Modelado de Fenómenos Económicos y Financieros:

Una visión contemporánea

En este magistral trabajo editorial están los destacados trabajos de los académicos: Guillermo Romero Meléndez, Oscar Márquez Domínguez, Guillermo Sierra Juárez, Mauricio Ramírez Grajeda, Lucia Atzimba Ruiz Galindo, Araceli Hernández Jiménez, Elena Moreno García, Arturo García Santillán, Salvador Cruz Aké, Juan César Cabrera Avellaneda, ***Julio Téllez Pérez, Ricardo Cristhian Morales Pelagio, Arquímides*** Pérez Herrera***, Francisco López Herrera, Milka Elena Escalera Chávez, Carlos Trejo Pech, Emilio Zevallos Vallejos, Vicente Germán Soto, Edgar David Gaytán Alfaro, Francisco Javier Benita Maldonado, Francisco Álvarez Echeverría, Víctor M. Cuevas Ahumada, Antonio Ruíz Porras, Javier Emmanuel Anguiano Pita, Semei Coronado Ramírez, Omar Rojas, Fabián D. Martínez, Georgina Alenka Guzmán Chávez, Joaquín Delgado Fernández, María de los*** Ángeles ***Silva-Correa, José Luís Martínez Marca, Gloria Esteban de la Rosa, Benjamín Vallejo-Jiménez, Yazmín Viridiana Soriano-Morales, John F. Moreno T., Christian Bucio, Edgar Ortiz, Alejandra Cabello, Gabriel Alberto Agudelo Torres, Luis Ceferino Franco Arbeláez, Luis Eduardo Franco Ceballos, Carlos Cuevas Covarrubias, Jorge Íñigo Martínez, Jiménez Padilla Raquel, Gilberto Pérez Lechuga, Ali Aali Bujari, Héctor Alonso Olivares Aguayo, Ambrosio Ortiz Ramírez, Laura Gabriela Zuñiga Feria, Begoña Torre Olmo, Pablo Mejía-Reyes, Virginia N. Del Campo-Sánchez, Adrián Hernández del Valle, Claudia I. Martínez García, Humberto Ríos Bolívar, Daniel Cerecedo Hernández, Eusebio Ortiz Zarco, Fernando Evaristo Callejas Albiñana, Oscar Valdemar De la Torre Torres, Domingo Rodríguez-Benavides, Miguel Ángel Martínez-García, José César Lenin Navarro Chávez, Plinio Hernández Barriga, Alejandro López Huacuz, Eduardo Macario Moctezuma-Navarro, Zoraida Blancas-Olvera, Araceli Flores-Eslava, M. Salem Mohamed- Embarek-Sidi, Nora Gavira Durón, Julio Irving Aguilar Galindo y César López Martínez.***

ISBN:978-607-9682-6-8
9 786079 682668

Dra Claudia Estrella Castillo Ramírez
Universidad de las Américas Puebla
Dr. Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
Dr. Francisco López Herrera
Universidad Autónoma de México

Modelado de Fenómenos Económicos y Financieros:
Una visión conteporánea

Modelado de Fenómenos Económicos y Financieros:

Una visión contemporánea

Dra. Claudia Estrella Castillo Ramírez
Universidad de las Américas Puebla
Dr. Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
Dr. Francisco López Herrera
Universidad Nacional Autónoma de México

Modelado de Fenómenos Económicos y Financieros

Una Visión Contemporánea

Modelado de Fenómenos Económicos y Financieros

Una Visión Contemporánea

Dra Claudia Estrella Castillo Ramírez
Universidad de las Américas Puebla
Dr. Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional
Dr. Francisco López Herrera
Universidad Nacional Autónoma de México

CASTDEL EDITORIAL

Modelado de Fenómenos económicos y Financieros
Una Visión Contemporánea

Primera edición, 2017.

ISBN : 978-607-96826-6-8

DR © Editorial Castdel, S.A. de C.V

Sullana No. 693 Col. Lindavista CDMX

Del. Gustavo A Madero. CP. 07300

Queda prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio electrónico, tradicional o fotomecánico.

Impreso y hecho en México

Índice

I Estudio de la estructura fractal de la distribución de la riqueza en México.
Guillermo Romero Meléndez (UDLAP) y Oscar Márquez Domínguez (UDLAP)……9

II Estimación del precio de una opción europea fuera de equilibrio.
Guillermo Sierra Juárez (UDG) y Mauricio Ramírez Grajeda (UDG)……25

III Raíces unitarias estacionales.
Lucia Atzimba Ruiz Galindo (UAM-A)……43

IV Efectividad de las opciones installments como instrumentos de cobertura ante el riesgo cambiario.
Francisco Venegas Martínez (IPN), Araceli Hernández Jiménez (UCC), Elena Moreno García (UCC) y Arturo García Santillán (UCC)……59

V Flight to quality, como canal de transmisión de volatilidad entre el S&P500, el tipo de cambio usd/gbp, y el mercado del oro.
Salvador Cruz Aké (IPN), Juan César Cabrera Avellaneda (IPN) y Claudia Estrella Castillo Ramírez……83

