia), al que luego sólo se añade un ruido blanco como variable aleatoria, el cual es el mismo sin importar el horizonte temporal al que se aplique. Sin embargo, este proceso depende de la validez del I-GARCH, de sus parámetros y de que los residuales sean en efecto ruido blanco.

A pesar de algunas desventajas que han sido analizadas por diversos autores[4] tales como la presencia de colas pesadas en los rendimientos, lo que hace que el VaR_{1-q}^{X} subestime las pérdidas potenciales o la incapacidad del VaR_{1-q}^{X} de cumplir con todos los axiomas de Riesgo de Artzner.[5] El VaR_{1-q}^{X} es la medida de riesgo más usada por las personas dedicadas a los mercados financieros a lo largo del mundo, principalmente por su simplicidad teórica y su relativamente fácil implementación.

A grandes rasgos, el VaR_{1-q}^{X} es el cuantil en el cual la distribución de los rendimientos alcanza un nivel de confianza establecido por el analista, por lo general la peor pérdida dada ese nivel de confianza, *i.e.* en que punto de pérdida, se acumula el x porcentaje de la distribución durante un horizonte de tiempo definido por el mismo analista. La manera de obtener esta distribución, caracteriza al tipo de VaR_{1-q}^{X} que se usa, pudiendo ser un remuestreo de rendimientos históricos, o VaR_{1-q}^{X} histórico, simulaciones de rendimientos dada una distribución y parámetros predeterminados, VaR_{1-q}^{X} Monte Carlo o inferencias sobre una distribución preestablecida (normal), VaR_{1-q}^{X} paramétrico.

A final de cuentas, y a pesar de todos sus bemoles, el VaR_{1-q}^{X} es un solo número que resume la estimación de la pérdida máxima de un portafolio a un nivel de confianza dado en un intervalo de tiempo sin importar la complejidad o tamaño del portafolio. En el transcurso de este capítulo, se irá desarrollando el concepto de VaR_{1-q}^{X} y se mostrará su construcción básica.

12.2 Mapeo de flujos para simplificar el cálculo y la actualización del VaR_{1-q}^{X}

En el apartado anterior, se dijo que el VaR_{1-q}^{X} resumía en un solo número la estimación de la pérdida máxima dado un nivel de confianza e intervalo de tiempo previamente especificados. En el caso de portafolios más o menos sofisticados en los que se incluyen derivados, se enfrenta el problema de "captar" todos los efectos que el movimiento del subyacente tiene sobre el derivado (el cual en algunos casos es altamente no lineal).

Este problema fue solucionado por el equipo de JP Morgan creando un sistema de "vértices" los cuales no son otra cosa que activos simples, *V.g.* títulos accionarios, índices, curvas de ceros a distintos plazos (este es uno de los usos de las curvas desarrolladas en capítulos anteriores) o tipos de cambio, a los cuales se "mapean" los instrumentos más complicados.

Este mapeo no es otra cosa que una linealización de los efectos que el movimiento de cada uno de estos vértices causa en el derivado. Como puede estar imaginando el lector, esto puede

[4] Una crítica interesante, informada y de fácil lectura es hecha por Nassim Taleb, un exitoso "trader" y crítico del VaR_{1-q}^{X}.

[5] Para mayores referencias vea el libro de "Riesgos Económicos y Financieros" de Francisco Venegas Martinez (2006).

ser hecho usando expansiones por series de Taylor.[6] La aproximación por serie de Taylor es realizada al rededor del valor de la variable bajo análisis, y va perdiendo eficacia conforme se aleja de ese punto (al igual que cualquier otra linealización)

En el caso de portafolios con muchos activos, los cuales por lo general presentan correlaciones, se recurre al uso de la matriz varianza covarianza y a la propiedad de linealidad (la combinación lineal de variables aleatorias normales genera otra variable normal) lo que disminuye significativamente el número de cálculos.

12.3 El concepto de valor en riesgo (paramétrico)

A continuación, se presenta la definición formal del VaR_{1-q}^{X} paramétrico sobre el cambio de valor de un portafolio, que por simplicidad se supone que está formado sólo por dos activos con ponderaciones w_1 y w_2 respectivamente, esto es $\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}$.

A continuación se define la variable aleatoria X como el cambio de valor en el portafolio entre dos puntos en el tiempo, esto es

$$\Pi_t = w_1 S_{1t} + w_2 S_{2t}$$

Formalmente la definición de VaR_{1-q}^{X} dada en la introducción del capítulo, se define al valor en riesgo de X al nivel (de confianza) $1-q$ denotado por $-\mathrm{VaR}_{1-q}^{X}$, se define como el peor valor del portafolio, en un periodo de tiempo dado, $[t, T]$, para un intervalo de confianza del $(1-q)100\%$. Lo que se puede escribir como:

$$\mathbb{P}_{\theta}\left\{-\mathrm{VaR}_{1-q}^{X} \leq X\right\} = 1 - q.$$

Lo que puede ser reescrito como

$$\mathbb{P}_{\theta}\left\{X \leq -\mathrm{VaR}_{1-q}^{X}\right\} = q.$$

Donde lo único que se ha hecho es cambiar el "sentido" desde donde se observa la función de probabilidad. En la segunda expresión se ve la función de densidad de probabilidad desde la izquierda a derecha (de forma creciente). Esta forma de "visualizar" la función de probabilidad, lleva a las definiciones alternativas del VaR_{1-q}^{X}, estas son:

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{1-q}^{X} &= -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\left\{X \leq x\right\} \geq q\right\} \\ &= -\sup\left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\left\{X \leq x\right\} \leq q\right\}.\end{aligned}$$

[6] Una representación por serie de Taylor es la representación de una función a través de una suma infinita de términos calculados a partir de los valores de sus derivadas al rededor de un punto, esto es:

$$f\left(x_1, ..., x_d\right) = \sum_{n_1}^{\infty} ... \sum_{n_d}^{\infty} \frac{\delta^{n_1}}{\delta x_1^{n_1}} ... \frac{\delta^{n_d}}{\delta x_d^{n_d}} \frac{f\left(a_1, ..., a_d\right)}{n_1! ... n_d!} \left(x_1 - a_1\right)^{n_1} ... \left(x_d - a_d\right)^{n_d}.$$

La linealización implica truncar la serie de Taylor en las primeras derivadas (sólo se usa el vector gradiente), esto es

$$f\left(x_1, ..., x_d\right) = f\left(x_{1a}, ..., x_{da}\right) + f_{x_1}\left(x_{1a}, ..., x_{da}\right)\left(x_1 - x_{1a}\right) + ... + f_{x_d}\left(x_{1a}, ..., x_{da}\right)\left(x_d - x_{da}\right).$$

Esta definición es aplicable tanto a variables aleatorias continuas como discretas (dado que se usa el negativo de la función de cuantiles y esta existe para ambos tipos de variables). De lo anterior se desprende la definición formal del Valor en Riesgo (VaR_{1-q}^{X}), esta es:

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{X} = -\inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\left\{X > x\right\} \leq 1-q\right\}.$$

12.4 Relación del $\mathbf{VaR}_{1-q}^{X}$ con la función de cuantiles

En la sección anterior, se definió como una variable aleatoria X al cambio en el valor del portafolio. Suponiendo que esta cumple con la definición de variable aleatoria[7], se puede definir a la función de cuantiles como :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_X(q) &= \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\left\{X \leq x\right\} \geq q\right\}\\ &= \sup\left\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}_{\theta}\left\{X \leq x\right\} \leq q\right\}\end{aligned}$$

Siendo una de sus propiedades ser creciente y continua por la derecha. Si la variable aleatoria es continua, entonces se tiene que $\mathcal{Q}_X(q) = F_X^{-1}(q)$. Observe que si X es una variable aleatoria continua se cumple que

$$\mathrm{E}[g(X)] = \int_0^1 g(\mathcal{Q}_X(q))\mathrm{d}q.$$

Después de ver la definición de la función de cuantiles, el lector puede relacionarla con la definición del VaR_{1-q}^{X} al entender que el VaR_{1-q}^{X} no es otra cosa que el negativo de la función de cuantiles, es decir:

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{X} = -\mathcal{Q}_X(q).$$

12.5 $\mathbf{VaR}_{1-q}^{X}$ paramétrico (supuesto de normalidad)

La versión paramétrica del VaR_{1-q}^{X} tiene como supuesto básico la normalidad conjunta en la distribución de las innovaciones de los procesos que siguen los activos del portafolio analizado, lo que implica que el portafolio sigue una distribución normal multivariada[8].

El supuesto de normalidad simplifica en gran medida los cálculos del VaR_{1-q}^{X} por dos razones principales, la primera es que todas las interdependencias entre los activos se pueden modelar haciendo uso de la matriz de varianza - covarianza[9] y la segunda es la propiedad de linealidad de la distribución normal, esta propiedad dice que la suma de distribuciones normales me da como resultado otra distribución normal[10]. Por simplicidad en la exposición, se tomará el cambio en el

---

[7] Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, entonces la función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria valuada en los reales si $\{w : X(w) \leq r\} \in \mathcal{F} \quad \forall\ r \in \mathbb{R}$.

[8] Es importante hacer notar que una distribución normal conjunta implica que las distribuciones marginales de cada activo son a su vez distribuciones normales, pero esta propiedad no se da de manera necesaria en sentido contrario.

[9] Todos los momentos de una distribución normal pueden ser expresados como funciones de los dos primeros momentos.

[10] Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias normales. Ahora considere la función característica de esta función para analizar su distribución, esto es:

$$\varphi\left(x_1 + ... + x_n\right) = \mathrm{E}\left[e^{it(x_1+...+x_n)}\right] = \mathrm{E}\left[e^{itx}...e^{itx_n}\right],$$

dado que se conoce que cada una de ellas es normal, se tiene que:

$$\varphi\left(x_1 + \ldots + x_n\right) = e^{\left(it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}\right)} ... e^{\left(it\mu_n - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}\right)} = e^{\left(it(\mu_1+...+\mu_n) - \frac{\left(\sigma_1^2+...+\sigma_n^2\right)t^2}{2}\right)}.$$

portafolio como una sola variable aleatoria que se distribuye normal con media y varianza dadas, esto es:

$$X = \Pi_T - \Pi_t \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)).$$

Lo que implica que:

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{X-\mu(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \le -z_q \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} = q,$$

Normalizando la variable aleatoria X se llega a:

$$\mathbb{P}\left\{ X \le \mu(T-t) - z_q\sigma\sqrt{T-t} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} = q.$$

Lo que finalmente lleva a la definición de VaR^X_{1-q} paramétrico, esto es:

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}^X_{1-q} =& z_q\sigma\sqrt{T-t} + \mathrm{E}^{\mathbb{P}}[-X \mid \mathcal{F}_t\ ] \\ =& z_q\sigma\sqrt{T-t} - \mu(T-t). \end{aligned} \tag{12.1}$$

En este caso, basta con utilizar los conocidos cuantiles de la normal para saber que desviación estándar usar si se desea un cierto nivel de confianza. Los niveles más usados son: $1-q=0.95$, $z_q=1.65$, y si $1-q=0.99$, $z_q=2.33$. Si el rendimiento medio y la volatilidad son anualizados, valores típicos de $T-t$ son[11] 5/360 (5 días) y 10/360 (10 días).

El supuesto de normalidad también facilita los cálculos del valor en riesgo del cambio en valor de la suma (combinación) de dos portafolios. En efecto, si $X \sim \mathcal{N}(\mu_{\scriptscriptstyle X}(T-t), \sigma^2_{\scriptscriptstyle X}(T-t))$ y $Y \sim \mathcal{N}(\mu_{\scriptscriptstyle Y}(T-t), \sigma^2_{\scriptscriptstyle Y}(T-t))$ con $\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{\scriptscriptstyle XY}(T-t)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}^{X+Y}_{1-q} =& z_q\sigma_{\scriptscriptstyle X+Y}\sqrt{T-t} - \mu_{\scriptscriptstyle X+Y}(T-t) \\ =& z_q\sqrt{\sigma^2_{\scriptscriptstyle X} + 2\sigma_{\scriptscriptstyle XY} + \sigma^2_{\scriptscriptstyle Y}}\ \sqrt{T-t} - (\mu_{\scriptscriptstyle X} + \mu_{\scriptscriptstyle Y})(T-t). \end{aligned} \tag{12.2}$$

12.6 Valor en riesgo del rendimiento de un portafolio

En esta sección se muestra que cuando los rendimientos de los activos son normales, el cálculo del valor en riesgo de un portafolio también es sencillo, esta característica del VaR^X_{1-q} se desprende del hecho de que cumple con el axioma de medida coherente de riesgo referente a la homogeneidad positiva, esto es que cumple con el teorema de Euler sobre funciones homogéneas de grado uno[12]. Por simplicidad, se considera un portafolio con dos activos cuyos rendimientos están correlacionados entre sí.

---

[11] Si se excluyen fines de semana y días festivos se puede dividir sobre 252 ó 264, dependiendo de si los meses se toman con 21 ó 22 días.

[12] Sea $\lambda > 0$ y X una v.a. Defina $Y = \lambda X$, entonces $\mathrm{VaR}^Y_{1-q} = -\inf\{\, y \in \mathbb{R} |\, F_Y(y) \ge q\}$,

$$\mathrm{VaR}^Y_{1-q} = -\inf\{\,\lambda x \in \mathbb{R} |\, F_Y(\lambda x) \ge q\} = -\inf\left\{\lambda x \in \mathbb{R} |\, F_X\left(\frac{\lambda x}{\lambda}\right) \ge q\right\},$$

$$\mathrm{VaR}^Y_{1-q} = -\lambda \inf\{\, x \in \mathbb{R} |\, F_X(x) \ge q\} = -\lambda \mathrm{VaR}^X_{1-q}.$$

Considere dos movimientos Brownianos $(W_t)_{t\in[0,T]}$ y $(U_t)_{t\in[0,T]}$ correlacionados entre sí, de tal forma que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}U_t) = \rho \mathrm{d}t$. Además suponga que los precios, S_{1t} y S_{2t}, de dos activos son conducidos, respectivamente, por

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_t$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}U_t,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ y $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. El cambio porcentual en el valor del portafolio satisface

$$\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}},$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \qquad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

En este caso,

$$\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] = (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\,\mathrm{d}t.$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t}\right] = \left(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2\rho\right)\mathrm{d}t.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} = z_q\sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2\rho}\,\sqrt{\mathrm{d}t} - (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\,\mathrm{d}t. \tag{12.3}$$

Por otro lado, si se considera el cambio de valor en el portafolio, se tiene que

$$\mathrm{d}\Pi_t = w_1 S_{1t}\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + w_2 S_{2t}\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}.$$

Ahora,

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}\Pi_t\right] = (w_1 S_{1t}\mu_1 + w_2 S_{2t}\mu_2)\,\mathrm{d}t$$

y

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}\Pi_t\right] = \left(w_1^2 S_{1t}^2\sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2S_{1t}S_{2t}\sigma_1\sigma_2\rho\right)\mathrm{d}t.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi} =& z_q\sqrt{w_1^2 S_{1t}^2\sigma_1^2 + w_2^2 S_{2t}^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2S_{1t}S_{2t}\sigma_1\sigma_2\rho}\,\sqrt{\mathrm{d}t} \\ &- (w_1 S_{1t}\mu_1 + w_2 S_{2t}\mu_2)\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{12.4}$$

Por lo tanto, se cumple con la homogeneidad de grado uno, esto es: $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} = \frac{1}{\Pi_t}\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi}$. A esta cantidad, $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi}$, se le conoce también como VaR diversificado.

12.7 $\mathrm{VaR}^{\mathbf{X}}_{\mathbf{1\text{ - }q}}$ del rendimiento de un portafolio y factorización de Cholesky

En esta sección se analizará una importante herramienta para la simulación del VaR^X_{1-q} cuando se supone una distribución normal conjunta para los instrumentos dentro del portafolio. La factorización de Cholesky es un método para dar una estructura de dependencia a dos variables aleatorias independientes[13] con distribución normal.

Suponga que un portafolio consiste de n activos, entonces el rendimiento del portafolio es la media de los rendimientos ponderada por la participación de cada activo en el valor del portafolio. Si los rendimientos de los activos siguen distribuciones normales y son no correlacionadas, la factorización de Cholesky permite transformar los rendimientos originales en variables aleatorias con cierta estructura de correlación, la cual determina todas las dependencias dado que se trata de una distribución normal conjunta.

Para llevar a cabo una exposición sencilla, se considera un portafolio con dos activos. Suponga que los precios, S_{1t} y S_{2t}, de dos activos financieros son conducidos, respectivamente, por

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}\ \varepsilon_1$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}\ \varepsilon_2,$$

donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\mathrm{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$. La información sobre ε_1 y ε_2 se puede resumir como

$$\underline{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ahora, considere la transformación:

$$\begin{cases} \eta_1 = \varepsilon_1, \\ \eta_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\ \varepsilon_2, \end{cases} \tag{12.5}$$

entonces se tiene que

$$\mathrm{Var}\left[\eta_1\right] = \mathrm{Var}\left[\varepsilon_1\right] = 1,$$
$$\mathrm{Var}\left[\eta_2\right] = \rho^2 \mathrm{Var}\left[\varepsilon_1\right] + \left(1-\rho^2\right)\mathrm{Var}\left[\varepsilon_2\right] = 1$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(\eta_1, \eta_2\right) =& \mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1, \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\ \varepsilon_2\right) \\ =& \rho\mathrm{Var}\left[\varepsilon_1\right] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) \\ =& \rho. \end{aligned}$$

Así pues, con base en la transformación (12.5), se puede escribir

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\sqrt{\mathrm{d}t}\varepsilon_1$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\sqrt{\mathrm{d}t}\eta_2,$$

donde

$$\eta_2 = \rho\varepsilon_1 + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

[13] En realidad se trata de variables pseudoaleatorias, pues son generadas usando un algoritmo de computadora con ciclos de repetición muy largos.

y

$$\mathrm{Cov}\left(\varepsilon_1, \varepsilon_2\right) = 0.$$

Equivalentemente,

$$\mathrm{d}S_{1t} = \mu_1 S_{1t}\mathrm{d}t + \sigma_1 S_{1t}\mathrm{d}W_{1t}$$

y

$$\mathrm{d}S_{2t} = \mu_2 S_{2t}\mathrm{d}t + \sigma_2 S_{2t}\mathrm{d}W_{2t},$$

donde

$$\mathrm{d}W_{2t} = \rho\mathrm{d}W_{1t} + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{d}U_t$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}U_t\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}\right) = \rho\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}W_{1t}\right] + \sqrt{1-\rho^2}\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}U_t\right) = \rho\mathrm{d}t.$$

Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, se sigue que

$$\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}\right] = \mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right] = \mathrm{d}t$$

y

$$\mathrm{Cov}\left(\frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}}, \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}}\right) = \rho\mathrm{d}t.$$

Además, si $\mu_1 = \mu_2 = 0$, entonces

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi} = z_q\sqrt{1+2\alpha_1\alpha_2(\rho-1)}\ \sqrt{\mathrm{d}t}, \tag{12.6}$$

donde se ha utilizado la identidad $1 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2$.

12.8 Valor en riesgo de un portafolio y el modelo CAPM (Modelo diagonal)

El Capital Asset Pricing Model, es un modelo de valuación de activos de capital (Sharpe, Linter, Mossin y Treynor, basándose en el trabajo de Markowitz), que bajo supuestos de no arbitraje, distribución normal de los rendimientos de los activos (lo que implica una distribución lognormal de los activos), mercados completos, fuertemente eficientes[14], expectativas racionales y la existencia de un activo libre de riesgo con la misma tasa para prestar y pedir prestado.