VI ¿Las empresas que cotizan en la bolsa mexicana de valores generan valor a sus accionistas?
Julio Téllez Pérez (Universidad Anáhuac-Norte)……107

VII Modelo para determinar calificaciones de riesgo sectorial ajustadas con criterios macroprudenciales.
Ricardo Cristhian Morales Pelagio (UNAM), Arquímides Pérez Herrera (UNAM) y Francisco López Herrera (UNAM)……133

VIII Acciones para generar valor económico agregado en pequeñas empresas.
Milka Elena Escalera Chávez (UASLP) y Carlos Trejo Pech (UP-Guadalajara)……175

IX El proceso del desarrollo emprendedor: el paso de la informalidad a la formalidad.
Emilio Zevallos Vallejos (ULACIT-Costa-Rica)……191

X Profundización financiera y crecimiento económico de los estados mexicanos: un análisis de cointegración en paneles no estacionarios
Vicente Germán Soto (UADEC)……227

XI Estructuras de competencia: determinación de equilibrios de mercado en un contexto fiscal y de aprovechamiento de recursos no renovables.
Edgar David Gaytán Alfaro (UAZ) y Francisco Javier Benita Maldonado (ITESM)……253

XII Opciones reales y la valuación del cambio tecnológico: un estudio de caso del sector energético mexicano.
Francisco Álvarez Echeverría (UFG-El Salvador)……269

XIII Sources of Inflation and Output Fluctuations in the Mexican Economy: A Structural VAR Approach
Víctor M. Cuevas Ahumada (UAM-A)……307

XIV Modelación GARCH multivariada de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios, un estudio para México, Canadá y Estados Unidos.
Antonio Ruíz Porras (UDG) y Javier Emmanuel Anguiano Pita (UDG)……331

XV A Study of Co-Movements between Oil Price, Stock Index and Exchange Rate under a Cross-Bicorrelation Perspective: The Case of Mexico.
Semei Coronado Ramírez (UDG) and Omar Rojas (UP)……359

XVI Technological Catching Up across Countries in Bio-Pharmaceutical Field: A Volterra Integro-Differential Equations Application, 1980-2010.
Fabián D. Martínez (UAM-I), Georgina Alenka Guzmán Chávez (UAM-I) y Joaquín Delgado Fernández (UAM-I)……373

XVII El mercado de derivados y su impacto en la política monetaria: un modelo de volatilidad estocástica.
Maria de los Angeles Silva-Correa (UNAM), José Luís Martínez Marca (UNAM) y Francisco Venegas-Martínez (IPN)……405

XVIII El "Insider Trading" desde la perspectiva del Derecho internacional privado (español y europeo).
Gloria Esteban de la Rosa (UJAEN-España)……431

XIX Optimal Consumption and Portfolio Decisions when the Risky Asset is Driven by a Time-Inhomogeneous Markov Modulated: CRRA Utility.
Benjamín Vallejo-Jiménez (ESE-IPN), Yazmín Viridiana Soriano-Morales (ESE-IPN) y Claudia Estrella Castillo Ramírez (UDLAP)……463

XX Reconsiderando el criterio de optimalidad de Kelly (1956): selección de portafolios y consideración de altos momentos.
John F.Moreno T. (Universidad Externado-Colombia).....473

XXI Consumption, Leisure and Real Balances Optimal Decisions: A Rational Consumer Approach.
Yazmín Viridiana Soriano-Morales (IPN), Benjamín Vallejo Jiménez (IPN) y Francisco Venegas-Martínez (IPN)……489

XXII Valor en Riesgo de los mercados de capitales de México y Estados Unidos: análisis con diferentes metodologías y temporalidades.
Christian Bucio (UNAM), Edgar Ortiz (UNAM) y Alejandra Cabello (UNAM)……..501

XXIII Estimación de múltiples tasas de interés técnico para una renta vitalicia mediante un modelo de riesgo de crédito.
Gabriel Alberto Agudelo Torres (ITM-Colombia), Luis Ceferino Franco Arbeláez (ITM-Colombia) y Luis Eduardo Franco Ceballos (ITM-Colombia)……..525

XXIV Modelado de Rendimientos Financieros mediante Mixturas Gaussianas Una reflexión sobre el supuesto de normalidad en finanzas.
Carlos Cuevas Covarrubias (Universidad Anáhuac), Jorge Íñigo Martínez (Universidad Anáhuac) y Jiménez Padilla Raquel (Universidad Anáhuac)……535

XXV Aspectos económicos de la planeación de la producción en líneas de manufactura bajo condiciones de incertidumbre.
Gilberto Pérez Lechuga (UAEH), Ali Aali Bujari (UAEH) y Francisco Venegas-Martínez (IPN)……561

XXVI Estrategia cuna mediante opciones europeas de compra y venta en escenarios Monte Carlo con expectativas de alta volatilidad.
Héctor Alonso Olivares Aguayo (IPN), Ambrosio Ortiz Ramírez (IPN) y Christian Bucio Pacheco (UNAM)……581

XXVII Una medida clásica de performance para los fondos de renta variable en México, frente a diferentes representaciones del mercado de capitales.
Laura Gabriela Zuñiga Feria (Universidad Anáhuac) y Begoña Torre Olmo (Universidad de Cantabria)……609

XXVIII Effects of the great recession on the subsequent early recovery: evidence from the Mexican States Output.
Pablo Mejía-Reyes (UAEM) y Virginia N. Del Campo-Sánchez (UAEM)……641

XXIX Stochastic Discount Factor in a Two Country Currency Area.
Adrián Hernández del Valle (IPN) y Claudia I. Martínez García (IPN)……669

XXX Restricciones de crédito en un modelo de crecimiento económico endógeno.
Humberto Ríos Bolívar (IPN) y Daniel Cerecedo Hernández (IPN)……683

XXXI Lo que es y lo que deber ser: disyuntiva en la política fiscal del caso mexicano.
Eusebio Ortiz Zarco (IPN) y Fernando Evaristo Callejas Albiñana (Universidad de la Castilla-España)……713

XXXII Matrices de covarianzas ortogonales markovianas con cambio de régimen: propuesta y demostración teórica de su factibilidad en un contexto gaussiano.
Oscar Valdemar De la Torre Torres (UMICH)……739

XXXIII La versión fuerte del principio de paridad del poder de compra: evidencia para América Latina: *Domingo Rodríguez-Benavides (IPN), Francisco López Herrera (UNAM) y Miguel Ángel Martínez-García (IPN)……759*

XXXIV Determinantes de la recaudación del impuesto sobre la renta en México, 1980-2012: un análisis de cointegración.
José César Lenin Navarro Chávez (UMICH), Plinio Hernández Barriga (UMICH) y Alejandro López Huacuz (SAT)……779

XXXV Modelación del vínculo entre responsabilidad social y beneficio de la empresa: monopolio ordinario lucrativo versus competencia perfecta.
Eduardo Macario Moctezuma-Navarro (UPFIM), Zoraida Blancas-Olvera (UPFIM) y Araceli Flores-Eslava (UPFIM)……797

XXXVI Determinants of Economics Growth in a Small Open Economy with Natural Resource Abundance.
M. Salem Mohamed- Embarek-Sidi (IPN) Adrián Hernández del Valle (IPN) y Claudia I. Martínez García (IPN)……817

XXXVII Métodos para el cálculo de la prima de Opciones Asiáticas.
Nora Gavira Durón (UDLAP) y Julio Irving Aguilar Galindo (FIFOMI)……841

XXXVIII Extensión del Modelo Black & Scholes con opciones reales y matemática difusa: análisis de un parque eólico en México.

César López Martínez (UNAM) y Edgar Ortiz Calisto (UNAM).....871

CAPÍTULO I

Estudio de la estructura fractal de la distribución de la riqueza en México.

Guillermo Romero-Meléndez
Universidad de las Américas Puebla

Oscar Márquez Domínguez
Universidad de las Américas Puebla

Resumen.

Se presenta evidencias de que el índice de Gini para México tiene un comportamiento fractal. Entre los antecedentes de este estudio se encuentra una observación de Paul Krugman, y la conclusión de un trabajo de William Easterly, indicando que la desigualdad de los ingresos en los EEUU tiene un comportamiento que se replica a escalas pequeñas. En nuestro trabajo calculamos la dimensión fractal de las gráficas del índice de Gini para México en su totalidad y por regiones, obteniendo valores cercanos que apoyan la hipótesis de auto-similitud y fractalidad de la distribución de la riqueza en México. La mayor parte de este trabajo está contenido en la tesis de Licenciatura en Matemáticas y Economía que realizó el segundo autor, bajo la dirección del primero, en la Universidad de las Américas Puebla en 2012 (Márquez, 2012). Agradecemos la corrección de estilo de la Ing. María Magdalena Torterolo Noboa.

Palabras Clave: Desigualdad del Ingreso, Índice de Gini, Geometría Fractal

Clasificación JEL: C02

1. Introducción.

La idea del presente trabajo surgió de dos estudios realizados en los Estados Unidos. El primero es Paul Krugman, Premio Nobel en economía 2008, el cual afirma en su obra Vendiendo Prosperidad: "…los datos sobre las variaciones que experimentó la distribución de la renta en los Estados Unidos durante la década de 1980 tienen la calidad de ser <<fractales>>: se observa una pauta de creciente desigualdad en la población en su conjunto reproducida en un subgrupo cualquiera de la población… " (Krugman, 1994).

El segundo trabajo es de William Easterly, quien en su artículo "Beautiful fractals and ugly inequality" concluye: "la desigualdad de ingresos se comporta como un fractal: es muy desigual a grandes escalas y a pequeñas escalas" (Easterly, 2010). A la publicación del trabajo de Easterly le siguió la observación de Krugman en el sentido de que los resultados ya los había encontrado él anteriormente (Krugman, 2010).