Como el lector puede observar, los supuestos del CAPM son muy similares a los usados a lo largo de este libro para la valuación de derivados, por lo que en el transcurso de esta sección, se examinará la relación que existe entre el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio y el modelo CAPM. Una de las formas del modelo CAPM establece que el valor esperado del exceso de rendimiento de un activo es una función de la “Beta” del activo y del exceso de rendimiento del mercado, esto es:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{it}\right] - r\mathrm{d}t = \beta_i\left(\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{mt}\right] - r\mathrm{d}t\right), \tag{12.7}$$

[14] Implica que los precios reflejan toda la información disponible (pública y privada) y que por lo tanto, nadie puede obtener beneficios extraordinarios en el largo plazo, implica también que no existen barreras ni problemas de información.

donde el rendimiento del activo sigue un proceso lognormal

$$\mathrm{d}R_{it} = \frac{\mathrm{d}S_{it}}{S_{it}} = \mu_i \mathrm{d}t + \sigma_i \mathrm{d}W_{it}, \quad i = 1, 2, \tag{12.8}$$

y

$$\beta_i = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{d}R_{it}, \mathrm{d}R_{mt})}{\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{mt}]}.$$

El subíndice m hace referencia al mercado. Se supone que existe alguna correlación entre el rendimiento del mercado y el del activo riesgoso, esto es: $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_{1t}, \mathrm{d}W_{2t}) = \rho_{12}\mathrm{d}t$. Observe que en este caso, el rendimiento del portafolio satisface

$$\mathrm{d}R_{\Pi} := \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \alpha_1 \frac{\mathrm{d}S_{1t}}{S_{1t}} + \alpha_2 \frac{\mathrm{d}S_{2t}}{S_{2t}},$$

donde las proporciones de riqueza asignadas a cada activo son:

$$\alpha_1 = \frac{w_1 S_{1t}}{\Pi_t}, \qquad \alpha_2 = \frac{w_2 S_{2t}}{\Pi_t} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 1.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_{\Pi}\right] = \left(\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\sigma_{12}\right)\mathrm{d}t \tag{12.9}$$

y

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_{\Pi}\right] = (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)\mathrm{d}t. \tag{12.10}$$

Suponga ahora que el rendimiento del activo riesgoso es regido por una parte de rendimiento idiosincrático, una parte de rendimiento relacionada al mercado y un Browniano, esto es:

$$\mathrm{d}R_{it} = \phi_i \mathrm{d}t + \beta_i \mathrm{d}R_{mt} + \mathrm{d}U_{it}, \quad i = 1, 2, \tag{12.11}$$

donde U_{it} es normal con $\mathrm{E}[\mathrm{d}U_{it}] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}U_{it}] = \sigma_{iu}^2\mathrm{d}t$, y $\mathrm{d}R_{mt}$ es normal con $\mathrm{E}[\mathrm{d}R_{mt}] = \mu_m\mathrm{d}t$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}R_{mt}] = \sigma_m^2\mathrm{d}t$. Se supone además que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_{it}, \mathrm{d}R_{mt}) = 0$ y $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}U_{1t}, \mathrm{d}U_{2t}) = 0$. Observe que si en la ecuación anterior se escribe $\phi_i = r(1 - \beta_i)$ y se toman esperanzas, se obtiene de nuevo la expresión (12.7). Se puede verificar, a partir de (12.11), que

$$\sigma_{12}\mathrm{d}t = \beta_1\beta_2\sigma_m^2\mathrm{d}t \tag{12.12}$$

y

$$\sigma_i^2\mathrm{d}t = \left(\beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{iu}^2\right)\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2. \tag{12.13}$$

Observe además que de acuerdo con (12.8) y (12.11)

$$\sigma_i \mathrm{d}W_{it} = \beta_i \mathrm{d}R_{mt} + \mathrm{d}U_{it},$$

lo cual produce de nuevo (12.13),

$$\sigma_i^2\mathrm{d}t = \left(\beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{iu}^2\right)\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2,$$

como era de esperarse. Las cantidades (12.12) y (12.13) se pueden reexpresar en forma matricial como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \sigma_m^2 + \begin{pmatrix} \sigma_{1u}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{2u}^2 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, si sustituyen (12.12) y (12.13) en (12.9), se sigue que

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = \left(\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\right)\sigma_m^2\mathrm{d}t + (\alpha_1^2\sigma_{1u}^2 + \alpha_2^2\sigma_{2u}^2)\mathrm{d}t.$$

Asimismo, de (12.8) y (12.11) se tiene que

$$\mu_i = \phi_i + \beta_i\mu_m,$$

con lo cual

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = (\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2)\mathrm{d}t + (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\mu_m\mathrm{d}t.$$

Esta expresión se puede simplificar aún más si se denotan $\phi_\Pi = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$, $\beta_\Pi = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ y $\sigma_{\Pi,u}^2 = \alpha_1^2\sigma_{1u}^2 + \alpha_2^2\sigma_{2u}^2$, de tal suerte que

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = \left(\beta_\Pi^2\sigma_m^2 + \sigma_{\Pi,u}^2\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}R_\Pi\right] = (\phi_\Pi + \beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}R_\Pi} = z_q\sqrt{\beta_\Pi^2\sigma_m^2 + \sigma_{\Pi,u}^2}\,\sqrt{\mathrm{d}t} - (\phi_\Pi + \beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

Si la cantidad $\sigma_{\Pi,u}^2$ es despreciable (usualmente lo es), se tiene que

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}R_\Pi} = z_q\beta_\Pi\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t} - (\phi_\Pi + \beta_\Pi\mu_m)\mathrm{d}t.$$

Si, en particular, $\phi_1 = \phi_1 = \mu_m = 0$, entonces

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}R_\Pi} = \alpha_1\beta_1 z_q\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t} + \alpha_2\beta_2 z_q\sigma_m\sqrt{\mathrm{d}t}. \tag{12.14}$$

Esta expresión, bajo los supuestos establecidos, permite calcular el valor en riesgo del rendimiento de un portafolio mediante las betas de los activos y la volatilidad del mercado.

12.9 Bibliografía

Butler, C. (1999). Mastering Value at Risk: A step by step guide to understanding and applying VaR, Prentice Hall, USA.

Duffie, D. and J. Pan. (1997). *An Overview of Value at Risk. Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 3, pp. 7-49.

Jorion, P. (2006). Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill, NY, USA, 3rd Ed.

Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond *yield*, and Stock Prices in the United States since 1856. Columbia University Press. New York.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado S. A. de C. V.

Mina, J. & Xiao, Jerry Yi (2001). Return to RiskMetrics: The evolution of a Standard, RiskMetrics Group.

Ross, S. M. (2006). A First Course in probability, Prentice Hall, N.J., USA, 7th ed.

Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

Zumbach, G. (2006), The RiskMetrics 2006 methodology, RiskMetrics Group.

12.10 Ejercicios

12.1 Después de haber revisado los principales conceptos del $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$, se propone como ejercicio su cálculo a un día para un portafolio que consisten en un depósito en efectivo de \$400,000.00 que recibe una tasa libre de riesgo $r_f = 0.05\%$ además de un subportafolio riesgoso valuado en \$1,100,000.00 integrado por:

Título	Precio	w_i	μ	σ	ρ
A	\$ 10.0	0.3	1	3	0.25
B	\$ 20.0	0.4	4	5	0.25

Cuadro 12.1 Composición del Portafolio para el ejercicio.

Solución: Lo primero que debe notar el lector es que los activos riesgosos no guardan correlación con el depósito bancario (éste no experimentará volatilidad). Por lo que se puede proceder a calcular por separado el $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ de los activos riesgosos tal y como se explicó en la subsección 12.6 de este capítulo, para luego añadir un pequeño ajuste por el depósito bancario.

El cálculo del $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ de los activos riesgosos se hará usando el hecho, antes demostrado, de que $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}\Pi/\Pi}_{1-q} = z_q\sqrt{w_1^2S_1^2\sigma_1^2 + w_2^2S_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2S_1S_2\sigma_1\sigma_2\rho}\,\sqrt{\mathrm{d}t} - (w_1S_1\mu_1 + w_2S_2\mu_2)\,\mathrm{d}t$.

Al sustituir valores se llega a:

σ_p	43.13930922	μ_p	35	T(días)	1
z_q	1.644853627			Confianza	0.95
Valor subportafolio	11	$\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$	3.837029246		

Cuadro 12.2 $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ del portafolio riesgoso.

Lo que significa un $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{0.95} = \$3.837029246$ por unidad del subportafolio riesgoso (valuada en \$11.0), usando la homogeneidad del $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ explicada en el pie de página 12, es posible concluir que se tiene un $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{.95} = (\$3.837029246 \times 100,000) = \$383,702.9246$ para el subportafolio riesgoso.

Dado que el depósito bancario no genera varianza, el cálculo del $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ total se limitará a $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}\Pi}_{1-q} = z_q w\sigma S_t\sqrt{\mathrm{d}t} - (w\mu S_t + Mr)\mathrm{d}t$. En consecuencia, sólo se debe restar el rendimiento libre de riesgo del depósito, esto es $\mathrm{VaR}^{w\mathrm{d}S+Mr\mathrm{d}t}_{1-q} = w\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}S}_{1-q} - Mr\mathrm{d}t$.

Si se revisan los datos del problema, se observará que los intereses obtenidos por ese depósito durante un día ascienden a: $(0.05)\,(1/360)\,\$400,000 = \$55.56$, por lo que se concluye que $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q} = \$383,647.37$ es el monto máximo que perderá el portafolio en un día el 95% de las veces si la distribución de las ganancias y pérdidas es normal.

12.2 Ahora se procederá a calcular el $\mathrm{VaR}^{\mathrm{d}x}_{1-q}$ de un portafolio repartido entre un activo riesgoso (50%) y una opción europea de compra sobre el mismo (50%) con las siguientes características:

S_t	10
μ_{S_t}	0.1
r_f	0.05
K	10
σ	0.15
$T-t$	1 día

Cuadro 12.3 Características de la opción europea de compra y el activo riesgoso.

Solución: Para conocer el $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}x}$ del portafolio del problema, se recurrirá a la estrategia de conocer los cambios del portafolio ante cambios de sus factores de riesgo, el subyacente en este caso, para luego obtener su media y varianza y con ellos obtener el $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}x}$.

Al dejar de lado las consideraciones técnicas, se tiene la oportunidad de visualizar el portafolio del problema como $\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t)$, donde w_1 es la proporción de la riqueza asignada al subyacente y w_2 es la proporción asignada a la opción de compra. Usando el lema de Itô para calcular el cambio por unidad de tiempo del derivado, hecho en capítulos anteriores, y haciendo las sustituciones pertinentes, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Pi_t &= \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \mu S_t \mathrm{d}t \\
&\quad + \omega_2 \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\right) + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right) \sigma S_t \mathrm{d}W_t \\
&= \left[\left(\omega_1 + \omega_2 \Delta\right) \mu S_t + \omega_2 \left(\theta + \tfrac{1}{2}\Gamma \sigma^2 S_t^2\right)\right] \mathrm{d}t + \left(\omega_1 + \omega_2 \Delta\right) \sigma S_t \mathrm{d}W_t,
\end{aligned}$$

donde

$$\theta = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad \Delta = \frac{\partial c}{\partial S_t} \qquad \text{y} \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}.$$

El lector puede observar que el primer sumando representa la media del cambio en el portafolio por unidad de tiempo y que el segundo sumando representa la desviación estándar del mismo portafolio, por lo que sólo es necesario sustituir estos resultados en el "esqueleto" del $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi}$, lo que lleva a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi} =& z_q \left(\omega_1 + \omega_2 \Delta\right) \sigma S_t \sqrt{\mathrm{d}t} \\
&+ \left[\ \omega_1 \mu S_t - \omega_2 \left(\theta + \Delta \mu S_t + \tfrac{1}{2}\Gamma \sigma^2 S_t^2\right)\right] \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Ahora sólo resta sustituir los datos del problema en el resultado anterior. Inicie calculando la "Delta" de la opción, visto en capítulos anteriores. Se sabe que:

$$\Delta_c = \Phi\left(d_1\right) = 0.65848551 \qquad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = 0.40833333$$

Por otro lado, la "Gamma" de la opción dada por:

$$\Gamma_c = \frac{\Phi'\left(d_1\right)}{\sigma S_t \sqrt{T-t}} = 0.24468791.$$

Se recuerda al lector que para obtener $\Phi'\left(d_1\right)$ sólo se sustituyó el valor de d_1 en la ecuación de una variable aleatoria normal estándar. Ahora sólo se calculará el valor de la "Theta" de la opción, esto es:

$$\Theta_c = -\frac{S_t \Phi'\left(d_1\right) \sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + q S_t \Phi\left(d_1\right) \sigma e^{-q(T-t)} - r K e^{-r(T-t)} \Phi\left(d_2\right) = -0.56155837.$$

Una vez obtenidas las griegas, se sustituirán los valores en el resultado del $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi}$, dando un valor de 0.10870426 por cada portafolio conteniendo una la mitad de su valor en acciones y una la otra mitad en opciones, cada una valuada en \$0.85916583. Si el inversionista mantiene un portafolio con λ réplicas de este portafolio, basta con usar la propiedad de homogeneidad para conocer el $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}\Pi}$ del portafolio total.

12.3 A continuación se obtiene el $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}B/B}$ de un bono cupón cero libre de riesgo crédito, cuyo valor nominal es de \$100, que es emitido a un precio de \$95 el día de hoy y vence dentro de 90 días. Suponga también que la volatilidad de la tasa es de 30%.

Solución: Inicie recordando que el precio de un bono cupón cero está dado por $B(t,T) = e^{-R(T-t)}$, para después realizar una aproximación por serie de Taylor en términos de segundo orden sobre el cambio en el precio del bono, que es función de la curva de rendimiento, alrededor del cero, para después dividirlo entre el precio del bono y de esta forma obtener cambios porcentuales. Esto lleva a:

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}R^2}\right)(\mathrm{d}R)^2 \approx -\gamma\mathrm{d}R + \tfrac{1}{2}\zeta(\mathrm{d}R)^2$$

donde γ y ζ son la duración y convexidad del bono. Recordando la duración de Macaulay se tiene que $\gamma := -\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}R}\frac{1}{B} = T - t = 90$. Lo conduce al conocido resultado que dice que la duración de un bono cupón cero es el tiempo que le queda para madurar. Por último, es conveniente recordar que la convexidad del mismo bono está dada por $\zeta = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}^2B}{\mathrm{d}R^2} = (T-t)^2 = 8100$.

Una vez que se tienen estos valores, se procederá a obtener la media y la varianza del cambio en el valor del bono para después sustituirlos en la ecuación del $\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}B}$. Por simplicidad suponga que $\mathrm{d}R = \sigma\mathrm{d}Z$ y $\mathrm{d}Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, lo que lleva a que la media del cambio porcentual del valor del bono está dada por:

$$\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}B}{B}\right] \approx \tfrac{1}{2}\zeta\mathrm{E}[(\mathrm{d}R)^2] = \tfrac{1}{2}\zeta\sigma^2\mathrm{E}[Z^2] = \tfrac{1}{2}\zeta\sigma^2 = \frac{1}{2}(8100)(0.3)^2 = 364.5$$

y

$$\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}B}{B}\right] \approx \gamma^2\mathrm{Var}[\mathrm{d}R] + \tfrac{1}{4}\zeta^2\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}R)^2\right] - \gamma\,\zeta\mathrm{Cov}(\mathrm{d}R,(\mathrm{d}R)^2).$$

Observe que en este caso

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}R,(\mathrm{d}R)^2\right) = \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}R)^3\right] - \mathrm{E}[\mathrm{d}R]\,\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}R)^2\right] = 0,$$

ya que los momentos impares de $\mathrm{d}R$ se anulan. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left[\frac{\mathrm{d}B}{B}\right] \approx&\gamma^2\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\zeta^2\mathrm{Var}\left[(\mathrm{d}R)^2\right] = \gamma^2\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\zeta^2\left(\mathrm{E}\left[(\mathrm{d}R)^4\right] - \mathrm{E}\left[(\mathrm{d}R)^2\right]^2\right)\\ =&\gamma^2\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\zeta^2\left(3\sigma^4 - \sigma^4\right) = \gamma^2\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2\sigma^4 = (90)^2(0.3)^2 + \frac{8100}{2}(0.3)^4\\ =&761.805.\end{aligned}$$

Al sustituir los valores se tiene que:

$$\mathrm{VaR}_{1-q}^{\mathrm{d}B/B} \approx z_q\sqrt{\gamma^2\sigma^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2\sigma^4}\sqrt{\mathrm{d}t} - \frac{\zeta}{2}\sigma^2\mathrm{d}t = z_q\sigma\sqrt{\gamma^2 + \tfrac{1}{2}\zeta^2\sigma^2}\sqrt{\mathrm{d}t} - \frac{\zeta}{2}\sigma^2\mathrm{d}t \;\; = 43.736513.$$

Capítulo 13

Riesgo de crédito: probabilidad de incumplimiento

Conceptos básicos:

- ✓ **Calificación o calidad crediticia**
- ✓ **Riesgo de incumplimiento de bonos corporativos**
- ✓ **Tasa de recuperación**
- ✓ **Modelo de Hull y White de probabilidades de incumplimiento**
- ✓ **Modelo de Merton de probabilidades de incumplimiento**

13.1 Introducción

La administración del riesgo crédito en la banca comercial es un asunto de gran importancia. Las autoridades financieras reguladoras y supervisoras que controlan las actividades de la banca comercial exigen medidas precautorias y la especificación de fondos contingentes mínimos para mantener en niveles aceptables los diferentes tipos de riesgos a fin de evitar grandes pérdidas e incluso el colapso. La labor de regulación y supervisión está a cargo del banco central, de la autoridad fiscal, de las comisiones o superintendencias de vigilancia de los procesos y operaciones y de las entidades que protegen a clientes y ahorradores y, por consiguiente, a la economía nacional.

Cuando se valúa teóricamente un producto derivado (*forward*, opción, *swap*, bono, etc.), se da por hecho que cada una de las partes del contrato cumplirá, cabal y puntualmente, con las obligaciones adquiridas. De tal suerte, que los flujos de efectivo que se generan en los contratos tienen la más alta calidad crediticia. Desafortunadamente, en la realidad esto no es necesariamente cierto, principalmente en los mercados sobre mostrador (over-the-counter). En los últimos años, estos mercados han crecido considerablemente y, por ello, la cuantificación y administración del riesgo crédito, de los que participan en dichos mercados, son tareas esenciales que se llevan a cabo todos los días. Este capítulo se concentra fundamentalmente en la estimación de la probabilidad de que se presente el evento de incumplimiento.

En los mercados de derivados listados, la existencia de una cámara de compensación y liquidación reduce considerablemente el riesgo crédito debido a los depósitos de garantía (margen) que se exigen a las partes y/o contrapartes de los contratos negociados. Hasta ahora, ninguna cámara de compensación en el mundo ha quebrado. No obstante, es importante destacar que la probabilidad de quiebra, aunque ésta sea muy pequeña, está siempre latente. Este evento lejos de ser fatalista es muy realista y merece especial atención.

Muchos de los bonos que se encuentran en el mercado son emitidos por empresas medianas con planes de expansión. Sin embargo, en muchos casos la ejecución de dichos planes depende de la evolución del entorno económico y de negocios en un país o en el ámbito mundial. En condiciones adversas algunas empresas pueden tener dificultades de solvencia e incluso declararse en quiebra antes de cumplir con los compromisos financieros adquiridos con sus acreedores. Cuando los recursos de la empresa son insuficientes para el cumplimiento de sus obligaciones, los acreedores preferentes o privilegiados tienen derechos sobre cualquier otro acreedor. Por ejemplo, los trabajadores de la empresa tienen preferencia sobre el pago de sus salarios y liquidaciones y la autoridad fiscal sobre el pago de impuestos y cuotas patronales. Los acreedores con garantía real, ya sea hipotecaria o prendaria, les siguen en orden a los preferentes. Por último, se encuentran los acreedores comunes, los cuales carecen de cualquier privilegio en la recuperación de sus créditos. En todos los casos, los procesos legales de recuperación, parcial o total, son siempre largos y costosos. En este capítulo se revisan diversas metodologías útiles en la estimación de la probabilidad de incumplimiento de un bono corporativo, con y sin cupones. En particular, se estudia el trabajo de Hull y White (2000), *Valuing Credit Default swaps I: No Counterparty Default Risk* publicado en el *Journal of Derivatives*, así como el de Merton (1974) *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates* publicado en el *Journal of Finance*.