El objetivo de este trabajo es analizar la estructura de la distribución de la riqueza en México, desde el punto de vista fractal. Para ello se estudió el comportamiento del Coeficiente de Gini, el cual es un excelente indicador de la desigualdad de la distribución de los ingresos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

2. La Geometría Fractal.

Los fractales son objetos matemáticos rugosos con la propiedad de autosimilitud, complejidad y son invariantes bajo cambios de escala. Su nombre se debe a Benoit Mandelbrot, quien popularizó e impulsó la geometría fractal. Mandelbrot en su libro The Fractal Geometry of Nature comenta: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en línea recta" (Mandelbrot, 1977). La geometría fractal simula procesos de la naturaleza por medio de algoritmos que iteran reglas matemáticas y que dibujan en la pantalla de la computadora figuras que revelan repetición de patrones y una complejidad que modela fenómenos que suceden en la naturaleza, la economía y las artes. Precisamente es en el arte donde se puede encontrar el inicio de esta nueva geometría, en el arte paleolítico 22,000 AC y sumerio 3500 AC, continuado por otras culturas que incluyen al arte italiano del siglo XIII y el arte islámico del siglo XIV (Wolfram, 2002). En los inicios del siglo XX, la matemática re-descubre esta geometría con los trabajos de Sierpinsky, Julia y Fatou, se establece como ciencia con Mandelbrot en 1980 y encuentra sus aplicaciones más interesantes en los años recientes. A continuación se muestran algunos ejemplos de figuras fractales:

Figura I. Triángulo de Sierpinsk

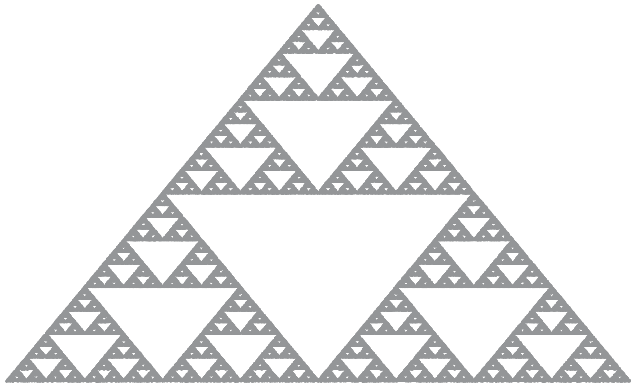


Figura II. Copo de nieve de Koch

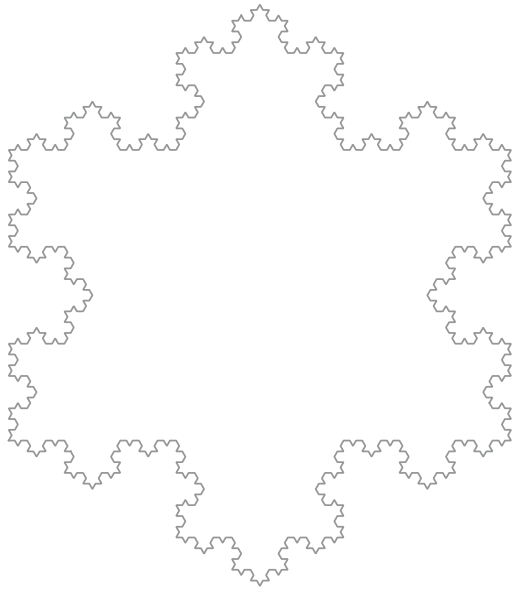
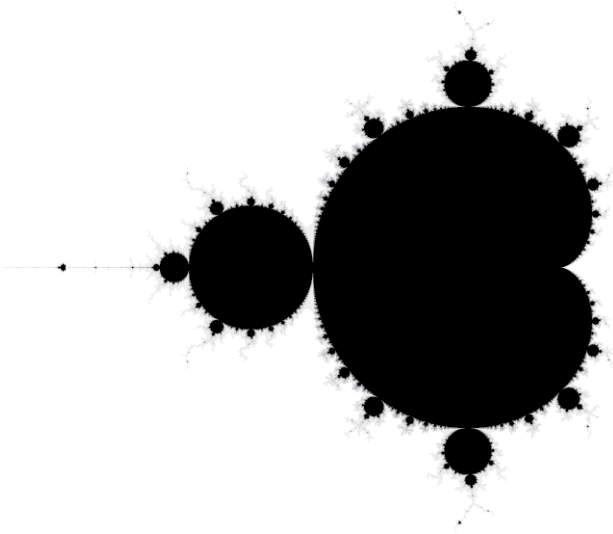


Figura III. Conjunto de Mandelbrot



2.1 La Dimensión Fractal.

La dimensión fractal de una figura nos indica la cantidad de espacio que llena esa figura y existen varias formas de calcularla. Esta dimensión nos provee de un criterio muy útil para determinar si un objeto es un fractal, consiste en calcular su dimensión fractal y si obtenemos un número mayor que su dimensión topológica, la cual es igual a 0 para puntos aislados, 1 para líneas, 2 para superficies y 3 para el espacio, entonces el objeto estudiado es un fractal. Mencionaremos aquí dos maneras de calcular la dimensión fractal: el calcular la dimensión de auto-similitud y el método de conteo de cajas. El último es el que usaremos en nuestro estudio de la distribución de la riqueza en México.

2.2 La Dimensión de Auto-similitud.

Si una figura está formada por N partes simulares a ella a una escala r, entonces su dimensión es:

$D = Log(N)/Log(1/r)$

Para el triángulo de Sierpinski se tiene:

N = 3, r = 1/2, D = Log(3)/Log(2) = 1.5849…

2.3 EL Método de Conteo de Cajas.

Este método consiste primero en dividir la unidad de longitud en cada eje de coordenadas en n partes, a continuación se calcula el número N de cajas de lado n, requeridas para cubrir la figura, si N crece exponencialmente al variar n, quiere decir que la figura es un fractal y que el exponente tenderá a la dimensión fractal cuando n tiende a infinito. Escribiendo esto en una fórmula, tendremos:

$$D = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Log(N)/Log(n)}$$

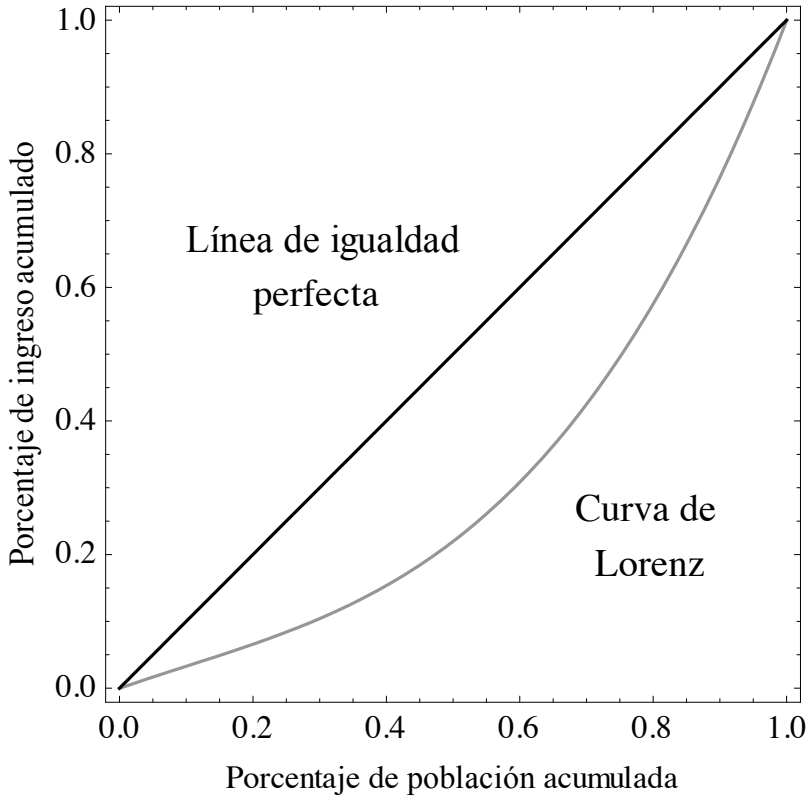
Para el triángulo de Sierpinski, podemos considerar que su base mide 2 unidades y su altura mide una unidad, y que dividimos la unidad de longitud en $n = 2^k$ partes, entonces se tendrá que $N = 4(3^{k-1})$ cajas, entonces su dimensión fractal es:

$$D = \lim_{k\to\infty} \left[\left(\frac{\mathrm{Log(3)}}{\mathrm{Log(2)}}\right)\left(\frac{\mathrm{k}-1}{\mathrm{k}}\right) + 2\left(\frac{1}{\mathrm{k}}\right)\right] = \frac{\mathrm{Log(3)}}{\mathrm{Log(2)}}$$

3. El Coeficiente de Gini.

El coeficiente de Gini indica qué tanto se aleja la distribución del ingreso, entre individuos u hogares dentro de una economía, de una distribución perfectamente equitativa. El coeficiente de Gini mide el área de la superficie comprendida entre la línea hipotética de equidad absoluta y la curva de Lorenz, la cual a su vez muestra la variación de los porcentajes acumulados de ingreso total recibido contra la cantidad acumulada de los receptores, iniciando con la persona o el hogar más pobre. Un coeficiente de Gini de 0 representa la equidad perfecta y un coeficiente de Gini de 1 representa una inequidad perfecta.

Figura IV. La curva de Lorenz.



3.1 Interpretación del Coeficiente de Gini.

El coeficiente de Gini se puede interpretar como:

- G es el área entre las gráficas de igualdad perfecta y la de Lorenz, dividida entre el área bajo la gráfica de igualdad perfecta.
- G = 1- 2A, donde A es el área bajo la curva de Lorenz.