13.2 Calificaciones crediticias y riesgo de incumplimiento de bonos corporativos cupón cero

Agencias independientes como Standard & Poor's, Moody's y Fitch Ratings, entre otras, proporcionan calificaciones crediticias a bonos corporativos, de mediano y largo plazo, a través de una opinión imparcial. El Cuadro 13.1 muestra una descripción de las calificaciones crediticias que otorga Standard & Poor's a bonos corporativos en un país determinado.

Calificación	Descripción
AAA	La más alta calidad crediticia
AA	Muy alta calidad crediticia
A	Alta calidad crediticia
BBB	Buena calidad crediticia
BB	Calidad especulativa
B	Calidad altamente especulativa
CCC	Alto riesgo de incumplimiento

Cuadro 13.1 Descripción de las calificaciones crediticias.

Una explicación detallada de cada una de las calificaciones se da a continuación:

AAA: Asigna la mejor calidad crediticia con respecto de otros emisores y, por lo regular, corresponde a títulos de deuda emitidos o garantizados por el gobierno.

AA: Otorga una calidad crediticia muy sólida con respecto de otras emisiones. El riesgo crediticio inherente a estas obligaciones financieras difiere levemente de otros emisores mejor calificados.

A: Corresponde a una calidad crediticia sólida con respecto de otros emisores. Sin embargo, cambios en las condiciones económicas podrían afectar el cumplimiento de las obligaciones adquiridas, en un grado mayor que aquellas obligaciones financieras que fueron calificadas con categorías superiores.

BBB: Establece una calidad crediticia buena. Sin embargo, cambios en las circunstancias económicas podrían afectar la capacidad de pago oportuno con respecto de otras emisiones calificadas con categorías superiores.

BB: Asigna calidad especulativa. Representa una calidad crediticia relativamente vulnerable con respecto de otros emisores. El pago de estas obligaciones financieras implica cierto grado de incertidumbre. La capacidad de pago oportuno es vulnerable a fluctuaciones adversas en el entorno económico.

B: Otorga una calidad altamente especulativa. Esta calidad crediticia es significativamente más vulnerable con respecto de otros emisores. Los compromisos financieros actuales se cumplen, pero existe un margen limitado de seguridad. La capacidad de continuar con el pago oportuno depende del desarrollo favorable de la economía.

CCC: Asigna alto riesgo de incumplimiento. Esta categoría agrupa riesgos crediticios muy vulnerables respecto de otros emisores. Su capacidad de cumplir con las obligaciones financieras depende exclusivamente del desarrollo favorable y sostenible del entorno económico y de negocios.

La adición de un $+$ ó $-$, al final de la calificación crediticia, se utiliza para denotar un estatus de inversión. El sufijo $+$ denota un status agresivo, mientras que el sufijo $-$ significa que el estatus de inversión es conservador. En otras palabras, un estatus agresivo promete un mayor retorno que el conservador, pero con mayor riesgo. Así, por ejemplo, AA+ asigna una muy alta calidad crediticia con un estatus de inversión agresivo. Dichos sufijos no se incluyen en la categoría AAA o en categorías estrictamente inferiores a CCC.

Otro sufijo adicional que se utiliza para señalar la posibilidad de un cambio en calificación es la perspectiva: “positiva”, la cual indica una posible mejora en la calidad; “negativa”, la cual señala una posible disminución en la calificación; y “estable”, en cuyo caso existe una probabilidad significativa de que la calidad crediticia se mantenga. Por ejemplo, “A+/estable/” asigna una calidad crediticia alta con un estatus de inversión agresivo y perspectiva “estable”.

Por último, en ocasiones, a la calificación crediticia se añade entre paréntesis el país de referencia de la emisora. Por ejemplo, “AA+(mex)/negativa/” se refiere a una calidad crediticia muy alta de un emisor en México con un estatus de inversión agresivo y perspectiva negativa.

Suponga que el grado de calidad crediticia de un bono se deteriora durante la vida del instrumento, por ejemplo pasa AAA a AA, en este caso la tasa de descuento con base en la cual se deberían descontar los flujos de efectivo debería aumentar, lo que se traduciría en una caída del precio del bono. Por otra parte, si el emisor del bono se declara en quiebra, el precio del bono dependería de las garantías del propio bono, por lo que se puede concluir hay un riesgo de que el precio del bono se modifique como resultado de cambios en la calidad crediticia del instrumento.

Otras agencias calificadoras, por ejemplo, Moody’s utiliza la siguiente nomenclatura Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa. Dada está distinción, un inversionista siempre sabrá cuál es la agencia que califica a la emisora en cuestión; el lector puede consultar los detalles de las distintas nomenclaturas en las páginas “web” de las correspondientes agencias calificadoras.

13.3 Diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos

En esta sección se examina el diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos. Para ello, se utilizan los conceptos de curvas de rendimiento y precios. Sean:

t: Fecha de referencia (o de valuación).

$R_c(t, T)$: Rendimiento de un bono cupón cero emitido por un corporativo colocado en t y con vencimiento en T. Se supone que $R_c(t, T)$ tiene derivada parcial continua con respecto del argumento T.

$R_g(t, T)$: Rendimiento de un bono cupón cero gubernamental colocado en t y con vencimiento en T, el cual se supone libre de riesgo crédito. Se supone que $R_g(t, T)$ tiene derivada continua con respecto de T.

$B_c(t,T)$: Precio de un bono corporativo cupón cero, con riesgo crédito, colocado en t y con vencimiento en T.

$B_g(t,T)$: Precio de un bono gubernamental cupón cero, libre de riesgo crédito, colocado en t y con vencimiento en T.

N : Nominal de los bonos.

Se supone que $R_c(t,T) - R_g(t,T) > 0$. Esta diferencia recibe el nombre de sobretasa por riesgo crédito, y será denotada por $H(t,T)$. Se supone que

$$\frac{\partial H}{\partial T} \geq 0, \tag{13.1}$$

es decir, $H(t,T)$ es una función no decreciente en el argumento T. Observe que dado que $R_c(t,T)$ y $R_g(t,T)$ tienen derivadas parciales continuas en T, entonces $H(t,T)$ también tiene derivada parcial continua en T. El diferencial de precios entre bonos gubernamentales y corporativos, en t, está dado por

$$V(t,T) := N(e^{-R_g(t,T)(T-t)} - e^{-R_c(t,T)(T-t)}) = B_g(t,T) - B_c(t,T). \tag{13.2}$$

De esta manera, la proporción de $V(t,T)$ con respecto del precio del bono gubernamental satisface

$$\nu(t,T) := \frac{V(t,T)}{B_g(t,T)} = \frac{B_g(t,T) - B_c(t,T)}{B_g(t,T)}. \tag{13.3}$$

Observe también que (13.3) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \nu(t,T) =& \frac{e^{-R_g(t,T)(T-t)} - e^{-R_c(t,T)(T-t)}}{e^{-R_g(t,T)(T-t)}} \\ =& 1 - e^{-H(t,T)(T-t)}. \end{aligned} \tag{13.4}$$

13.3.1 Probabilidad de incumplimiento con tasa de recuperación nula

Los conceptos básicos para abordar la problemática de riesgo de incumplimiento de un bono son su curva de rendimiento y su precio. En lo sucesivo, las frases riesgo crédito y riesgo incumplimiento serán utilizadas indistintamente. Evidentemente, el contar con una estimación de la probabilidad de que se presente el evento de incumplimiento de una obligación financiera, es el primer paso en la cuantificación del riesgo crédito. En esta sección se calcula la probabilidad de incumplimiento asociada a un bono corporativo en un mundo neutral al riesgo. Se denota la probabilidad de incumplimiento en T del bono corporativo calculada en t, mediante $Q(t,T)$. Si se supone que no hay recuperación del nominal, ni siquiera parcial, se puede escribir $N = 0$ (véase la Gráfica 13.1). La realidad es, por supuesto, más complicada que esto. En la práctica, no siempre es todo o nada, algunos acreedores tienen derecho sólo a un pago parcial.

Bajo el supuesto de que el valor esperado del nominal de un bono corporativo sea igual al valor futuro de su precio, calculado con la tasa de rendimiento libre de riesgo crédito, la probabilidad de incumplimiento, $Q(t,T)$, satisface

$$B_c(t,T)e^{R_g(t,T)(T-t)} = (1 - Q(t,T))N + Q(t,T)0, \tag{13.5}$$

lo cual implica

$$B_c(t,T) = (1 - Q(t,T))B_g(t,T). \tag{13.6}$$

Es decir,

$$Q(t,T) = \frac{B_g(t,T) - B_c(t,T)}{B_g(t,T)}. \tag{13.7}$$

De esta manera, ν y Q son exactamente la misma función. La importancia de este resultado radica en que para calcular $Q(t,T)$ sólo se requiere conocer los precios actuales de los bonos o, en forma equivalente, sus curvas de rendimiento.

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow^{1-Q} & \\ B_c(t,T) & & \\ & \searrow_{Q} & \\ & & 0 \end{array}$$

Gráfica 13.1 Árbol de probabilidad de incumplimiento.

13.3.2 Probabilidad de incumplimiento con tasa de recuperación positiva

En esta sección se supone que, en caso de incumplimiento, existe la posibilidad de recuperar parcialmente el nominal del bono corporativo, $N\delta$, con $0 < \delta < 1$ (véase la Gráfica 13.2), entonces la probabilidad de incumplimiento, neutral al riesgo, $Q(t,T)$, satisface

$$B_c(t,T)e^{R_g(t,T)(T-t)} = (1 - Q(t,T))N + Q(t,T)N\delta,$$

así

$$Q(t,T) = \left(\frac{1}{1-\delta}\right)\frac{B_g(t,T) - B_c(t,T)}{B_g(t,T)}$$

ó

$$Q(t,T) = \frac{1 - e^{-H(t,T)(T-t)}}{1-\delta}. \tag{13.8}$$

En particular, cuando $\delta = 0$, (13.8) coincide con (13.7).

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow^{1-Q} & \\ B_c(t,T) & & \\ & \searrow_{Q} & \\ & & N\delta \end{array}$$

Gráfica 13.2 Árbol de probabilidad de incumplimiento con $\delta > 0$.

Asimismo, la ecuación (13.8) puede obtenerse en términos de una variable aleatoria Bernoulli, $X_{t,T}$, definida mediante

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = 1\} = 1 - Q(t,T)$$

y

$$\mathbb{P}\{X_{t,T} = \delta\} = Q(t,T),$$

con lo cual la probabilidad de incumplimiento está determinada por

$$B_c(t,T)e^{R_g(t,T)(T-t)} = \mathrm{E}[NX_{t,T}] = (1 - Q(t,T))N + Q(t,T)N\delta.$$

13.3.3 Ejemplo de cálculo de la sobretasa y la probabilidad de incumplimiento

Considere dos bonos cupón cero cuyo valor nominal es \$100. Uno de los bonos es corporativo y otro gubernamental sus precios a diferentes plazos son:

Plazo=T	Precio del bono corp.=B_c	Precio del bono gub.=B_g
1	89	92
2	80	85
3	68	76

Cuadro 13.2 Precios de bonos corporativos y gubernamentales.

Para calcular el diferencial o sobretasa, $H(t,T)$ considere primero las siguientes curvas de rendimiento:

$$R_c(0,T) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{B_c(0,T)}{100}\right)$$

y

$$R_g(0,T) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{B_g(0,T)}{100}\right).$$

El diferencial está dado por $H(0,T) = R_c(0,T) - R_g(0,T)$. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

T	Rend. bono corp.=$R_c(0,T)$	Rend. bono gub.=$R_g(0,T)$	Sobretasa=$H(0,T)$
1	11.65%	8.34%	3.32%
2	11.16%	8.13%	3.03%
3	12.86%	9.15%	3.71%

Cuadro 13.3 Sobretasas de los bonos.

Suponga que la tasa de recuperación es del $\delta = 20\%$, entonces por (13.8)

$$Q(0,1) = \frac{1 - e^{-H(0,1)1}}{1 - 0.2} = \frac{1 - e^{-(0.117-0.083)1}}{0.8} = 4.08\%$$

y

$$Q(0,2) = \frac{1 - e^{-H(0,2)2}}{1 - 0.2} = \frac{1 - e^{-(0.112-0.081)2}}{0.8} = 7.35\%$$

Por lo tanto, la probabilidad de incumplimiento entre $T = 1$ y $T = 2$, está dada por:

$$Q(0,2) - Q(0,1) = 7.35\% - 4.08\% = 3.28\%.$$

13.4 Modelo de Hull y White para el cálculo de probabilidades de incumplimiento de bonos cupón cero en tiempos discretos

La siguiente metodología considera N bonos emitidos por uno o varios corporativos y con el mismo riesgo de incumplimiento. Estos bonos vencen en tiempos discretos $T_1 < T_2 < \cdots < T_N$. Se supone que el evento de incumplimiento puede ocurrir en cualquiera de las fechas T_i. Observe que las fechas de incumplimiento son exógenamente determinadas. Se definen ahora las siguientes variables:

t: Fecha de referencia, hoy.

$B_{ci} := B_{ci}(t, T_i)$: Precio, hoy, del bono corporativo con vencimiento en T_i.

$B_{gi} := B_{gi}(t, T_i)$: Precio, hoy, de un bono gubernamental cupón cero, libre de riesgo crédito, con vencimiento en T_i.

$F_{gji} := F_{gi}(t, T_j)$: Precio futuro del i-ésimo bono gubernamental con vencimiento en T_j. $T_j \leq T_i$.

$v_j := v(t, T_j)$: Valor presente, en t, de una unidad monetaria segura en T_j, $T_j \leq T_i$.

$C_{ji} := C_i(t, T_j)$: Cantidad que el tenedor del i-ésimo bono corporativo tiene derecho a reclamar en caso de que se presente incumplimiento en T_j, $T_j \leq T_i$, es decir, si $j < i$ se trata de un cupón, y si $j = i$ se trata del último cupón más el nominal.

$\delta_{ji} := \delta_i(t, T_j) \in [0, 1]$: Tasa de recuperación que el tenedor del i-ésimo bono corporativo recibe en el evento de incumplimiento en T_j, $T_j \leq T_i$.

$V_{ji} := V_i(t, T_j)$: Valor presente, en t, de la pérdida por incumplimiento del i-ésimo bono corporativo en la fecha T_j, $T_j \leq T_i$.

$Q_j := Q_j(t, T_j)$: Probabilidad de incumplimiento del j-ésimo bono corporativo en T_j, por determinar.

Observe primero que

$$V_{ji} = v_j[F_{gji} - \delta_{ji} C_{ji}]. \tag{13.9}$$

Si $R_{gi}(t, T_i)$ es la curva de rendimiento del i-ésimo bono, entonces

$$v_i = e^{-R_{gi}(t,T_i)(T_i - t)}$$

y

$$F_{gji} = B_{gi} e^{R_{gj}(t,T_j)(T_j - t)}.$$

Asimismo, la probabilidad de que se presente la pérdida V_{ji} es, por supuesto, Q_j. Por lo tanto, el valor presente de la pérdida en el i-ésimo bono corporativo satisface

$$B_{gi} - B_{ci} = \sum_{j=1}^{i} Q_j V_{ji}, \tag{13.10}$$

o en términos matriciales

$$\begin{pmatrix} B_{g1} - B_{c1} \\ B_{g2} - B_{c2} \\ \vdots \\ B_{gN} - B_{cN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ V_{12} & V_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{1N} & V_{2N} & V_{3N} & \cdots & V_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \end{pmatrix}$$

La expresión anterior permite calcular los valores Q_j, $j = 1, 2, ..., N$ en forma inductiva. En efecto,

$$\widehat{Q}_1 = \frac{B_{g1} - B_{c1}}{V_{11}},$$

$$\widehat{Q}_2 = \frac{B_{g2} - B_{c2} - \widehat{Q}_1 V_{12}}{V_{22}},$$

$$\widehat{Q}_3 = \frac{B_{g3} - B_{c3} - \widehat{Q}_1 V_{13} - \widehat{Q}_2 V_{23}}{V_{33}},$$

$$\vdots$$

$$\widehat{Q}_N = \frac{B_{gN} - B_{cN} - \sum_{j=1}^{N-1} \widehat{Q}_j V_{jN}}{V_{NN}}.$$

Observe también que si se escribe $V_{ji} = V_{ji}(\delta_{ji})$ con $V_{ji} = V_{ji}(1) = 0$, es decir, el valor presente de la pérdida esperada es cero si la tasa de recuperación es total, y se definen las variables aleatorias X_{t,T_i} en términos de tasas de recuperación,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{X_{t,T_1} = \delta_{11}\} = Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_1} = 1\} = 1 - Q_1,\\
&\mathbb{P}\{X_{t,T_2} = \delta_{12}\} = Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_2} = \delta_{22}\} = Q_2, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_2} = 1\} = 1 - Q_1 - Q_2,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&\mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{1N}\} = Q_1, \quad \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{2N}\} = Q_2, ..., \mathbb{P}\{X_{t,T_N} = \delta_{NN}\} = Q_N,\\
&\mathbb{P}\{X_{t,T_N} = 1\} = 1 - \sum_{j=1}^{N} Q_j.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede reescribir (13.10) como

$$B_{gi} - B_{ci} = \mathrm{E}[V_{ji}(X_{t,T_i})\ ].$$

Es importante destacar que Q_1, Q_2,...,Q_N, no necesariamente suman la unidad, sino que

$$\sum_{j=1}^{N} Q_j < 1.$$

Observe también que las probabilidades de ocurrencia de δ_{jj}, $\delta_{j,j+1}$, $\delta_{j,j+2}$,...,δ_{jN}, $j = 1, 2, ..., N$, son todas iguales a Q_j.

Se puede demostrar que si el bono corporativo promete un pago de N unidades monetarias al vencimiento y $X_{t,T}$ es la variable aleatoria asociada a la tasa de recuperación, la cual satisface $\mathbb{P}\{X_{t,T} = 1\} = 1 - Q(t,T)$ y $\mathbb{P}\{X_{t,T} = \delta\} = Q(t,T)$, entonces

$$B_g(t,T) - B_c(t,T) = Q(t,T)\mathrm{E}\left[e^{-R_g(t,T)(T-t)} N\,(1-\delta)\ \big|\ \mathcal{F}_t\right].$$

Este resultado es consistente, en el caso determinista, con (13.8) y con el modelo de Hull y White para el cálculo de probabilidades de incumplimiento.

13.5 Modelo de Merton para el cálculo de probabilidades de incumplimiento de bonos corporativos y determinación de la curva de rendimiento de un bono con riesgo

En este modelo se utiliza la fórmula de valuación de Black y Scholes para calcular la probabilidad de incumplimiento de un bono corporativo cupón cero. Se supone entonces que una empresa emite bonos cupón cero que vencen en T, y se definen las siguientes variables:

t: Fecha de referencia, hoy.

S_t: Valor de mercado de las acciones de la empresa, hoy.

S_T: Valor de mercado de las acciones de la empresa en T.

$B_c(t,T)$: Valor de mercado de los bonos de la empresa, hoy.

V_t: Valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa, hoy.

V_T: Valor de mercado de los títulos, de capital y deuda, de la empresa en T.

D: Principal e interés que la empresa debe pagar en T.

σ_S: Volatilidad de las acciones de la empresa.

σ_V: Volatilidad del valor de la empresa en el mercado.

De esta manera,

$$V_t = S_t + B_c(t,T).$$

Se supone que

$$\mathrm{d}V_t = \mu_V V_t \mathrm{d}t + \sigma_V V_t \mathrm{d}W_t \tag{13.11}$$

y

$$\mathrm{d}S_t = \mu_S S_t \mathrm{d}t + \sigma_S S_t \mathrm{d}W_t, \tag{13.12}$$

donde el proceso $(W_t)_{t\in[0,T]}$ es un movimiento Browniano. Observe que existe correlación perfecta entre los procesos anteriores. Una limitación de (13.11) es que los parámetros $\mu_V V_t$ y $\sigma_V V_t$, y por ende V_t, no son cantidades observables.