3.2 Cálculo del Coeficiente de Gini.

Entre las fórmulas que existen para calcular el coeficiente de Gini se encuentra la siguiente (Ver [Medina]):

$$G = 1 - \sum_{k=1}^{n} (X_{k+1} - X_k)(Y_{k+1} + Y_k),$$

En donde:

- X_k representa la proporción acumulada de la población en el grupo k, Y_k representa la proporción acumulada del ingreso en el grupo k , con el índice k variando de 1 a n.
- Los datos X_k están ordenados de forma ascendente, de acuerdo a su ingreso correspondiente ($Y_k \leq Y_{k+1}$).
- Los intervalos $[X_k , X_{k+1}]$ son de igual tamaño.

3.3 Propiedades del Coeficiente de Gini.

Entre las propiedades del coeficiente de Gini se encuentran las siguientes (Medina, 2001):

- Independencia de escala, ingreso y tamaño de la población.
- Principio débil de transferencias o condición de Pigou- Dalton: el coeficiente de Gini refleja una caída ante una transferencia de ingresos, de los hogares ubicados en la parte superior de la distribución hacia las familias ubicadas en la parte inferior.

3.4 Investigación Alrededor del Coeficiente de Gini.

Acerca de la historia e investigación reciente del coeficiente de Gini se tiene:

- El coeficiente de Gini fue propuesto por el estadístico y sociólogo italiano Corrado Gini en 1912, y en una nueva versión en 1914.
- Amartya Sen, premio Nobel de Economía en 1998, derivó un índice de pobreza utilizando el Coeficiente de Gini en 1976 (Sen, 2002).
- Existen estudios recientes sobre la caracterización axiomática del coeficiente de Gini (Sanchez-Perez, Plata-Perez y Sanchez-Sanchez, 2012).

3.5 El Coeficiente de Gini en América Latina y el Caribe.

La siguiente tabla muestra el coeficiente de Gini en América Latina, por país, calculado en el periodo que abarca de 1992 a 2012. Los datos de 22 países faltantes no están disponibles. El cálculo lo realizó Wolfram Alpha.

Tabla I. El Coeficiente de Gini en América Latina y el Caribe.

	PAÍS	**GINI**		**PAÍS**	**GINI**
1.	Trinidad y Tobago	.403	14.	Paraguay	.48
2.	Uruguay	.413	15.	**México**	**.481**
3.	El Salvador	.418	16.	Costa Rica	.486
4.	Santa Lucía	.426	17.	Chile	.508
5.	Argentina	.436	18.	Panamá	.519
6.	Guyana	.445	19.	Guatemala	.524
7.	Venezuela	.448	20.	Brasil	.527
8.	Perú	.453	21.	Surinam	.529
9.	Jamaica	.455	22.	Belice	.531
10.	República Dominicana	.457	23.	Colombia	.535
11.	Nicaragua	.457	24.	Honduras	.574
12.	Ecuador	.466	25.	Haití	.592
13.	Bolivia	.466		**Promedio**	**.481**

3.6 El Coeficiente de Gini de los países de la OCDE.

La siguiente tabla muestra el coeficiente de Gini de los países pertenecientes a la OCDE, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos, calculado en el periodo que abarca de 1997 a 2012. El cálculo lo realizó Wolfram Alpha.

Tabla II. El Coeficiente de Gini en la OCDE.

	PAÍS	**GINI**		**PAÍS**	**GINI**
1.	Eslovenia	.249	18.	Suiza	.324
2.	Suecia	.261	19.	Estonia	.327
3.	Islandia	.263	20.	Polonia	.328
4.	República Checa	.264	21.	Bélgica	.331
5.	Eslovaquia	.266	22.	Canadá	.337
6.	Noruega	.268	23.	Australia	.34
7.	Dinamarca	.269	24.	Grecia	.347
8.	Finlandia	.278	25.	Italia	.355
9.	Holanda	.289	26.	España	.358
10.	Hungría	.289	27.	Nueva Zelanda	.362
11.	Austria	.3	28.	Inglaterra	.38
12.	Alemania	.306	29.	Portugal	.385
13.	Luxemburgo	.308	30.	Turquía	.4
14.	Corea del Sur	.316	31.	Estados Unidos	.411
15.	Francia	.317	32.	Israel	.428
16.	Irlanda	.321	33.	**México**	**.481**
17.	Japón	.321	34.	Chile	.508
				Promedio	**.332**