Si $V_T < D$, entonces la empresa incumple, por lo menos parcialmente, con el pago de su deuda, y en este caso $S_T = 0$. Si, por el contrario, $V_T \geq D$, la empresa paga su deuda en T y $S_T = V_T - D$. El razonamiento anterior se puede resumir en

$$S_T = \max(V_T - D, 0). \tag{13.13}$$

Esto muestra que el valor de mercado de las acciones puede verse como una opción europea de compra sobre el valor de mercado de la empresa con precio de ejercicio igual al pago de su deuda. La fórmula de Black-Scholes proporciona el valor inicial de las acciones de la empresa en t, en un mundo neutral al riesgo, el cual está dado por

$$S_t = V_t \Phi(d_1) - D e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{13.14}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V \sqrt{T-t}} \tag{13.15}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}.$$

El valor de la deuda hoy es $B_c(t,T) = V_t - S_t$. Observe que

$$\begin{aligned}
S_t =& e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(v-D,0) f_{V_T|V_t}(v|V_t)\mathrm{d}v \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{D}^{\infty} (v-D) f_{V_T|V_t}(v|V_t)\mathrm{d}v \\
=& e^{-r(T-t)} \int_{D}^{\infty} v f_{V_T|V_t}(v|V_t)\mathrm{d}v - De^{-r(T-t)} \int_{\{v>D\}} f_{V_T|V_t}(v|V_t)\mathrm{d}v \\
=& e^{-r(T-t)} \mathrm{E}\left[\, V_T 1_{\{V_T>D\}} \,\mid\, V_t\right] - De^{-r(T-t)} \mathbb{P}\left\{V_T > D \,\mid\, V_t\right\},
\end{aligned} \tag{13.16}$$

donde $f_{V_T|V_t}(v|V_t)$ es la función de densidad de V_T, condicional al valor inicial v_t. En virtud de (13.16), la probabilidad, neutral al riesgo, de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es

$$\mathbb{P}\left\{V_T > D \,\mid\, V_t\right\} = \Phi(d_2).$$

Por lo tanto, la probabilidad, neutral al riesgo, de que la empresa incumpla con el pago de su deuda es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{V_T < D \,\mid\, V_t\right\} = 1 - \Phi(d_2) &= \Phi(-d_2) \\
&= \int_{-\infty}^{-d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para calcular esta probabilidad se requiere conocer tanto a σ_V como V_t. Sin embargo, ninguna de estas dos cantidades es directamente observable. No obstante, si la empresa emite acciones que son colocadas públicamente, entonces S_t puede estimarse como el número de acciones por su precio en el mercado. Esto significa que la ecuación (13.14) proporciona una condición que σ_V y V_t deben satisfacer. Por otro lado, a partir de (13.14) se tiene que $S_t = S_t(V_t, t)$, entonces el lema de Itô[1] conduce a

$$\mu_S S_t \mathrm{d}t + \sigma_S S_t \mathrm{d}W_t = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \mu_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \tfrac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}\mathrm{d}W_t. \tag{13.17}$$

Dado que las componentes estocásticas deben ser iguales se sigue que

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$

ó

$$\sigma_S S_t = \sigma_V V_t \Phi(d_1). \tag{13.18}$$

Si se cuenta con un estimador de σ_S, la desviación estándar de los rendimientos, entonces (13.18) es otra ecuación que σ_V y V_t deben satisfacer. Por lo tanto, (13.14) y (13.18) proporcionan un sistema de ecuaciones simultáneas en las variables σ_V y V_t. Observe también que las partes deterministas de (13.17) implican

$$\mu_S S_t = De^{-r(T-t)}\left(-r\Phi(d_2) + \frac{\sigma_V \Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}\right) + \mu_V \sigma_V \Phi(d_1) + \frac{\sigma_V V_t \Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}. \tag{13.19}$$

Una vez que σ_V y V_t se han determinado del sistema (13.14) y (13.18), estos valores se sustituyen en (13.19) para obtener el valor de μ_V.

[1] Ver Apéndice B.

13.5.1 Precio de un bono con riesgo

En virtud de (13.14), el precio del título de deuda es

$$\begin{aligned}B_c(t,T) =& V_t - S_t\\ =& V_t - \Big(V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\Big)\\ =& V_t(1-\Phi(d_1)) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\\ =& V_t\Phi(-d_1) + De^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\\ =& De^{-r(T-t)}\left(\Phi(d_2) + m\Phi(-d_1)\right),\end{aligned}$$

donde

$$m = \frac{V_t}{D}e^{r(T-t)}.$$

Así pues, el precio del bono corporativo es el valor presente del principal y los intereses, D, multiplicado por la probabilidad de cumplimiento, $\Phi(d_2)$, más el valor futuro del inverso del nivel de apalancamiento o cobertura de la deuda, m.

13.5.2 Estructura de plazos de un bono con riesgo

Por último, la estructura de plazos del bono corporativo condicional a que no se presente el evento de incumplimiento, está dada por

$$\begin{aligned}R_c(t,T) =& -\frac{\ln(B_c(t,T)/D)}{T-t}\\ =& -\frac{1}{T-t}\ln\Big[e^{-r(T-t)}\left(\Phi(d_2)+m\Phi(-d_1)\right)\Big]\\ =& r - \frac{1}{T-t}\ln\left[\left(\Phi(d_2)+m\Phi(-d_1)\right)\right].\end{aligned}$$

13.6 Derivados de Crédito

Los derivados de crédito representan un grupo importante de instrumentos financieros que tienen como objetivo principal cubrir el riesgo de incumplimiento de un pago esperado. En particular, los *swaps* de incumplimiento de crédito (credit default *swap*, CDS) proporcionan un seguro contra el posible incumplimiento de una empresa emisora de bonos.

Considere una empresa $\mathcal{E}$ que para financiarse emite bonos cuponados y que tiene, por ejemplo, calidad crediticia "BB". Suponga que el comprador $\mathcal{C}$ del bono también compra un seguro, un CDS, a otro agente, el agente $\mathcal{A}$, contra el posible incumplimiento de $\mathcal{E}$. Para ello, $\mathcal{C}$ realiza pagos periódicos a $\mathcal{A}$ hasta que el incumplimiento ocurra o hasta que el CDS expire; lo que ocurra primero. A cambio $\mathcal{C}$ adquiere el derecho de venderle a $\mathcal{A}$ el bono emitido por $\mathcal{E}$ a la par de su valor nominal en caso de incumplimiento. Cuando se presenta el evento de incumplimiento, generalmente, se requiere que $\mathcal{C}$ haga un último pago a $\mathcal{A}$. A continuación se presenta el modelo de Hull y White (2000) para valuar un CDS en un mundo neutral al riesgo.

Por simplicidad se supone que el nominal del bono es una unidad monetaria. Se supone que los eventos de incumplimiento, la tasas de interés y la tasa de recuperación son estocásticamente independientes entre sí. Se supone también que en caso de incumplimiento, $\mathcal{C}$ exige el pago del nominal más el interés acumulado. Asimismo, se supone que el incumplimiento sólo puede ocurrir en las fechas $T_1, T_2, ..., T_N$. Sean:

(i) T: vida del CDS,

(*ii*) Q_i: probabilidad de incumplimiento en T_i,
(*iii*) $\widetilde{R}$: tasa de recuperación,
(*iv*) u_t: valor presente de los pagos del CDS a razón de una unidad monetaria por año entre $t = 0$ y t (condicional a un evento de incumplimiento),
(*v*) e_t: valor presente del pago del CDS considerando sólo el tiempo transcurrido entre el pago inmediato anterior a t y t (condicional a un evento de incumplimiento),
(*vi*) v_t: valor presente de una unidad monetaria disponible al tiempo t (factor de descuento),
(*vii*) w: pago anual realizado por $\mathcal{C}$,
(*viii*) w^*: valor de w que hace que el CDS tenga valor cero,
(*ix*) π: probabilidad de no incumplimiento durante la vida del CDS,
(*x*) g_t: interés acumulado (devengado) sobre el bono al tiempo t.

De acuerdo con la notación previamente introducida, evidentemente, $\pi = 1 - \sum_{i=1}^{N} Q_i$. Los pagos anuales, w, se realizan hasta que un evento de crédito ocurra o hasta el tiempo T. De esta manera, el valor presente de los pagos está dado por

$$\mathrm{VPP} = w \sum_{i=1}^{N} (u_{t_i} + e_{t_i})\, Q_i + w\pi u_T. \tag{13.20}$$

Si un evento de incumplimiento ocurre al tiempo t_i, el valor esperado del bono es $\mathrm{VEB_i} = (1 + g_{t_i})\widetilde{R}$. Asimismo, si un evento de incumplimiento ocurre al tiempo t_i, el pago esperado satisface

$$\begin{aligned} \mathrm{PEI}_i =& 1 - \mathrm{VEB_i} \\ =& 1 - (1 + g_{t_i})\widetilde{R} \\ =& 1 - \widetilde{R} - g_{t_i}\widetilde{R}. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Por lo tanto, el valor presente del pago esperado del CDS es

$$\mathrm{VPC} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{PEI}_i Q_i v_{t_i} = \sum_{i=1}^{N} (1 - \widetilde{R} - g_{t_i}\widetilde{R}) Q_i v_{t_i}. \tag{13.22}$$

Por otro lado, el valor del CDS para $\mathcal{C}$ es el valor presente del pago esperado del CDS, denotado por VPC, menos el valor presente de los pagos hechos por el comprador del seguro, VPP, esto es,

$$V_{\text{CDS}} = \sum_{i=1}^{n} (1 - \widetilde{R} - g_{t_i}\widetilde{R}) Q_i v_{t_i} - w \sum_{i=1}^{N} (u_{t_i} + e_{t_i}) Q_i - w\pi u_T. \tag{13.23}$$

El valor de $w = w^*$ que hace que $V_{\text{CDS}} = 0$ se determina mediante

$$w^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} (1 - \widetilde{R} - g_{t_i}\widetilde{R}) Q_i v_{t_i}}{\sum_{i=1}^{N} (u_{t_i} + e_{t_i}) Q_i + \pi u_T}. \tag{13.24}$$

De esta manera, w^* proporciona, en equilibrio, el pago anualizado para un CDS. La cantidad w^* es también llamada el diferencial del CDS.

13.7 Bibliografía

Hull, J. C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

Hull, J. C. and A. White (2000). "Valuing Credit Default *swap*s I: No Counterparty Default Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 8, No. 1, pp. 2940.

Merton, R. C. (1974). "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates". *The Journal of Finance*, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Venegas Martínez, F (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

13.8 Ejercicios

13.1 Considere dos bonos cupón cero cuyo valor nominal es \$100. Uno de los bonos es corporativo y otro gubernamental y presentan los siguientes precios a diferentes plazos:

Plazo=T	Precio del bono corp.=B_c	Precio del bono gub.=B_g
1	91	93
2	82	85
3	71	79

Determine el diferencial o sobretasa, $H(t,T)$.

Solución: Con el propósito de obtener el diferencial, considere primero las siguientes curvas de rendimiento:

$$R_c(0,T) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{B_c(0,T)}{100}\right)$$

y

$$R_g(0,T) = -\frac{1}{T}\ln\left(\frac{B_g(0,T)}{100}\right).$$

El diferencial está dado por $H(0,T) = R_c(0,T) - R_g(0,T)$. Los resultados se muestran en el siguiente cuadro:

T	Rend. bono corp.=$R_c(0,T)$	Rend. bono gub.=$R_g(0,T)$	Spread=$H(0,T)$
1	9.43%	7.26%	2.17%
2	9.92%	8.13%	1.80%
3	11.42%	7.86%	3.56%

13.2 Con base en el ejercicio anterior, obtenga la probabilidad de incumplimiento entre $T=1$ y $T=2$ si la tasa de recuperación es del 15%.

Solución: Considere el diferencial $H(0,T)$ del ejercicio anterior y una tasa de recuperación δ. En este caso, se utiliza la fórmula

$$Q(0,T) = \frac{1-e^{-H(0,T)T}}{1-\delta}.$$

En consecuencia,

$$Q(0,1) = \frac{1-e^{-H(0,1)1}}{1-0.15} = \frac{1-e^{-(0.0943-0.0726)1}}{0.85} = 2.53\%$$

y

$$Q(0,2) = \frac{1-e^{-H(0,2)2}}{1-0.15} = \frac{1-e^{-(0.0992-0.0813)2}}{0.85} = 4.15\%$$

Así, la probabilidad requerida es

$$Q(0,2) - Q(0,1) = 4.15\% - 2.53\% = 1.62\%.$$

13.3 Con base en los resultados de la sección 13.4, estime la tasa de recuperación de un bono corporativo con vencimiento en un año que incumpla precisamente en el primer año. Suponga que la diferencia de precio de bonos es 0.2, la probabilidad de incumplimiento es 0.85, el valor presente de un año es 0.93 y el valor futuro del bono en la fecha de incumplimiento es 1.05 y, por último, la cantidad a reclamar es el precio futuro.

Solución: A partir de las fórmulas (13.9) y (13.10), se sigue que

$$\delta_1 = 1 - \frac{B_{g1} - B_{c1}}{Q_1 v_1 F_{g11}} = 1 - \frac{0.2}{(0.85)(0.93)(1.05)} = 0.76.$$

13.4 Las tasas gubernamentales son del 6% bajo composición continua para todos los vencimientos. Una empresa tiene bonos a plazo de 1,2 y 3 años, con tasas de rendimiento (calculadas anualmente) de 7.2%, 7.4% y 7.6%, respectivamente. Los tres bonos pagan cupones anuales del 6%. Suponga que los incumplimientos sólo pueden ocurrir inmediatamente antes de los vencimientos. Suponga también que la tasa de recuperación es del 40% del valor del instrumento si no incumple. Calcule las probabilidades de incumplimiento neutrales al riesgo.

13.5 Obtenga la probabilidad de que una empresa cumpla con el pago de su deuda en 3 años, dado que su deuda adquirida es de 5 millones de pesos (D), $r = 0.08$, $\sigma = 0.18$ y el valor de la empresa es 9 millones de pesos (V_t).

Solución: A partir de la fórmula de Black-Scholes para valuar una opción de compra, se tiene que

$$d_1 = \frac{\ln(9/5) + (0.08 + 0.5(0.18)^2)3}{(0.18)\sqrt{3}} = 2.81$$

y

$$d_2 = 2.81 - (0.18)\sqrt{3} = 2.50.$$

Si se utilizan las tablas de la distribución normal estándar acumulada, se obtiene que $\mathbb{P}\{V_T > D \mid V_t\} = \Phi(2.50) = 0.994$. Por lo tanto, la probabilidad de que la empresa cumpla con el pago de su deuda es del 99.4%.

13.6 Una empresa tiene un capital de 4 millones, sus acciones tienen una volatilidad de 60%. En dos años deberá pagar toda su deuda que es de 15 millones. La tasa libre de riesgo es del 6%. Usar el modelo de Merton para estimar la probabilidad de incumplimiento.

Solución: A partir de (13.14) y de (13.18) se tiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas en σ_V y V_t:

$$\begin{cases} S_t - V_t\Phi(d_1) - De^{-r(T-t)}\Phi(d_2) = 0 \\ \\ \sigma_S S_t - \sigma_V V_t \Phi(d_1) = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $\sigma_V = 0.1498$ y $V_t = 7.0110$. La probabilidad de incumplimiento es $\Phi(-d_2) = 0.0245$.

13.7 Suponga que la curva de la tasa libre de riesgo es constante a 7% con composición continua y los incumplimientos pueden ocurrir en los años 1, 2 y 3 en un credit default *swap* de tres años. Suponga que la tasa de recuperación es del 30% y las probabilidades de incumplimiento son: 0.0224, 0.0247 y 0.0269 respectivamente. Suponga también que los pagos se hacen semestralmente y el interés acumulado en el bono de referencia es siempre cero al tiempo en que ocurre el incumplimiento. Calcule el diferencial del CDS.

Solución: En este caso $g_{t_i} = 0$ y $e_{t_i} = 0$ para $i = 1, 2, 3$. Para las v_{t_i} se tiene que: $v_{t_1} = \exp -(0.07 \times 1) = 0.9324$, $v_{t_2} = \exp -(0.07 \times 2) = 0.8694$ y $v_{t_3} = \exp -(0.07 \times 3) = 0.8106$. Para calcular las u_{t_i} se tiene que calcular la tasa anual equivalente: $R = 2 \times \left(\sqrt{e^{0.07}} - 1\right) = 0.0712$. Así

$$u_{t_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - (1 + 0.0712/2)^{-2}\right) \times 1}{0.0712/2}\right] = 0.9490,$$

$$u_{t_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - (1 + 0.0712/2)^{-2}\right) \times 2}{0.0712/2}\right] = 1.8338,$$

$$u_{t_3} = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1 - (1 + 0.0712/2)^{-2}\right) \times 3}{0.0712/2}\right] = 2.6589.$$

También $\pi = 1 - (0.0224 + 0.0247 + 0.0269) = 0.926$. A partir de (13.24) el diferencial del CDS es

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{\sum_{i=1}^{3}(1 - \widetilde{R})Q_i v_{t_i}}{\sum_{i=1}^{3} u_{t_i} Q_i + \pi u_T} \\ &= \frac{(1 - 0.3) \times (0.0224 \times 0.9324 + 0.0247 \times 0.8694 + 0.0269 \times 0.8106)}{(0.9490 \times 0.0224 + 1.8338 \times 0.0247 + 2.6589 \times 0.0269) + 0.926 \times 2.6589} \\ &= 0.0173. \end{aligned}$$

Capítulo 14

Riesgo operativo, distribuciones de frecuencia y severidad

Conceptos básicos:

- ✓ **Riesgo operativo**
- ✓ **Distribución de frecuencia**
- ✓ **Distribución de severidad**
- ✓ **Distribución de severidad extrema**
- ✓ **Inferencia Bayesiana**

14.1 Introducción

En capítulos anteriores se ha hablado del riesgo de mercado y del riesgo crédito como posibles fuentes de quebranto para una institución, se han revisado algunos de los más importantes modelos de medición y control de riesgos dentro de la literatura y se ha dotado al lector de una visión general de las fuentes de incertidumbre, de los modelos usados en su medición y de las limitaciones y alcances de éstos.

A continuación se revisará una tercer rama dentro del árbol del análisis de riesgo, cuya complejidad teórica, difícil acceso a la información, pues implica conocer los entretelones de la operación de una institución, y en algunos casos lo raro y catastrófico de los eventos ha llevado a un menor desarrollo teórico que en las dos ramas anteriores.

Los eventos de riesgo operativo, también llamado riesgo operacional, son en general eventos de fortísima severidad aunque muy rara ocurrencia. Dentro de ellos se pueden nombrar eventos como las pérdidas generadas por fallas en los sistemas administrativos y procedimientos internos, así como por errores humanos, intencionales o no. Es decir se trata de quebrantos ocurridos a raíz de errores o negligencias no imputables a movimientos de mercado o a la incapacidad de las contrapartes para hacer frente a sus obligaciones.

Ejemplos de eventos de riesgo operativo son: fallas en *hardware*, *software* y telecomunicaciones, errores de captura, ejecución y mantenimiento de transacciones, fallas en sistemas de seguridad, pérdida parcial o total de bases de datos sobre operaciones con clientes, fraudes internos (*V.g.* transacciones no reportadas o no autorizadas), fraudes externos (*V.g.* transacciones con documentos falsos), robo, daños a los activos fijos (por vandalismo, terrorismo, desastres naturales, etc.), reembolsos a clientes y pagos de penalización, restricciones legales que pudieran fomentar el incumplimiento de las obligaciones de clientes (riesgo legal), documentación incompleta de clientes, restricciones impuestas por las autoridades financieras para participar en ciertos mercados o segmentos de mercado, etc.

Al igual que en las dos ramas anteriores, existen tres aspectos relevantes en la administración de riesgos operativos. El primero consiste en el monto de capital requerido para enfrentar los eventos relacionados a este tipo de eventos, aspecto en ocasiones ligado a la legislación financiera local y a la supervisión gubernamental lo que conlleva una repercusión directa sobre las medidas de desempeño de la institución[1]. El segundo toma en cuenta la supervisión y control para evitar que se presenten dichas fallas, lo que implica medidas de control administrativas internas. El tercero considera los modelos y métodos utilizados para cuantificar el riesgo operativo, siendo este aspecto en el cual se concentra esta subsección, en particular, en el análisis de la frecuencia y severidad de eventos de riesgo operativo.

14.2 Frecuencia y severidad de eventos de riesgo operativo

Hasta el momento, para el estudio de esta fuente de riesgo, se han usado medidas de frecuencia y de severidad. La primera, frecuencia, es el número de eventos que producen pérdidas en un cierto intervalo de tiempo, mientras que se define como severidad al impacto del evento en términos de pérdidas económicas.

A pesar de la falta de datos y de la confidencialidad de los mismos, se sabe, dentro del medio financiero, que para un banco típico que realiza diversas operaciones y transacciones con clientes se pueden clasificar algunos eventos de riesgo operativo de la siguiente forma:

Evento	Frecuencia	Severidad
Fraude interno	baja	alta
Fraude externo	media/alta	baja/media
Accidente de trabajo	baja	baja
Errores de captura, y ejecución	baja/media	media/alta
Daños a activos fijos	Baja	Baja
Falla de sistemas	baja	baja

Cuadro 14.1 Ejemplos de eventos de riesgo crédito según su frecuencia y severidad.

Evidentemente, la clasificación de baja, media y alta frecuencia y severidad dependerá de cada banco en función a la concentración de sus operaciones entre sus clientes y al tipo de operaciones realizadas por estos.

14.3 Distribuciones de frecuencia de eventos de riesgo operativo

En la literatura especializada de riesgos operativos existe un número importante de distribuciones de frecuencia de fallas en sistemas y procedimientos. La más sencilla de ellas para modelar el número de eventos en un periodo de tiempo es la distribución binomial $b(n, p)$, donde n representa el número total de eventos durante un periodo de tiempo , usualmente un año, y p es la probabilidad de que se presente el evento. Si X es la variable aleatoria que representa el número de eventos de riesgo en un año y se supone que los eventos son independientes, entonces la probabilidad de que se presente cierto número de eventos de riesgo operativo está dada por:

$$\mathbb{P}\{X = x\} = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

[1] *V.g. Risk Adjusted Return Over Capital* o RAROC por sus siglas en inglés.

El problema con esta aproximación es que requiere especificar, de antemano, el número de eventos, n, en un año. Otra desventaja del modelo anterior es que la probabilidad de que se presente un evento de pérdida se mantiene constante e igual a p.

Otra aproximación similar, que adolece de los mismos inconvenientes, se da cuando p es pequeña y n es grande, combinándolas en $\lambda = np$, lo que lleva a la distribución $b(n,p)$ a una distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. A continuación se mostrará como es que la distribución binomial converge a una distribución Poisson.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}p^x\,(1-p)^{n-x}\right] &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\,(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\frac{(\lambda)^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right].\end{aligned}$$

En la expresión anterior sólo se hizo la sustitución $p = \lambda/n$ en el segundo elemento de la igualdad, para después, en el tercer elemento, separar el factorial, eliminar $(n-x)!$ e intercambiar de lugar los denominadores del factorial y del segundo factor, además de separar el tercer factor. Aplicando el límite se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\,(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^x}\frac{(\lambda)^x}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}\right] = (1)\,\frac{(\lambda)^x}{x!}e^{-\lambda}\,(1) = \frac{(\lambda)^x}{x!}e^{-\lambda}.$$

que no es otra cosa que la distribución Poisson.

$$\mathbb{P}\{X=x\} = \begin{cases}\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0,1,\ldots\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Esta distribución contempla un solo parámetro λ, llamado parámetro de intensidad, el cual determina el número medio de eventos de pérdida por unidad de tiempo. Cuando el riesgo operacional es de baja frecuencia, ésta puede ser modelada con una distribución Poisson, en cuyo caso el parámetro n desaparece. Como características importantes de esta distribución se tiene que tanto su media como su varianza son iguales a λ.

Existen, por supuesto, muchas otras formas funcionales para la distribución de frecuencia del riesgo operacional que se pueden utilizar bajo ciertas condiciones, por ejemplo, la distribución binomial negativa, la cual puede ser usada cuando se desea conocer a partir de que intento se obtendrá una pérdida[2]. Como características importantes de esta distribución se puede mencionar que su media es $r(1-p)/p$, mientras que su varianza es $r(1-p)/p^2$, finalmente se muestra la forma de la función de distribución.

$$f\,(k,r,p) = \binom{k+r-1}{k}p^r\,(1-p)^k = \frac{\Gamma\,(k+r)}{k!\Gamma\,(r)}p^r\,(1-p)^k = (-1)^k\binom{-r}{k}p^r\,(1-p)^k\,.$$

En las igualdades subsecuentes sólo se hace uso del resultado conocido de las funciones gamma $\Gamma\,(x) = (x-1)!$ Esta distribución también converge a la distribución de Poisson si se supone que

[2] La distribución busca conocer la probabilidad del número de fallas antes de obtener el r-ésimo éxito en un experimento de Bernoulli (dicotómico) con una probabilidad de éxito p. En este caso un éxito es obtener el r-ésimo evento de riesgo operativo (la falla).

$p = \frac{r}{r+\lambda}$ y se hace que $r \to \infty$. Esto lleva, usando la parametrización $\Gamma(x)$, a:

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\left[f\left(k,r,p\right)\right] &= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{\Gamma\left(k+r\right)}{k!\Gamma\left(r\right)}\left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^{r}\left(1-\frac{r}{r+\lambda}\right)^{k}\right]\\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{\Gamma\left(k+r\right)}{k!\Gamma\left(r\right)}\left(\frac{r}{r+\lambda}\right)^{r}\left(\frac{\lambda}{r+\lambda}\right)^{k}\right]\\
&= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{\lambda^{k}}{k!}\frac{\Gamma\left(k+r\right)}{\Gamma\left(r\right)\left(r+\lambda\right)^{k}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{r}\right)^{r}}\right)\right]\\
&= \frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

14.4 Distribuciones de severidad de la pérdida de eventos de riesgo operativo

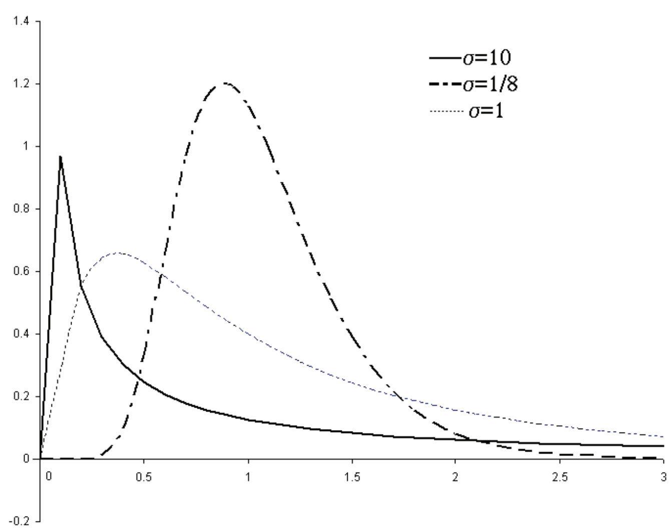
En la literatura de riesgos operativos una distribución, muy popular, sobre la severidad del monto de la pérdida es la distribución lognormal, con densidad:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right\}, \qquad x>0,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ son los parámetros de la distribución. En este caso, se puede verificar que si X es una variable aleatoria lognormal con la densidad anteriormente establecida, entonces

$$\mathrm{E}[X] = \exp\left\{\mu+\frac{\sigma^{2}}{2}\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}[X] = e^{2\mu+\sigma^{2}}(e^{\sigma^{2}}-1).$$

Como características importantes de la distribución, se hace notar al lector que la distribución lognormal presenta sesgo hacia la derecha, concentrando su masa a medida que la desviación estándar es menor, como se muestra en la Gráfica 14.2:

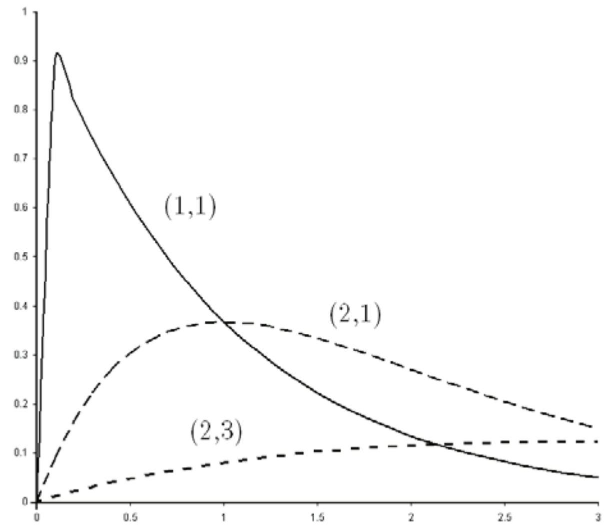


Gráfica 14.2 Función de densidad lognormal con $\mu = 0$ y diferentes valores de σ.

Es esta característica la que en primer instancia la vuelve llamativa para modelar riesgo operativo, aunque no es la única opción, pues cuando algunos conjuntos de datos muestran leptocurtosis y un sesgo considerable, es común modelarlas usando la distribución Gamma de parámetros α y β, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Esta distribución de severidad tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}, \quad x > 0,$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es la función Gamma.



Gráfica 14.3 Función de densidad Gamma para diferentes valores de α y β.

En este caso, también es común utilizar la función de densidad hiperbólica dada por

$$f(x) = \frac{\exp\{-\alpha\sqrt{\beta^2 + x^2}\}}{2\beta K(\alpha\beta)}, \quad x > 0,$$

donde $K(\cdot)$ representa la función de Bessel.

14.5 Distribuciones de severidad extrema

Como se pudo observar en el Cuadro 14.1, existen algunos eventos de riesgo operativo, como los fraudes internos o algunos errores de captura, que son eventos raros aunque de consecuencias mayores para la institución. Para el modelado de este tipo de eventos, se usan las distribuciones de valores extremos.

Una distribución de severidad extrema para riesgos operativos de uso muy común es la distribución de Fréchet con parámetros $\alpha > 0$, $\nu > 0$ y $\kappa > 0$. En este caso, la función de distribución acumulada está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \nu, \\ \exp\left\{-\left(\dfrac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-\alpha}\right\}, & x \geq \nu. \end{cases} \tag{14.1}$$

La función de densidad correspondiente, obtenida de derivar la acumulada respecto a x, satisface:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\kappa} F(x) \left(\frac{x-\nu}{\kappa}\right)^{-(1+\alpha)}, \qquad x \geq \nu. \tag{14.2}$$

Para obtener cualquier momento de esta función, basta con desarrollar la ecuación que define un momento muestral, *i.e.* $m_{jF(x)} = \int x^j f(x)\,\mathrm{d}x$, lo que conduce a

$$m_{jF(x)} = \int x^j f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^j \alpha e^{-x^{-\alpha-1}} \left(-x^{-\alpha-1}\right).$$

Haciendo un cambio de variable $u = x^{-\alpha}$, se tiene que $\mathrm{d}u = -\alpha x^{-\alpha-1}\mathrm{d}x$, lo que sustituyendo lleva a

$$m_{jF(x)} = -\alpha \int_0^\infty e^{-u} u u^{-\frac{j}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}u}{-\alpha u u^{\frac{1}{\alpha}}} = \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{j}{\alpha}} \mathrm{d}u$$

que no es otra cosa que un caso específico de la función gamma, a saber

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha} x^{a-1} \mathrm{d}x,$$

por lo que los momentos de esta función se obtienen usando $m_{jF(x)} = \Gamma\left(1 - \frac{j}{\alpha}\right)$.

Usando la misma función con parámetros de ubicación y escala y siguiendo el procedimiento anterior para obtener el primer y segundo momentos muestrales se puede de demostrar fácilmente que si X es una variable aleatoria Fréchet y $\alpha > 2$, entonces

$$\mathrm{E}[X] = \nu + \kappa\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

y

$$\mathrm{Var}[X] = \kappa^2 \left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Existen otras distribuciones de valores extremos de uso frecuente como las del tipo Gumbel y Weibull, con dominios en todos los reales y sólo los reales negativos respectivamente. Dado que se trata de una familia de distribuciones de valores extremos, se presentan en conjunto.

$$\begin{array}{lll} \text{Gumbel} & F_0(x) = e^{-e^{-x}}, & \forall\ x \\ \text{Fréchet} & F_1(x) = e^{-x^{-\alpha}}, & x \geq 0 \\ \text{Weibull} & F_2(x) = e^{-(-x)^{-\alpha}}, & x \leq 0 \end{array}$$

El lector puede seguir el procedimiento antes descrito para obtener las funciones de densidad y los momentos muestrales. Es importante recordar que dado el dominio de la Gumbel, que no concuerda con el de las funciones Γ, su función de momentos se obtiene a través de la función característica, mientras que las funciones Weibull y Fréchet pueden ser expresadas en términos de la función gamma. A continuación se muestran las funciones de densidad.

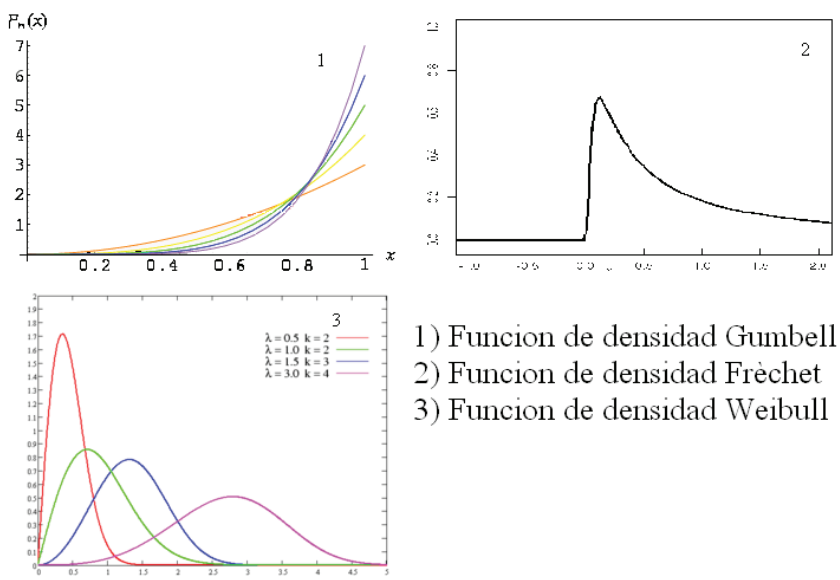
$$\begin{array}{lll} \text{Gumbel} & f_0(x) = e^{-x} e^{-e^{-x}}, & \forall\ x \\ \text{Fréchet} & f_1(x) = \alpha x^{-1-\alpha} e^{-x^{-\alpha}}, & x \geq 0 \\ \text{Weibull} & f_2(x) = |\alpha| \left(-x^{-1-\alpha}\right) e^{-x^{-\alpha}}, & x \leq 0 \end{array}$$

Ahora se muestran las funciones de momentos para las funciones Weibull y Fréchet.

$$\begin{array}{ll} \text{Fréchet} & m_{jF_1(x)} = \Gamma\left(1 - \dfrac{j}{\alpha}\right), \quad \alpha > j \\ \text{Weibull} & m_{jF_2(x)} = (-1)^j\, \Gamma\left(1 - \dfrac{j}{\alpha}\right), \quad \alpha > j \end{array}$$

Tal y como se muestra en la matriz anterior, los momentos para estas distribuciones sólo existen si el parámetro de forma α es mayor que el momento, j, buscado. De no ser así, se sobrentiende que una o varias observaciones aberrantes son tan grandes que dominan todo el momento muestral. A este fenómeno, la inexistencia de alguno de los momentos, se le conoce como *colas pesadas* y es propio de distribuciones de valores extremos y de excesos sobre el umbral (Familia Pareto).

A continuación se muestran algunas de las posibles formas que pueden tomar estas distribuciones de valores extremos. Se desea hacer notar al lector lo dependientes que son estas distribuciones del parámetro de forma α, razón por la cual resultan en extremo maleables. También es importante hacer notar que la distribución Weibull aparece como positiva para evitar confusiones con densidades negativas, aunque su dominio sean los reales negativos.



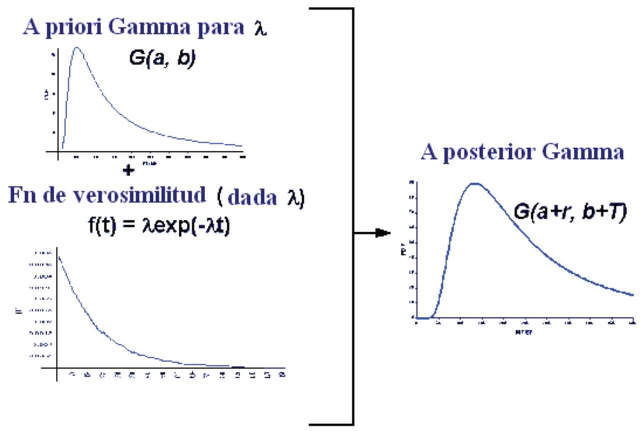
Gráfica 14.4 Distribuciones de valores extremos, tomado de Wikipedia.

14.6 Estimación Bayesiana de la severidad de la pérdida

El concepto de estimación Bayesiana se sostiene en la idea de la existencia de un conocimiento previo sobre la forma en que se comportan los parámetros usados en la estimación, y que esta información puede ser incorporada en la toma de decisiones. Esto es, considera fundamentalmente dos fuentes de información: la función de densidad *a priori* del parámetro de interés, $\pi(\theta)$, la cual refleja información inicial sobre dicho parámetro y la función de verosimilitud que proviene de un modelo muestral que considera al parámetro en cuestión, $f(x|\theta)$. El teorema de Bayes combina estas dos fuentes de información para obtener una densidad *a posteriori* sobre el parámetro dada por

$$f(\theta|x) \propto f(x|\theta)\pi(\theta). \tag{14.3}$$

La distribución *a posteriori* $f(\theta|x)$ se utiliza para hacer inferencias sobre θ. La Gráfica 14.5 ilustra el proceso de asimilación de información. Esto es la forma en que se combinan la densidad *a priori* y la verosimilitud para obtener la distribución *a posteriori* mediante el teorema de Bayes.



Gráfica 14.5 Proceso de incorporación de información en la estimación Bayesiana.

14.6.1 Caso binomial con densidad *a priori* uniforme

Si se supone que la distribución de frecuencias de las pérdidas sigue una distribución binomial, $b(n,p)$, la frecuencia esperada, su valor esperado, está dada por np. Siendo n el número de eventos que son susceptibles a pérdidas de tipo operacional y p la probabilidad de que el evento de pérdida se presente. Tal y como se mencionó anteriormente, esta es una de las desventajas de este modelo. Sin embargo, usando un enfoque bayesiano, la probabilidad de ocurrencia del evento se convertirá en el valor esperado de una función de distribución que incorpora el conocimiento previo, dando mayor flexibilidad y poder de predicción al modelo.

A continuación se discute cómo se pueden hacer inferencias sobre p utilizando el enfoque Bayesiano. El estimador que se obtiene, $\widehat{p}$, se utiliza para estimar la frecuencia esperada $n\widehat{p}$. Suponga que la distribución *a priori* de p es uniforme, *i.e.*, $p \sim \mathcal{U}[0,1]$. Observe primero que la función de distribución conjunta del número de eventos y su probabilidad están dadas como las marginales condicionales de una de ellas multiplicando a la función marginal de la otra, esto es:

$$f(x,p) = f(x|p)\pi(p)$$

y del mismo modo

$$f(x,p) = f(p|x)f(x),$$

entonces, siguiendo las igualdades, se tiene que

$$f(p|x)f(x) = f(x,p) = f(x|p)\pi(p).$$

Por lo tanto, al reacomodar la igualdad anterior y expresándolo como una aplicación del teorema de Bayes, se sigue que

$$f(p|x) = \frac{f(x|p)\pi(p)}{f(x)}.$$

En este caso, se tiene que la función marginal del numero de eventos, condicionada a la probabilidad de ocurrencia, es una binomial, mientras que la *a priori* para la probabilidad de ocurrencia es una función uniforme.