4. La Dimensión Fractal de la Gráficas del Coeficiente de Gini en México.

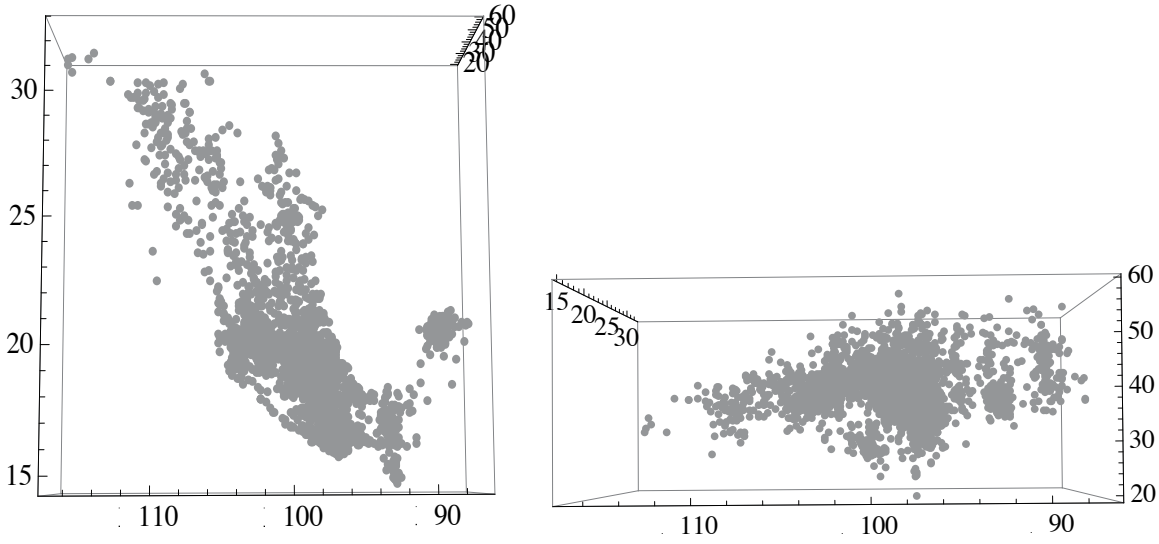
En esta parte presentamos los resultados de un estudio del cálculo y comportamiento de la dimensión fractal de las gráficas del coeficiente de Gini en México, en su totalidad y por regiones. Se utilizó la base de datos del Programa de Naciones Unidas para el Desarrollo de 2005, la cual contiene el valor del coeficiente de Gini de los 2454 municipios que conforman nuestro país. En las gráficas analizadas, para cada municipio, las coordenadas x, y corresponden a la latitud y longitud de la localización del municipio en nuestro país, y la coordenada z corresponde al valor del coeficiente de Gini del municipio correspondiente. Se obtuvieron así gráficas

tridimensionales, a las que se les aplicó el método de conteo de cajas para obtener la dimensión fractal de cada gráfica.

4.1 La Dimensión Fractal de la Gráfica del Coeficiente de Gini en México.

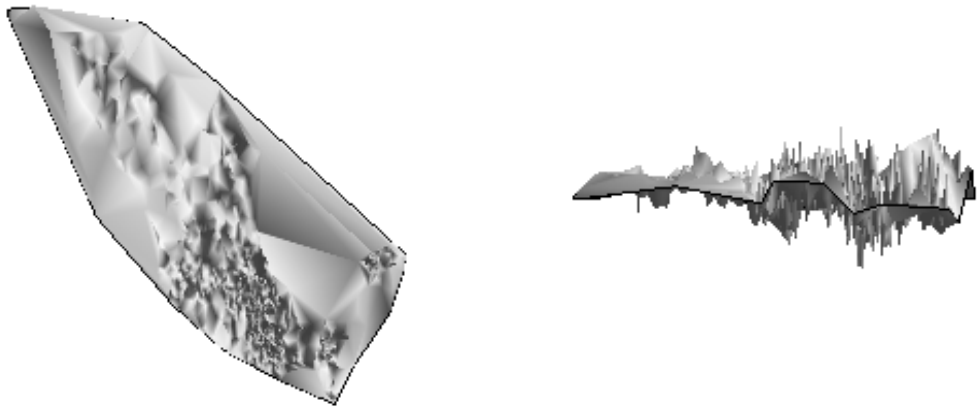
Como se comentó anteriormente, se consideró un total de 2454 municipios de México. Por lo tanto, la gráfica del coeficiente de Gini en México consta de 2454 puntos tridimensionales y se muestra a continuación, en una vista de lateral (derecha) y su vista superior (izquierda).

Figura V. Gráfica del Coeficiente de Gini en México.



La figura VI muestra las gráficas de puntos anteriores, aproximadas por superficies:

Figura VI. Superficie del Coeficiente de Gini en México.



La dimensión fractal para la gráfica del coeficiente de Gini en México es: 1.92636.

4.2 La Dimensión Fractal, por Regiones, del Coeficiente de Gini en México.

Se consideraron cuatro regiones: la Región Norte, el Bajío, la Zona Centro, y la Región Sur-Sureste. A continuación se presentan los resultados obtenidos:

4.2.1 La Región Norte.

Esta región abarca los estados de Baja California Norte, Baja California Sur, Chihuahua, Coahuila, Durango, Nuevo León, Sinaloa, Sonora y Tamaulipas, contando con 338 municipios. Las gráficas de esta región se muestran en las siguientes figuras:

Figura VII. Gráfica del Coeficiente de Gini en la Región Norte.