Es prudente hacer notar al lector que dentro de la teoría Bayesiana, una función *a priori* uniforme implica que damos la misma probabilidad a cualquier valor del parámetro, lo que implica ignorancia sobre la forma en que este se distribuye. Todo esto conduce a

$$f(x|p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

$$\pi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si} \ \ p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$f(x) = \int_0^1 f(x,p)\mathrm{d}p = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p.$$

Observe que $f(x)$ es la constante de normalización que asegura que la densidad *a posteriori*, $f(p|x)$, sea efectivamente una densidad. De esta manera,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p = \binom{n}{x}\int_0^1 p^x(1-p)^{n-x}\mathrm{d}p \\ &= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+1+n-x+1)} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

En el resultado anterior se ha hecho uso del hecho de que la función gamma, valuada en números enteros positivos es igual al factorial de ese número menos uno, esto es $\Gamma(x) = (x-1)!$. Además de que la función Beta está dada por

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}\mathrm{d}p.$$

Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* con el teorema de Bayes, de tal forma que sustituyendo en $f(p|x) = \frac{f(x|p)\pi(p)}{f(x)}$, se llega a

$$f(p|x) = \begin{cases} (n+1)\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si} \ \ p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Una vez que se tiene la distribución *a posteriori*, se estima[1] el valor de p a través de $\mathrm{E}[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned} \widehat{p} =& \mathrm{E}[p|x] = \int_0^1 p f(p|x)\mathrm{d}p \\ =& (n+1)\binom{n}{x}\int_0^1 p^{x+1}(1-p)^{n-x}\mathrm{d}p \\ =& (n+1)\binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+2)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+3)} \\ =& \frac{(n+1)n!(x+1)!(n-x)!}{x!(n-x)!(n+2)!} \\ =& \frac{x+1}{n+2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho que $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ y las propiedades antes mencionadas de las funciones Beta y Gamma. Así pues, la frecuencia esperada se estima mediante $n\widehat{p}$. Una forma alternativa de obtener el resultado anterior consiste en observar que si $f(x)$ es una constante de normalización, entonces se puede escribir la función *a posteriori* como una proporción, $\propto$, de la distribución marginal condicionada del número de eventos multiplicado por la función de densidad *a priori* de la probabilidad.

$$f(p|x) \propto f(x|p)\pi(p).$$

[1] Si se determina $\widehat{p}$ de tal manera que se minimice $\int(p-\widehat{p})^2 f(p|x)dp$, entonces $\widehat{p}=E[p|x]$.

En consecuencia, se puede omitir todo lo que no dependa de p y después incorporarlo a través de la constante de normalización, esto es,

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es que

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} p^x(1-p)^{n-x}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

14.6.2 Caso binomial con m observaciones y densidad *a priori* uniforme

A continuación se extiende el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere ahora una muestra aleatoria (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas) $X_1, X_2, ..., X_m$ de una distribución $X \sim b(n,p)$. En este caso, y como aplicación del punto anterior, se tiene que

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1, x_2, ..., x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})},$$

donde $\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i/m$. Si

$$\pi(p) = \begin{cases} 1, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto \begin{cases} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f(p|\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(mn+2)}{\Gamma(m\bar{x}+1)\Gamma(m(n-\bar{x})+1)} p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}, & \text{si } \; p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Recuerde que una variable aleatoria tiene distribución Beta con parámetros α y β, $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$, si su densidad es de la forma

$$f(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}, \qquad y, \; \alpha, \; \beta > 0.$$

La media de esta distribución está dada por

$$\mathrm{E}[y] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

En consecuencia,

$$\widehat{p} = \mathrm{E}[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x}+1}{mn+2}.$$

14.6.3 Caso binomial con densidad *a priori* Beta

En esta sección se examina otra posibilidad para la distribución *a priori* de p. Considere una variable aleatoria binomial $X \sim b(n,p)$ y suponga que la distribución *a priori* de p es Beta, $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$, *i.e.*,

$$\pi(p) = B(\alpha,\beta)^{-1}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}.$$

La media de esta distribución está dada por $\mathrm{E}[p] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Ahora bien, por definición, y siguiendo la lógica del procedimiento anterior

$$f(x) = \int_0^1 f(x,p)\mathrm{d}p = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p.$$

Observe que, en este caso,

$$\begin{aligned} f(x) = \int_0^1 f(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p &= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\int_0^1 p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}\mathrm{d}p \\ &= \binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

De nuevo se ha usado la definición de la función Beta. Una vez determinada la constante de normalización, se calcula la distribución *a posteriori* mediante la fórmula de Bayes

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con esta distribución *a posteriori* se estima el valor de p, que fue visto como una variable aleatoria, a través de su valor esperado, que ya es una constante, $\mathrm{E}[p|x]$. Es decir,

$$\begin{aligned} \widehat{p} =& \mathrm{E}[p|x] = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}\int_0^1 p^{x+\alpha}(1-p)^{n-x+\beta-1}\mathrm{d}p \\ =& \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha+1)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \\ =& \frac{x+\alpha}{n+\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Otra forma de obtener el mismo resultado consiste en observar que

$$f(p|x) \propto \begin{cases} p^x(1-p)^{n-x}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, & \text{si } p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La única posibilidad para que $f(p|x)$ sea una densidad es que

$$1 = k\int_0^1 p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}$$

lo que lleva a

$$f(p|x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}p^{x+\alpha-1}(1-p)^{n-x+\beta-1}, & \text{si } p \in [0,1], \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

14.6.4 Caso binomial con m observaciones y densidad *a priori* Beta

A continuación se generaliza el resultado de la sección anterior a una muestra de observaciones. Considere una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_m$ de una distribución $X \sim b(n, p)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|p) = f(x_1, x_2, ..., x_m|p) \propto p^{m\bar{x}}(1-p)^{m(n-\bar{x})}.$$

Si

$$\pi(p) \propto p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1},$$

entonces

$$f(p|\mathbf{x}) \propto p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1}.$$

En consecuencia,

$$f(p|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(mn+\alpha+\beta)}{\Gamma(m\bar{x}+\alpha)\Gamma(m(n-\bar{x})+\beta)} p^{m\bar{x}+\alpha-1}(1-p)^{m(n-\bar{x})+\beta-1}, \ p \in [0,1].$$

Por lo tanto,

$$\widehat{p} = \mathrm{E}[p|\mathbf{x}] = \frac{m\bar{x}+\alpha}{mn+\alpha+\beta}.$$

14.6.5 Caso Poisson con *a priori* Gamma

Cuando se utiliza la distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$, para modelar la probabilidad de que se presenten eventos de riesgo operativo, el enfoque Bayesiano proporciona un estimador de λ. Considere ahora una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de una distribución Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En este caso,

$$f(\mathbf{x}|\lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} \propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}.$$

Suponga que la distribución *a priori* sobre λ es $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, *i.e.*,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{\lambda^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-\lambda\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \lambda > 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Si se utiliza el teorema de Bayes, se sigue que

$$\begin{aligned} f(\lambda|\mathbf{x}) &\propto e^{-n\lambda}\lambda^{n\bar{x}}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda\beta} \\ &= e^{-\lambda(n+\beta)}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$f(\lambda|\mathbf{x}) = \frac{e^{-\lambda(n+\beta)}(n+\beta)^{n\bar{x}+\alpha}\lambda^{n\bar{x}+\alpha-1}}{\Gamma(n\bar{x}+\alpha)}.$$

En consecuencia,

$$\widehat{\lambda} = \mathrm{E}[\lambda|\mathbf{x}] = \frac{n\bar{x}+\alpha}{n+\beta}.$$

14.7 Bibliografía

Cruz, M. G. (2002). Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk. John Wiley & Sons.

Zellner, A. (1971). An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: Wiley.

Reiss, R. D. & Thomas, M. (2000). Statistical Analysis of Extreme Values, Birkhäuser, Germany.

Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. Ed., International Thomson Editors, México.

14.8 Ejercicios

14.1 Si X es una variable aleatoria lognormal con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, con función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x > 0,$$

muestre que la esperanza y la varianza de X son:

$$\mathrm{E}[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}[X] = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1).$$

14.2 Demuestre que la varianza de una distribución Fréchet con $\alpha = 4$ es:

$$\mathrm{Var}\,(x) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{4}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right)^2.$$

14.3 Si la verosimilitud es Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, y la densidad *a priori* es Gamma, $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, muestre que la densidad *a posteriori* es $\mathcal{G}(\alpha + x, \beta + 1)$.

Apéndices

Apéndice A

Modelo de Nelson-Siegel

A.1 Introducción

En este apéndice se presenta el modelo de Nelson y Siegel (1987) para la estimación paramétrica de una curva de rendimiento. Este modelo se concentra en la evolución de la tasa *forward* instantánea, y es un modelo no polinomial que elimina cambios abruptos en la estructura de plazos de la tasa de interés, sobre todo en el largo plazo. La curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa *forward* instantánea.

La tasa *forward* instantánea está dada por:

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln B(t,T)}{\partial T}. \tag{A.1}$$

Observe que de la ecuación anterior se desprende que

$$\begin{aligned}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s &= -\int_t^T \mathrm{d}\ln B(t,s)\\ &= -\ln B(t,T) + \ln B(t,t.)\end{aligned}$$

Ahora bien, dado que $B(t,t) = 1$, se obtiene

$$\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = -\ln B(t,T).$$

Por lo tanto, el precio de un bono cupón cero que paga una unidad monetaria al vencimiento satisface:

$$B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right\}.$$

Por otro lado, dado que $B(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$, se puede escribir

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s. \tag{A.2}$$

Es decir, la curva de rendimiento se obtiene como el promedio de valores futuros de la tasa *forward* instantánea.

Es importante señalar que la dinámica de la tasa *forward* instantánea en este modelo, resulta de la solución de una ecuación diferencial de segundo grado, ya sea con raíces reales y distintas, o raíces reales e iguales, por lo que en lo que sigue sólo se mostrarán los resultados obtenidos.

A.2 Dinámica de la tasa *forward* instantánea con base en una solución con raíces reales y distintas

La dinámica de la tasa *forward* para el caso de la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con raíces reales y distintas es

$$f(t,T) = \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau_1} + \beta_2 e^{-(T-t)/\tau_2}. \tag{A.3}$$

El primer parámetro, β_0, puede verse como la contribución de la tasa *forward* en el largo plazo, ya que los otros términos tienden a cero, exponencialmente, cuando el vencimiento, T, aumenta. Los dos términos siguientes en (A.3) pueden verse como la contribución de la tasa *forward* en el corto plazo. Estos términos actúan fundamentalmente en vencimientos pequeños ya que cuando el plazo se incrementa tienden rápidamente a cero. Evidentemente, la tasa *forward* de largo plazo satisface $f(t,\infty) = \beta_0$ y la tasa *forward* de corto plazo $f(t,t) = r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2$.

En virtud de (A.2) y (A.3), la curva de rendimiento, de un bono cupón cero, está dada por

$$\begin{aligned} R(t,T) =& \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s \\ =& \beta_0 + \beta_1 \frac{1-e^{-(T-t)/\tau_1}}{\frac{T-t}{\tau_1}} + \beta_2 \frac{1-e^{-(T-t)/\tau_2}}{\frac{T-t}{\tau_2}}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Claramente, $R(t,\infty) = \beta_0$. Con el propósito de determinar la tasa corta a partir de la curva de rendimiento, considere el cambio de variable $v = T - t$ en (A.4), entonces

$$\begin{aligned} r_t =& \lim_{v\to 0} R(t, t+v) \\ =& \beta_0 + \beta_1 \lim_{v\to 0} \frac{1-e^{-v/\tau_1}}{\frac{v}{\tau_1}} + \beta_2 \lim_{v\to 0} \frac{1-e^{-v/\tau_2}}{\frac{v}{\tau_2}}. \end{aligned}$$

En este caso la regla de L'Hôpital conduce a

$$r_t = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2.$$

Por lo anterior es importante destacar que las cantidades β_0 y $\beta_0+\beta_1+\beta_2$ tienen que ser positivas.

A.3 Dinámica de la tasa *forward* instantánea con base en una solución con raíces reales e iguales.

La dinámica de la tasa *forward* para el caso de la solución de una ecuación diferencial de segundo grado con raíces reales e iguales es conducida por la ecuación

$$\begin{aligned} f(t,T) &= \beta_0 + \beta_1 e^{-(T-t)/\tau} + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right) e^{-(T-t)/\tau} \\ &= \beta_0 + \left[\beta_1 + \beta_2 \left(\frac{T-t}{\tau}\right)\right] e^{-(T-t)/\tau}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Como antes, el primer parámetro, β_0, puede verse como la contribución de la tasa *forward* en el largo plazo, ya que los otros términos tienden rápidamente (exponencialmente) a cero cuando el vencimiento, T, aumenta. El segundo término en (A.5) puede verse como la contribución de la tasa *forward* en el corto plazo ya que al incrementar el plazo tiende rápidamente a cero. El tercer término se incrementa con el plazo al vencimiento, partiendo de $f(t,t)=0$, hasta alcanzar un máximo para después tender a cero otra vez. Un valor positivo del parámetro τ determina la velocidad con la que el segundo y tercer términos convergen a cero. El inverso $1/\tau$ corresponde a la velocidad con la que la tasa *forward* instantánea converge a su valor de largo plazo β_0. Así, se tiene un mecanismo de reversión a la media comparable con el de los modelos de Vasicek, Cox, Ingersoll y Ross, y Hull y White. En este caso, es fácil verificar que la curva de rendimiento satisface

$$R(t,T)=\frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s=\beta_0+(\beta_1+\beta_2)\,\frac{1-e^{-(T-t)/\tau}}{\frac{T-t}{\tau}}-\beta_2 e^{-(T-t)/\tau}. \qquad (A.6)$$

En efecto, si se utiliza el cambio de variable $u=-(T-s)/\tau$, entonces

$$\begin{aligned}\int_t^T\left(\frac{T-s}{\tau}\right)e^{-(T-s)/\tau}\mathrm{d}s &= -\tau\int_{-(T-t)/\tau}^{0} ue^u\mathrm{d}u\\ &= -\tau ue^u\Big|_{-(T-t)/\tau}^{0}+\tau\int_{-(T-t)/\tau}^{0} e^u\mathrm{d}u\\ &= -(T-t)e^{-(T-t)/\tau}+\tau\left(1-e^{-(T-t)/\tau}\right).\end{aligned}$$

A partir del resultado anterior se obtiene inmediatamente (A.6). En conclusión, la curva de rendimiento en (A.6) se determina a partir del comportamiento futuro de las tasas *forward* y, en consecuencia, por cuatro parámetros, a saber β_0, β_1, β_2 y τ.

A.4 Bibliografía

Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). Parsimonious Modeling of *yield* Curves". *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-489.

Apéndice B

Movimiento Browniano, lema de Itô

B.1 Introducción

Este apéndice presenta una visión general del lenguaje técnico en finanzas modernas. En las técnicas que se usarán, las expresiones como: caminata aleatoria, movimiento Browniano y lema de Itô podrían traer un velo del misterio en las mentes de los lectores. En un intento de levantar este velo, los autores seremos culpables de la sobresimplificación y no tendremos disculpa por ello. No obstante, para el lector interesado en profundizar en los conceptos formales, se incluye la bibliografía relevante.

B.2 Caminata aleatoria

Dibuje una partícula moviéndose sobre una línea recta. Sea X_t la posición de la partícula al tiempo 1, con $X_0 = 0$. La partícula se mueve un paso hacia adelante $(+1)$ o hacia atrás (-1) con igual probabilidad en cada instante de tiempo, y los pasos sucesivos son independientes. En $t = 1$

$$\mathbb{P}\left[X_1 = -1\right] = \mathbb{P}\left[X_1 = 1\right] = \frac{1}{2}.$$

Véase la Gráfica B.1.

$$\begin{tikzcd} & X_1 = 1 \\ X_0 = 0 \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & \\ & X_1 = -1 \end{tikzcd}$$

Gráfica B.1. Posición de la partícula en $t = 1$.

De manera semejante, en $t = 2$, la partícula puede estar en los posiciones $-2, 0, 2$ con probabilidades $1/4, 1/2$, y $1/4$ respectivamente (véase la Gráfica 1.2).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & X_2 = 2 \\
 & & & \overset{\frac{1}{4}}{\nearrow} & \\
 & & X_1 = 1 & & \\
 & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & & \underset{\frac{1}{4}}{\searrow} & X_2 = 0 \\
X_0 = 0 & & & & X_2 = 0 \\
 & \underset{\frac{1}{2}}{\searrow} & & \overset{\frac{1}{4}}{\nearrow} & \\
 & & X_1 = -1 & & \\
 & & & \underset{\frac{1}{4}}{\searrow} & \\
 & & & & X_2 = -2
\end{array}
$$

Gráfica B.2. Posición de la partícula en $t = 2$.

En $t = 3$, los valores para X y sus respectivas probabilidades son

x	$\mathbb{P}[X_3 = x]$
-3	$1/8$
-1	$3/8$
$+1$	$3/8$
$+3$	$1/8$

Cuadro B.1 Probabilidades de X en $t = 3$.

Se puede calcular la esperanza, la varianza, y la desviación de estándar de X_t al tiempo cero. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[X_1] &= \left(\frac{1}{2} \times (-1)\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = 0 \\
\mathrm{Var}\,[X_1] &= \mathrm{E}\,[X_1 - \mathrm{E}(X_1)]^2 = \left(\frac{1}{2} \times (-1-0)^2\right) + \left(\frac{1}{2} \times (1-0)^2\right) = 1 \\
\mathrm{DE}\,[X_1] &= \sqrt{\mathrm{Var}\,[X_1]} = 1.
\end{aligned}
$$

De la misma manera

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[X_2] &= \left(\frac{1}{4} \times (-2)\right) + \left(\frac{1}{2} \times 0\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) = 0 \\
\mathrm{Var}\,[X_2] &= \mathrm{E}\,[X_2 - \mathrm{E}(X_2)]^2 \\
&= \frac{1}{4} \times (-2-0)^2 + \frac{1}{2} \times (0-0)^2 + \frac{1}{4} \times (2-0)^2 = 2 \\
\mathrm{DE}\,[X_2] &= \sqrt{\mathrm{Var}\,[X_2]} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Usando una lógica similar, se puede calcular la esperanza, la varianza y desviación estándar de X_t, condicional a $X_0 = 0$ para cualquier $t > 0$, como se muestra en el siguiente cuadro:

	X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_n
Esperanza $\mathrm{E}_0[X_t]$	0	0	0	$\ldots$	
Varianza $\mathrm{Var}_0[X_t]$	1	2	3	$\ldots$	n
Desv. estándar $\sqrt{\mathrm{Var}_0[X_t]}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\ldots$	$\sqrt{n}$

Cuadro B.2 Esperanza, varianza y desviación estándar de X_t.

Ahora se generaliza el ejemplo anterior. Ahora la variable X puede ir un paso hacia arriba con probabilidad p o hacia abajo con probabilidad $1 - q$. El tamaño del paso es σ. Se puede calcular la esperanza, la varianza y desviación estándar de X_1. Ahora se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_1\right] &= (p-q)\sigma = \mu \\
\mathrm{E}\left[X_1^2\right] &= p\sigma^2 + q\sigma^2 = \sigma^2 \\
\mathrm{Var}\left[X_1\right] &= \mathrm{E}X_1^2 - (\mathrm{E}(X_1))^2 = 4\sigma^2 pq \\
\mathrm{DE}\left[X_1\right] &= \sqrt{\mathrm{Var}\left[X_1\right]} = 2\sigma\sqrt{pq}.
\end{aligned}$$

Sea $\mu = (p-q)\sigma$. La variable μ se denomina la tendencia de X. Se dice que X sigue una caminata aleatoria con tendencia cuando $p \neq q$, y una caminata aleatoria sin tendencia cuando $p = q = 1/2$. En general, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X_n\right] &= n(p-q)\sigma = n\mu \\
\mathrm{Var}\left[X_n\right] &= 4\sigma^2 npq \\
\mathrm{DE}\left[X_n\right] &= \sqrt{\mathrm{Var}\left[X_n\right]} = 2\sigma\sqrt{npq}.
\end{aligned}$$

Si la partícula da un paso por unidad de tiempo. entonces $n = t$, con t el número de unidades de tiempo, se observa que la media de una caminata aleatoria es proporcional al tiempo, mientras que la desviación estándar es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. El resultado anterior proviene de la independencia de los incrementos en una caminata aleatoria. En un contexto financiero, los rendimientos de una acción se modelan a menudo como una caminata aleatoria. Si $R_{t-1,t}$, representa el rendimiento de una acción entre $t-1$ y t, entonces el rendimiento en T periodos es

$$R_{0,T} = R_{0,1} + R_{1,2} + \ldots + R_{T-1,T}.$$

Los rendimientos en los períodos sucesivos se supone son independientes. Esto significa que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[R_{0,T}\right] &= \mathrm{Var}\left[R_{0,1} + R_{1,2} + \ldots + R_{T-1,T}\right] \\
&= \mathrm{Var}\left[R_{0,1}\right] + \mathrm{Var}\left[R_{1,2}\right] + \ldots + \mathrm{Var}\left[R_{T-1,T}\right].
\end{aligned}$$

Además, si el rendimiento en cada período tiene una varianza constante σ^2, entonces

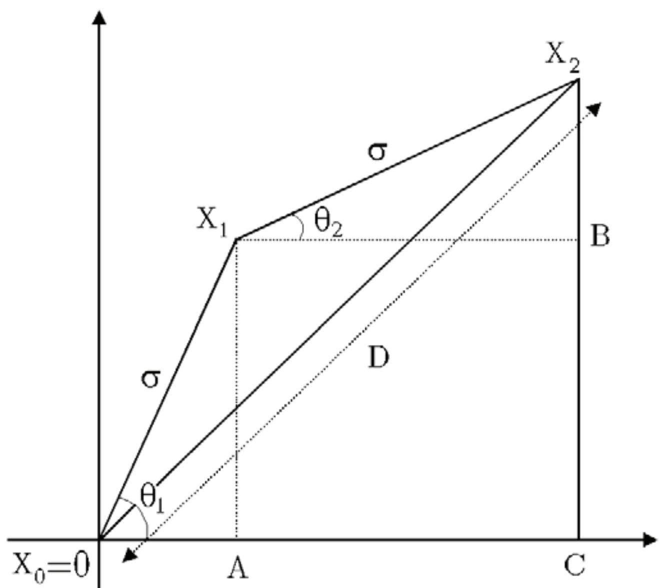
$$\mathrm{Var}\left[R_{0,T}\right] = \sigma^2 T \tag{$B.1$}$$

$$\mathrm{DE}\left[R_{0,T}\right] = \sigma\sqrt{T}. \tag{$B.2$}$$

En finanzas, la volatilidad es la desviación estándar de los rendimientos de una acción.

Ahora se presenta otro enfoque de la volatilidad y el tiempo. X sigue una caminata aleatoria bidimensional. El tamaño de paso es σ y el ángulo θ_i en el paso i es aleatorio, como se muestra en la Gráfica B.3. Después de dos pasos, la distancia D entre el punto de salida X_0 y el punto X_2 está dada por

$$D^2 = (X_0C)^2 + (X_2C)^2 \tag{B.3}$$



Gráfica B.3 Representación de una caminata aleatoria bidimensional.

pero

$$X_0C = X_0A + AC = X_0A + X_1B = \sigma\cos\theta_1 + \sigma\cos\theta_2 \tag{B.4}$$

y

$$X_2C = X_2B + BC = X_2B + X_1A = \sigma\sin\theta_2 + \sigma\sin\theta_1 \tag{B.5}$$

Sustituyendo (B.4) y (B.5) en (B.3)

$$\begin{aligned} D^2 =& \sigma^2\left[(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2\right] \\ =& \sigma^2[\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2 \\ &+ 2\left(\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2\right)]. \end{aligned}$$

Recuerde las igualdades

$$\begin{aligned} &\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1 = 1 \\ &\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$D^2 = \sigma^2\left[2 + 2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right].$$

Aplicando esperanza y ya que los términos con coseno son iguales a cero en promedio, se obtiene que

$$\mathrm{E}\left(D^2\right) = 2\sigma^2 \tag{B.7}$$

$$\mathrm{DE}(D) = \sigma\sqrt{2}. \tag{B.8}$$

B.3 Un primer vistazo al lema de Itô

Recuerde el experimento discutido en la sección anterior (véase Gráfica B.4). Es fácil verificar que si se representa el proceso para X como se muestra en la Gráfica B.5, con $\mu \equiv (p-q)\sigma$, se obtiene la misma tendencia y volatilidad para cada proceso.

$$
\begin{array}{lll}
 & & X_1 = X_0 + \sigma \\
 & \overset{p}{\nearrow} & \\
X_0 = 0 & & \\
 & \underset{q}{\searrow} & \\
 & & X_1 = X_0 - \sigma
\end{array}
$$

Gráfica B.4. Árbol binomial para X.

$$
\begin{array}{lll}
 & & X_1 = X_0 + \mu + \sigma \\
 & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & \\
X_0 & & \\
 & \underset{\frac{1}{2}}{\searrow} & \\
 & & X_1 = X_0 + \mu - \sigma
\end{array}
$$

Gráfica B.5. Árbol binomial con el proceso para X, con $\mu \equiv (p-q)\sigma$.

El segundo proceso se puede expresar como

$$X_1 = X_0 + \mu \pm \sigma$$

ó

$$\Delta X = \mu + \sigma\varepsilon$$

donde $\Delta X = X_1 - X_0$ y $\varepsilon = 1$ ó $\varepsilon = -1$ con probabilidad $1/2$ para cada resultado.

$$
\begin{array}{lll}
 & & X_{\Delta t} = X_0 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\
 & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & \\
X_0 & & \\
 & \underset{\frac{1}{2}}{\searrow} & \\
 & & X_{\Delta t} = X_0 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}
\end{array}
$$

Gráfica B.6. Árbol binomial para X dado un intervalo de tiempo Δt.

Ahora represente el árbol binomial para un cambio en X dado un intervalo de tiempo Δt (véase la Gráfica B.6). El proceso para el árbol binomial se puede escribir como

$$\Delta X = X_{\Delta t} - X_0 = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{B.9}$$

donde, como antes, la variable aleatoria ε tiene las mismas propiedades. Ahora, ¿cómo se puede expresar la variación en una función $f(X)$? Esta pregunta se resuelve con el lema de Itô[1]. Una simple expansión de Taylor de segundo orden produce el resultado mostrado en la Gráfica B.7:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & f(X_{\Delta t}) = f(X_0) + (\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})f'(X_0) + \dfrac{1}{2}(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 f''(X_0) \\
 & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & \\
f(X_0) & & \\
 & \underset{\frac{1}{2}}{\searrow} & \\
 & & f(X_{\Delta t}) = f(X_0) + (\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})f'(X_0) + \dfrac{1}{2}(\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 f''(X_0)
\end{array}
$$

Gráfica B.7. Árbol binomial con la expansion de Taylor en $f(X)$.

Para un Δt pequeño, se puede despreciar los términos en $(\Delta t)^n$ (con $n > 1$) para obtener el resultado mostrado en la Gráfica B.8:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & f(X_{\Delta t}) = f(X_0) + (\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})f'(X_0) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 f''(X_0)\Delta t \\
 & \overset{\frac{1}{2}}{\nearrow} & \\
f(X_0) & & \\
 & \underset{\frac{1}{2}}{\searrow} & \\
 & & f(X_{\Delta t}) = f(X_0) + (\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})f'(X_0) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 f''(X_0)\Delta t
\end{array}
$$

Gráfica B.8. Árbol binomial con la expansión de Taylor en $f(X)$.

Simplificando se tiene que:

$$\Delta f(X) = f(X_{\Delta t}) - f(X_0) = \left[\mu f'(X_0) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_0)\right]\Delta t + \sigma\varepsilon f'(X_0)\sqrt{\Delta t}. \qquad (B.10)$$

La ecuación (B.10) es la expresión más simple del lema de Itô.

B.4 Tiempo continuo: movimiento Browniano; más sobre el lema de Itô

Mientras más pequeño sea el intervalo de tiempo mejor el lema de Itô aproxima $\Delta f(X)$. En el proceso de partición, Δt se divide en intervalos de tiempo más y más pequeños, por consiguiente un número más y más grande de realizaciones binomiales ocurren. Se puede mostrar que este paso a tiempo continuo, la variable aleatoria ε converge a una variable aleatoria normal estándar, $\phi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sea un intervalo de tiempo infinitesimal denotado por $\mathrm{d}t$. El proceso aleatorio en tiempo continuo se puede escribir como

$$\mathrm{d}X(t) = \mu\mathrm{d}t + \sigma\phi\sqrt{\mathrm{d}t}, \quad \text{con} \quad X(0) = x_0. \qquad (B.11)$$

[1] Kiyosi Itô (1915-), matemático japonés que sentó las bases del cálculo estocástico o cálculo de Itô.

Se dice que el proceso X es conducido por un movimiento aritmético Browniano (con tendencia). La expresión anterior se escribe como

$$\mathrm{d}X(t) = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t) \qquad (B.12)$$

donde $\mathrm{d}W(t) \equiv \phi\sqrt{\mathrm{d}t}$ es un incremento de Wiener[2]. Obviamente

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{d}W] &= \mathrm{E}\left[\phi\sqrt{\mathrm{d}t}\right] = \sqrt{\mathrm{d}t}\mathrm{E}[\phi] = 0 \\ \mathrm{Var}[\mathrm{d}W] &= \mathrm{Var}\left[\phi\sqrt{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{d}t\mathrm{Var}[\phi] = \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{d}X] &= \mu \mathrm{d}t \\ \mathrm{Var}[\mathrm{d}X] &= \sigma^2 \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ejemplo B.1 Hay un 95% de probabilidad que ϕ esté en el intervalo $[-1.96, 1.96]$. Con $\mu = 2\%, \sigma = 1\%$, y $\mathrm{d}t = 1$, $\mathrm{d}X$ estará en el intervalo $[0.04\%; 3.96\%]$ con una probabilidad de 95%.

En general, se dice que una variable X sigue un proceso de Itô si

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t, X)\mathrm{d}t + \sigma(t, X)\mathrm{d}W \qquad (B.13)$$

donde $\mu(t, X)$ es la función de tendencia y $\sigma(t, X)$ es la volatilidad para un incremento en X. De interés especial en finanzas es el denominado movimiento geométrico Browniano donde $\mu(t, X) = \mu X$ y $\sigma(t, X) = \sigma X$, donde μ y σ son constantes. El proceso se puede escribir como

$$\mathrm{d}X = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W. \qquad (B.14)$$

Este proceso se usa para describir la dinámica del rendimiento de un amplio rango de activos financieros. Por ejemplo, suponga que el precio una acción es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Esto es simplemente, suponer que los rendimientos del precio de una acción siguen una distribución normal. Sea S el precio de una acción, entonces el proceso se puede escribir como

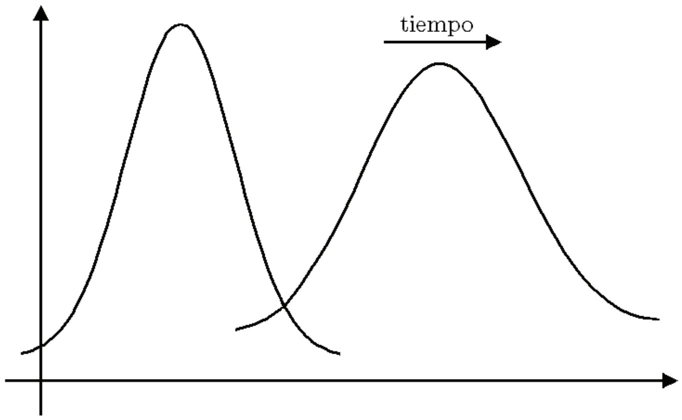
$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W \qquad (B.15)$$

donde $\mu \mathrm{d}t$ es el término de tendencia determinista y $\sigma \mathrm{d}W$ ó $\sigma\phi\sqrt{\mathrm{d}t}$, es el término estocástico. Para $\mu = 10\%$, $\mathrm{d}t = 1$ y $\sigma = 30\%$, el rendimiento de la acción $\frac{\mathrm{d}S}{S}$ es

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = 0.1 + 0.3\phi$$

donde $\phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si ϕ resulta ser igual a 1 entonces $\mathrm{d}S/S = 0.4$. Si $\phi = -0.5$, entonces $\mathrm{d}S/S = -0.05$. De esto se observa que $\mathrm{d}S/S$, se distribuye normal con media $\mu \mathrm{d}t$, varianza $\sigma^2 \mathrm{d}t$, y volatilidad $\sigma \mathrm{d}t$. Esto significa que cuando el tiempo transcurre, la función de densidad de probabilidad cambia y se aplana. Con un término de tendencia positivo, el paso del tiempo puede transformar la función de densidad de los rendimientos de las acciones, como se muestra en la Gráfica B.9.

[2] Norbert Wiener del M.I.T. formalizó la teoría del movimiento Browniano en 1923.



Gráfica B.9 Función de densidad al transcurrir el tiempo.

Para un proceso de Itô general de la forma:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu(t, X)\mathrm{d}t + \sigma(t, X)\mathrm{d}W,$$

el lema de Itô resulta ser similar a la versión primitiva de la sección anterior. Para una función $f(t, X)$ (con f al menos dos veces diferenciable en X y una vez diferenciable en t):

$$\mathrm{d}f(t, X) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X}\mu(t, X) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma^2(t, X)\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X}\sigma(t, X)\mathrm{d}W \qquad (B.16)$$

Por lo tanto, para el movimiento geométrico Browniano, el lema de Itô establece que

$$\mathrm{d}f(t, X) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X}\mu X + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma^2 X^2\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X}\sigma\mathrm{d}W. \qquad (B.17)$$

Ejemplo B.2 El proceso del precio de una acción S es conducido por

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W$$

¿Cuál será el proceso seguido por $\mathrm{d}(\ln S)$? Sea $f(t, S) = \ln S$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$$

Aplicando el lema de Itô para un movimiento geométrico Browniano, se obtiene que

$$\mathrm{d}(\ln S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W. \qquad (B.18)$$

Esto permite obtener una expresión explícita para la dinámica del precio de una acción. Integrando de 0 y T la ecuación anterior

$$\int_0^T \mathrm{d}(\ln S)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^T \mathrm{d}t + \sigma\int_0^T \mathrm{d}W$$

resulta que:

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma\,(W(T) - W(0)) \qquad (B.19)$$

Aplicando exponenciales de ambos lados y notando que $W(0) = 0$, se obtiene una expresión de S_T como una función de S_0:

$$\begin{aligned} S_T &= S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W(T)\right] \\ &= S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}\right]. \end{aligned} \qquad (B.20)$$

De esta manera, se ha mostrado que:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W \Rightarrow S_T = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W(T)\right] \qquad (B.21)$$

Es tentador tratar de resolver el lado izquierdo de la ecuación $(B.21)$ al observar que $\mathrm{d}S/S = \mathrm{d}\ln S$, resultando en la respuesta incorrecta $S_T = S_0 \exp(\mu t + \sigma W)$. Sin embargo, debido a que S es estocástica, $\mathrm{d}S/S$ no es igual a $\mathrm{d}\ln S$, por lo que es necesario usar el lema de Itô para corregir este error. El lema de Itô establece que $\mathrm{d}\ln S = (\mu - 1/2\sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W$. Debido a que es "lineal" en los derivadas, se puede integrar como en cálculo de variable real y obtener la respuesta correcta.

Ejemplo B.3 Función potencia. Una variable X sigue un movimiento geométrico Browniano

$$\mathrm{d}X = \mu X\,\mathrm{d}t + \sigma X\,\mathrm{d}W$$

¿Cuál es el proceso seguido por la variable $Y = X^n$? En este caso las derivadas son:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = nX^{n-1}; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} = n(n-1)X^{n-2}$$

en virtud de (B.17) el proceso seguido por Y es

$$\frac{\mathrm{d}Y}{Y} = \left(n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2\right)\mathrm{d}t + n\sigma\mathrm{d}W. \qquad (B.22)$$

Ejemplo B.4 Contratos a plazo. Se sabe que el precio *forward* F al tiempo t de un activo que no paga dividendos con precio X a ser entregado al tiempo $T \geq t$ es

$$F = X e^{r(T-t)}.$$

Suponga que X sigue un movimiento geométrico Browniano y

$$\frac{\partial F}{\partial X} = e^{-r(T-t)}; \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rX e^{-r(T-t)}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = 0$$

por lo tanto, la dinámica para F es:

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W. \qquad (B.23)$$

B.5 Lema de Itô de dos variables

Suponga que los precios de los activos X e Y son conducidos por dos movimientos geométricos Brownianos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X}{X} &= \mu_X \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X \\ \frac{\mathrm{d}Y}{Y} &= \mu_Y \mathrm{d}t + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\end{aligned} \tag{B.24}$$

Cada rendimiento del activo es caracterizado por su propio término de tendencia μ y de volatilidad σ. También note que el proceso de Wiener no es el mismo en cada ecuación. Si $\mathrm{d}W_X = \mathrm{d}W_Y$, entonces ambos rendimientos estarían perfectamente correlacionados. Esto es porque $\mathrm{d}X/X$ sería una función determinista de $\mathrm{d}Y/Y$:

$$\frac{\mathrm{d}X}{X} = \left(\mu_X - \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y\right)\mathrm{d}t + \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\frac{\mathrm{d}Y}{Y}$$

Generalmente los rendimientos de los activos no están perfectamente correlacionados (es decir, $\mathrm{d}W_X \neq \mathrm{d}W_Y$). Si $\mathrm{d}W_X = \phi_X\sqrt{\mathrm{d}t}$ y $\mathrm{d}W_Y = \phi_Y\sqrt{\mathrm{d}t}$, con $\phi_X, \phi_Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_X\mathrm{d}W_Y] = \mathrm{E}[\phi_X\phi_Y]\mathrm{d}t = \rho\mathrm{d}t$, donde, por definición, $\rho \equiv \mathrm{E}[\phi_X\phi_Y]$ y $-1 \leq \rho \leq 1$.

El lema de Itô para los procesos en (B.24) está dado por

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}f(t,X,Y)\\ =&[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X}\mu_X X + \frac{\partial f}{\partial Y}\mu_Y Y + \frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y}\sigma_X\sigma_Y\rho XY + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma^2X^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\sigma^2Y^2]\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X}\sigma_X X\mathrm{d}W_X + \frac{\partial f}{\partial Y}\sigma_Y Y\mathrm{d}W_Y\end{aligned} \tag{B.25}$$

El resultado anterior se puede obtener aplicando el teorema de Taylor a una función de tres variables.

Ejemplo B.5 Sean

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X}{X} &= \mu_X \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X \\ \frac{\mathrm{d}Y}{Y} &= \mu_Y \mathrm{d}t + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\end{aligned}$$

La correlación entre ambos rendimientos es ρ. ¿Cuál es el proceso seguido por el cociente $f(X,Y) = X/Y$?. Al calcular las derivadas indicadas en (B.25) se obtiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{Y};\ \frac{\partial f}{\partial Y} = -\frac{X}{Y^2};\ \frac{\partial f}{\partial t} = 0;\\ \frac{\partial^2 f}{\partial X\partial Y} = -\frac{1}{Y^2};\ \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} = \frac{2X}{Y^3}\end{aligned}$$

Después de sustituir y simplificar resulta que

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \left(\mu_X - \mu_Y - \rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2\right)\mathrm{d}t + \sigma_X\mathrm{d}W_X - \sigma_Y\mathrm{d}W_Y. \tag{B.26}$$

Observe también que si se define

$$\mathrm{d}W_f \equiv \frac{\sigma_X\mathrm{d}W_X - \sigma_Y\mathrm{d}W_Y}{\sigma_f}$$

con $\sigma_f \equiv \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y}$, entonces

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{d}W_f\right) = \frac{\sigma_X}{\sigma_f}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_X\right] - \frac{\sigma_Y}{\sigma_f}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}W_Y\right] = 0 \tag{B.27}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(\mathrm{d}W_f\right) &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_f^2}\mathrm{Var}(\mathrm{d}W_X) + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_f^2}\mathrm{Var}(\mathrm{d}W_Y) - \frac{2\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_f^2}\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_X, \mathrm{d}W_y) \\
&= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_f^2}\mathrm{d}t + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_f^2}\mathrm{d}t - \frac{2\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_f^2}\rho\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sigma_f^2}\left(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\rho\sigma_X\sigma_Y\right)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{B.28}$$

por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mu_f\mathrm{d}t + \sigma_f\mathrm{d}W_f \tag{B.29}$$

con $\mu_f = \mu_X - \mu_Y - \rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y^2$.

B.6 La paradoja de Siegel

Para motivar la discusión de la paradoja de Siegel considere el siguiente ejemplo. Suponga que el tipo de cambio €/$ hoy igual a 1. Por simplicidad, suponga también que el euro valdrá $1.25 ó $0.80 dentro de un año, con igual probabilidad para cada resultado. Esto significa que la esperanza del valor del euro es $(0.5 × 1.25) + (0.5 × 0.80) = $1.025. Sin embargo, un planteamiento equivalente del problema es que el dólar dentro de un año tendrá un valor de C =0.80 ó €1.25 con igual probabilidad para cada resultado. De acuerdo a lo anterior, se enfrenta con la situación paradójica en la que espera que un euro valdrá $1.025 y que un dólar valdrá C =1.025 dentro de un año.

Para plantear el ejemplo como un proceso en tiempo continuo, suponga que el tipo de cambio €/$, denotado por η, es conducido un movimiento geométrico Browniano

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W$$

Entonces, el tipo de cambio $/€, es $f(\eta) = 1/\eta$. Para escribir el proceso para $f(\eta)$, primero calcule las derivadas

$$f_\eta = -\frac{1}{\eta^2}; \quad f_{\eta\eta} = \frac{2}{\eta^3}; \quad f_t = 0$$

una simple aplicación del lema de Itô da como resultado

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \left[-\frac{1}{\eta^2}\mu\eta + 0 + \frac{1}{2}\frac{2}{\eta^3}\sigma^2\eta^2\right] - \frac{1}{\eta^2}\sigma\eta\mathrm{d}W$$

por lo tanto:

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \left(\sigma^2 - \mu\right)\mathrm{d}t - \sigma\mathrm{d}W \tag{B.30}$$

Si la esperanza del tipo de cambio y su inversa sean iguales como en el ejemplo anterior, se debe cumplir que $\mathrm{E}\left[\mathrm{d}\eta/\eta\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{d}f/f\right]$. Debido a que la esperanza de $\mathrm{d}W$ es cero, se tiene

$\mathrm{E}\,[\mathrm{d}\eta/\eta] = \mu \mathrm{d}t$ y $\mathrm{E}\,[\mathrm{d}f/f] = (\sigma^2 - \mu)\mathrm{d}t$. Un "trader" puede asignar al tipo de cambio €/\$ y al tipo de cambio \$/€ el mismo valor esperado si $\sigma^2 = 2\mu$.

Ahora se discutirán dos implicaciones de la paradoja de Siegel:

1. De acuerdo con los resultados, una conclusión es que los inversionistas tienen que mantener parte de su exposición no cubierta. Si un estadounidense posee 1€, entonces se espera que el euro tenga un valor de \$1.025. Paralelamente, un europeo que posea \$1 puede esperar que tenga un valor de €1.025. Parece que hay ganancias para ambos inversionistas si mantienen sus posiciones (al menos en parte) no cubiertas.

2. Los tipos de cambio *forward* no pueden ser pronósticos insesgados de los tipos de cambio *spot* futuros. Para ser un pronóstico insesgado, el tipo de cambio *forward* €/\$ al tiempo t, $F(T)$ tiene que ser por definición, el valor esperado del tipo de cambio €/\$ en $t+1$. Así que $F[t] = \mathrm{E}[\eta_{t+1}]$. Si los *forward*s fueran pronósticos insesgados de los precios *spot* futuros, entonces esto también debe ser aplicable al tipo de cambio \$/€: $1/F(t) = \mathrm{E}\,[1/\eta_{t+1}]$. Pero esto nunca puede ocurrir en un mundo con incertidumbre. Este resultado matemático queda expresado como:
$$\frac{1}{\mathrm{E}\,[\eta_{t+1}]} \geq \mathrm{E}\left[\frac{1}{\eta_{t+1}}\right] \tag{B.31}$$
este resultado es conocido como la desigualdad de Jensen. En un contexto financiero, afirma que las operaciones con *forward* de tipo de cambio pueden ser "rentables" en promedio.

B.7 Bibliografía

Baz, J. and Chacko G. (2004). Financial derivatives: Pricing, Applications, and Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus Models for Finance*. Springer-Verlag. (La versión tipo borrador está disponible en `http://www.math.cmu.edu/people/fac/shreve.html`)

Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. ed., International Thomson Editors, México.

Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge University Press.

Apéndice C

Modelo binomial de Cox, Ross y Rubinstein

C.1 Introducción

En este apéndice se presenta el modelo binomial para la valuación de una opción sobre una acción de Cox, Ross y Rubinstein publicado en el artículo "Option Pricing: A Simplified Approach" en el *Journal of Financial Economics* en 1979. En este modelo las ramas del árbol representan las posibles trayectorias que puede tomar el activo subyacente durante la vida de la opción. Es importante destacar que el supuesto esencial sobre el cual descansa este modelo es que no existen oportunidades de arbitraje que sean libres de riesgo. Es decir, si hay dos alternativas de inversión libres de riesgo, entonces ambas producen exactamente el mismo rendimiento.

C.2 El modelo binomial de un periodo

En esta sección se estudia el modelo binomial en su exposición más simple, la cual comprende un periodo con un árbol de dos ramas. El modelo proporciona una fórmula de valuación teórica de una opción europea de compra sobre un título de capital que no paga dividendos. En la propuesta de CRR, se construye un portafolio que comprende al subyacente y a la opción y que al final del periodo de inversión proporciona el mismo rendimiento en todas las posibles trayectorias que puede tomar el activo subyacente.

Considere un portafolio que incorpora w_1 unidades de una acción y w_2 unidades de una opción sobre dicha acción. Se supone que la vida de la opción comprende el intervalo de tiempo $[t, T]$, donde t es el momento en que inicia el contrato y T es la fecha en que vence. El valor del portafolio, Π_t, al inicio del periodo está dado por:

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 c_t, \tag{$C.1$}$$

donde S_t y c_t son el precio de la acción y el precio de la opción, en t, respectivamente. Asimismo, se supone que en T, el activo subyacente puede tomar dos posibles valores, uS_t y dS_t, donde $0 < d < 1 < u$. Esta situación se ilustra en el árbol de la Gráfica C.1. Posteriormente, se introducirá una distribución de probabilidad asociada a dichos movimientos.

$$\begin{array}{ccc} & & uS_t \\ & \nearrow & \\ S_t & & \\ & \searrow & \\ & & dS_t \end{array}$$

Gráfica C.1 Árbol binomial del precio del activo subyacente.

Así pues, si el precio del activo tiene un movimiento hacia arriba en T, entonces se presenta el valor uS_t y si el precio tiene un movimiento hacia abajo en T, entonces se presenta el valor dS_t. En el primer caso, el valor del portafolio en T, está dado por:

$$\Pi_T^{(u)} = w_1 uS_t + w_2 c_u,$$

donde

$$c_u = \max(uS_t - K, 0).$$

La cantidad c_u es el valor intrínseco de la opción dado un movimiento hacia arriba y K es el precio de ejercicio de la opción. Por otro lado, si se presenta un movimiento hacia abajo, el valor del portafolio en T, está dado por:

$$\Pi_T^{(d)} = w_1 dS_t + w_2 c_d,$$

donde

$$c_d = \max(dS_t - K, 0).$$

Los cambios en precios y en el valor del portafolio se pueden ilustrar en el árbol de la Gráfica C.2.

$$\begin{array}{ccc} & & \left(uS_t, c_u, \Pi_T^{(u)}\right) \\ & \nearrow & \\ (S_t, c_t, \Pi_t) & & \\ & \searrow & \\ & & \left(dS_t, c_d, \Pi_T^{(d)}\right) \end{array}$$

Gráfica C.2 Árbol binomial del precio del activo subyacente,
del precio de la opción y del valor portafolio.

C.3 Valuación neutral al riesgo

Se supone ahora que existe un sistema bancario en donde los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés continuamente capitalizable, constante para todos los plazos y libre de riesgo crédito, r. A continuación se obtienen w_1 y w_2 de tal manera que el portafolio proporcione el mismo rendimiento en las dos posibles trayectorias del activo subyacente. Además, este rendimiento debe coincidir con el que se obtendría de un depósito inicial de monto Π_t, es decir,

$$\Pi_T^{(u)} = \Pi_t e^{r(T-t)} \tag{$C.2$}$$

y

$$\Pi_T^{(d)} = \Pi_t e^{r(T-t)}. \tag{$C.3$}$$

De primera instancia, el lector podría pensar que si el subyacente puede tomar en T un valor estrictamente mayor y un valor estrictamente menor que el actual, los valores de estos portafolios en T no tienen por qué coincidir. Lo asombroso aquí es que es posible elegir w_1 y w_2 de tal forma que $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. De hecho, existen infinitas formas de elegir w_1 y w_2 con dicha propiedad. En efecto, al igualar (C.2) con (C.3), se tiene que

$$w_1 uS_t + w_2 c_u = w_1 dS_t + w_2 c_d.$$

En este caso, hay una sola ecuación y dos variables por determinar, a saber w_1 y w_2, lo cual conduce a un número infinito de soluciones. Una solución posible se obtiene al fijar $w_2 = 1$, en cuyo caso

$$w_1 \equiv -\Delta = -\frac{c_u - c_d}{S_t(u-d)}. \qquad (C.4)$$

Es decir, el portafolio consiste de un call largo y una operación de venta en corto de Δ unidades de la acción. Esta selección de w_1 y w_2 hace que $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. Por supuesto, cualquier múltiplo de (w_1, w_2) proporciona el mismo resultado, $\Pi_T^{(u)} = \Pi_T^{(d)}$. Considere de nuevo el valor del portafolio en la expresión (C.1) con $w_2 = 1$ y $w_1 = -\Delta$, en virtud de (C.3), se sigue que

$$\left[-\left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u-d)}\right) dS_t + c_d\right] e^{-r(T-t)} = -\left(\frac{c_u - c_d}{S_t(u-d)}\right) S_t + c_t,$$

lo cual conduce, a su vez, a

$$c_t = \left[\left(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}\right) c_u + \left(\frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d}\right) c_d\right] e^{-r(T-t)}. \qquad (C.5)$$

Si se denota

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}, \qquad (C.6)$$

se obtiene

$$1 - p = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d}. \qquad (C.7)$$

Observe también que en virtud de que $u > d$,

$$1 - p = \frac{u - e^{r(T-t)}}{u-d} > \frac{d - e^{r(T-t)}}{u-d} = -p. \qquad (C.8)$$

Así pues, con base en (C.6) y (C.7), la ecuación (C.5) se transforma en

$$c_t = (pc_u + (1-p)c_d)\, e^{-r(T-t)}. \qquad (C.9)$$

Claramente, p siempre es positivo. Sin embargo, puede darse el caso de que $p > 1$, dependiendo de los valores de u, d, r y $T - t$, en cuyo caso $1 - p < 0$. Las cantidades p y $1 - p$ reciben frecuentemente el nombre de precios de estado y, por razones obvias, no siempre pueden ser vistas como probabilidades. Si se pide que se satisfaga la condición

$$d < e^{r(T-t)} < u,$$

entonces $0 < q < 1$. Note que d, u y $r(T-t)$ son variables que no están relacionadas entre sí, razón por la cual siempre es posible escogerlas de tal forma que se cumpla que $d < e^{r(T-t)} < u$. En este caso, q y $1 - q$ pueden interpretarse en forma natural como probabilidades. Si se define a S_T como una variable aleatoria, junto con su probabilidad, $\mathbb{P}$, de tal manera que

$$\mathbb{P}\{S_T = uS_t\} = q \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}\{S_T = dS_t\} = 1 - q,$$

el valor esperado del valor intrínseco de la opción, en T, está dado por

$$\mathrm{E}[\max(S_T - K, 0)\,|S_t\,] = \mathbb{P}\{S_T = uS_t\}\, c_u + \mathbb{P}\{S_T = dS_t\}\, c_d = qc_u + (1-q)c_d$$

y su valor presente es justamente el precio de la opción c_t.

El modelo binomial se puede extender a dos periodos, cada uno de longitud $(T-t)/2$. Se supone que el contrato de opción inicia su vigencia en t. En este caso las posibles trayectorias de los precios del activo subyacente se ilustran en la Gráfica C.4.

$$
\begin{tikzcd}
 & & u^2S_t \\
 & uS_t \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
S_t \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & & udS_t \\
 & dS_t \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & & d^2S_t
\end{tikzcd}
$$

Gráfica C.4 Expansión del árbol binomial a dos periodos.

Si se repite el análisis hecho en la secciones C.2 y C.3, del presente apéndice, para las ramas del segundo periodo, se tiene a partir de (C.9) que para la rama superior se cumple

$$c_u = (pc_{uu} + (1-p)c_{du})\, e^{-r(T-t)/2}, \tag{C.10}$$

mientras que para la rama inferior

$$c_d = (pc_{du} + (1-p)c_{dd})\, e^{-r(T-t)/2}. \tag{C.11}$$

En la Gráfica C.5 se ilustra la rama superior del segundo periodo. Esta rama es una réplica de la rama del primer periodo, excepto que aparece una u de más en todos los nodos, ya sea como subíndice o como variable. En tal caso, se aplica completamente la metodología utilizada en la rama del primer periodo.

$$
\begin{tikzcd}
 & \left(u^2S_t, c_{uu}\right) \\
(uS_t, c_u) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (duS_t, c_{du})
\end{tikzcd}
$$

Gráfica C.5 Rama superior del segundo periodo.

Si se sustituyen (C.10) y (C.11) en (C.9), se obtiene que

$$c_t^{(2)} = \left[p^2 c_{uu} + 2p(1-p)c_{du} + (1-p)^2 c_{dd}\right] e^{-r(T-t)}. \tag{C.12}$$

Por último, observe que el análisis efectuado se puede extender a n periodos de tal forma que el precio de la opción en t está dado por:

$$c_t^{(n)} = e^{-r(T-t)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \max(u^k d^{n-k} S_t - K, 0).$$

C.4 Bibliografía

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.

Bibliografía

BANOBRAS; Notas Técnicas; Certificados Bursátiles de Indemnización Carretera Segregables (CBICS).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija (BONOS).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BONDES182).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Bonos de Protección al Ahorro con pago semestral de interés y protección contra la inflación (BPA182).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Bonos de Protección al Ahorro con pago trimestral de interés (BPAT).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Bonos de Protección al Ahorro (BPA's).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Bonos de Regulación Monetaria (BREMS).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

Banxico; Notas Técnicas del Banco de México; Los Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (UDIBONOS).

Baz, J. & Chacko G. (2004). Financial derivatives: Pricing, Applications, and Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Black, F. and M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Black, F. (1976). The Pricing of Commodity Contracts, *The Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 167-179.

Brenner, M. and M. G. Subrahmanyam (1998). "A Simple Approach to Option Valuation and Hedging in the Black-Scholes Model". *Financial Analysts Journal*, Vol. 50, No. 2, pp. 25-28.

Brezinski, C. (2000). Interpolation and Extrapolation , Elsevier 1st. ed., New York.

Burden, R. L. & Faires, J. D. (2004). Numerical Analysis, , Brooks-Cole Publishing, 8th. ed.

Butler, C. (1999). Mastering Value at Risk: A step by step guide to understanding and applying VaR; Prentice Hall; USA.

Chen, N.F, and Ingersoll, E., Exact pricing in linear factor models with finitely many assets: A note, *Journal of Finance* June 1983.

Choudhry, M. (2004). Corporate bonds and structured financial products, Elsevier Butterworth –Heinemann, Oxford; UK.

Collin, A. (2005). Fixed income attribution, John Wiley & Sons Ltd., England.

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 3, pp. 229-263.

Cruz, M. G. (2002). Modeling, Measuring and Hedging Operational Risk. John Wiley & Sons.

Das, S. (2000). Credit derivatives and credit linked notes, John Wiley and Sons, Singapore.

Duffie, D. and J. Pan. (1997). An Overview of Value at Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 4, No. 3, pp. 7-49.

Fabozzi, F. J. (2006). Fixed income mathematics, McGraw-Hill, New York, 4th. ed.

Fabozzi, F. J. (2002). Interest rate, term structure and valuation modeling, Wiley Finance, Hoboken, New Jersey.

Fabozzi, F. J. (1996). Measuring and controlling interest rate risk, Frank J. Fabozzi associates, New Hope, Pennsylvania.

Fabozzi, F. J. (2006). Handbook of Structured Financial Products; Frank J. Fabozzi Editors, NY, USA; 1st. ed.

Hayashi, F. (2000). Econometrics; Princeton University Press.

Hull, J. C. and A. White (1990). "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities". *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, pp. 573-592.

Hull, J. C. and A. White (2000). "Valuing Credit Default *swap*s I: No Counterparty Default Risk". *Journal of Derivatives*, Vol. 8, No. 1, pp. 29-40.

Hull, J. C. (2005). Options, Futures and Other Derivatives. 6th ed. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall.

Jamshidian, F. (1973). An Exact Bond Option Pricing Formula , *The Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 205-220.

Jarrow, R. A. and Rudd A. (1983). Option Pricing. 1st ed., Richard D. Irwin, Inc., Homewood, Illinois.

Jorion, P. (2006). Value at Risk: The new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill, NY, USA, 3rd Ed.

Karris, S. T. (2007). Numerical analysis using Matlab© and excel© ; Orchard Publications, 3rd. Ed.

Kellison, S. (1991). The Theory of Interest. 2nd. ed., Irwin, Homewood, Il.

Kitter, G. (1999). Investment mathematics for finance & treasury professionals: a practical approach, The Wiley Treasuries Management Association Series, New York, U. S.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets, *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), 13-37.

Lyuu, Yuh-Dauh (2002). Financial Engineering and computation, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

Macaulay, F. R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond *yield*, and Stock Prices in the United States since 1856. Columbia University Press. New York.

Manual de Metodologías de Valmer (2007). Valuación Operativa y Referencias de Mercado, S. A. de C. V.

Markowitz, H. M. (1952); Portfolio Selection; *Journal of Finance*, Vol. 7, No. 1, pp. 77-91.

McCann, K., and Cilia J. (1994). Structured Notes. Federal Reserve Bank of Chicago, Financial Markets Unit (Supervision and Regulation), manuscript.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Mina, J. & Xiao, Jerry Yi (2001). Return to RiskMetrics: The evolution of a Standard; RiskMetrics Group.

Nelson, C. R. and A. F. Siegel (1987). "Parsimonious Modeling of *yield* Curves". *The Journal of Business*, Vol. 60, No. 4, pp. 473-489.

Palacios Paz, Ana Bertha, Modelos de Riesgo de Crédito. Tesis de Licenciatura, UNAM, México, 2002.

Phillips, G. M. (2003). Interpolation and approximation by polynomials, Springer-Verlag, New York.

Reiss, R. D. & Thomas, M. (2000). Statistical Analysis of Extreme Values, Birkhäuser; Germany.

Ross, S. M. (2006). A First Course in probability, Prentice Hall, N.J., USA; 7th ed.

Ross, S. A., The arbitrage theory of capital asset pricing, *Journal of Economic Theory*, v13, issue 3, 1976.

Rubinstein, M., and E. Reiner (1991). Breaking down the barriers, *Risk* , Vol. 4, pp. 28-35.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 425-442.

Teall, J. L. & Iftekhar H. (2002). Quantitative methods for finance and investments, Blackwell Publishers, U. K.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk, The Review of Economic Studies, Vol. 25, pp. 65-86.

Venegas Martínez, Francisco (2006). Riesgos financieros y económicos (productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre). 1a. ed., International Thomson Editors, México.

Wilmott, P. (1998). Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering). John Wiley & Sons, England.

Wilmott, P., S. Howison, and J. Dewynne (1995). The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction. Cambridge University Press.

Zellner, A. (1971). An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York: Wiley.

Zumbach, G. (2006); The RiskMetrics 2006 methodology; RiskMetrics Group.

Índice por autor

Índice por tema