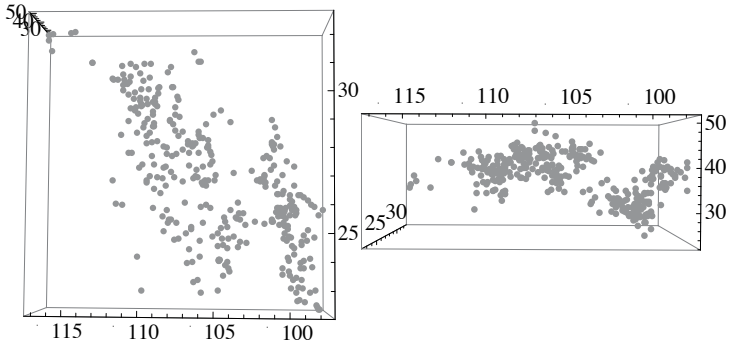
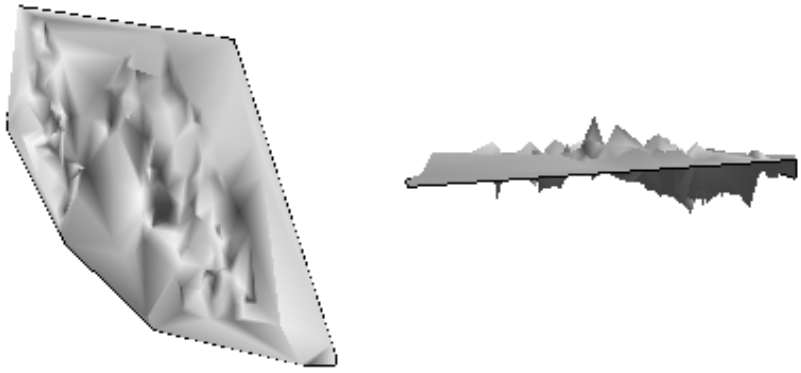


Figura VIII. Superficie del Coeficiente de Gini en la Región Norte.



La dimensión fractal para la gráfica del coeficiente de Gini en la Región Norte es: 1.92543.

4.2.2 El Bajío.

El Bajío comprende los estados de Nayarit, Colima, Jalisco, Michoacán, Guanajuato, Aguascalientes, Querétaro, San Luis Potosí y Zacatecas, contando con 458 municipios. Las gráficas de esta región se muestran a continuación:

Figura IX. Gráfica del Coeficiente de Gini en el Bajío.

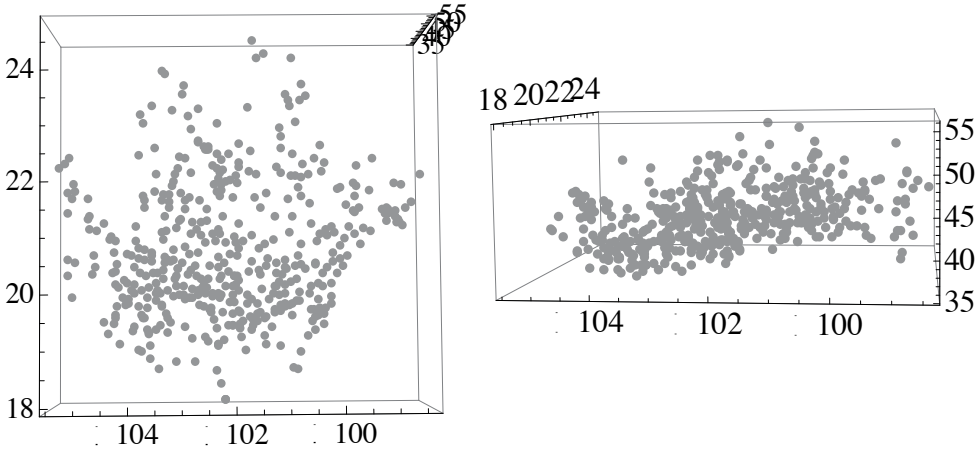
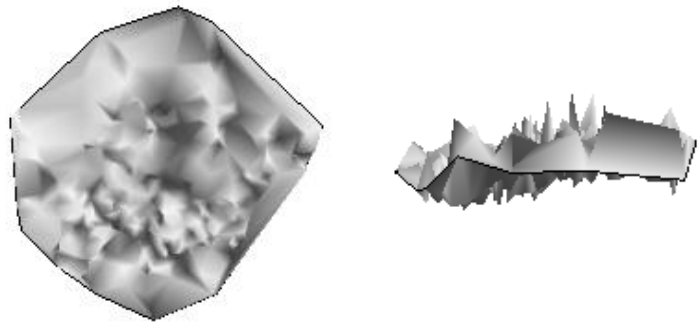


Figura X. Superficie del Coeficiente de Gini en el Bajío.



La dimensión fractal para la gráfica del coeficiente de Gini en el Bajío es: 2.42626.

4.2.3 La Región Centro.

La Región Centro está comprendida por el Distrito Federal, el Estado de México, y por los estados de Guerrero, Hidalgo, Puebla, Tlaxcala y Veracruz. Cuenta con 828 municipios. En esta región se encuentra el municipio con el coeficiente de Gini más alto de México (y con la mayor desigualdad en el ingreso): San Andrés Cholula, Puebla, con una población de 39 964 habitantes (al 2010) y con un coeficiente de Gini de .5977. Las gráficas de esta región se muestran en las siguientes figuras:

Figura XI. Gráfica del Coeficiente de Gini en la Región Centro.

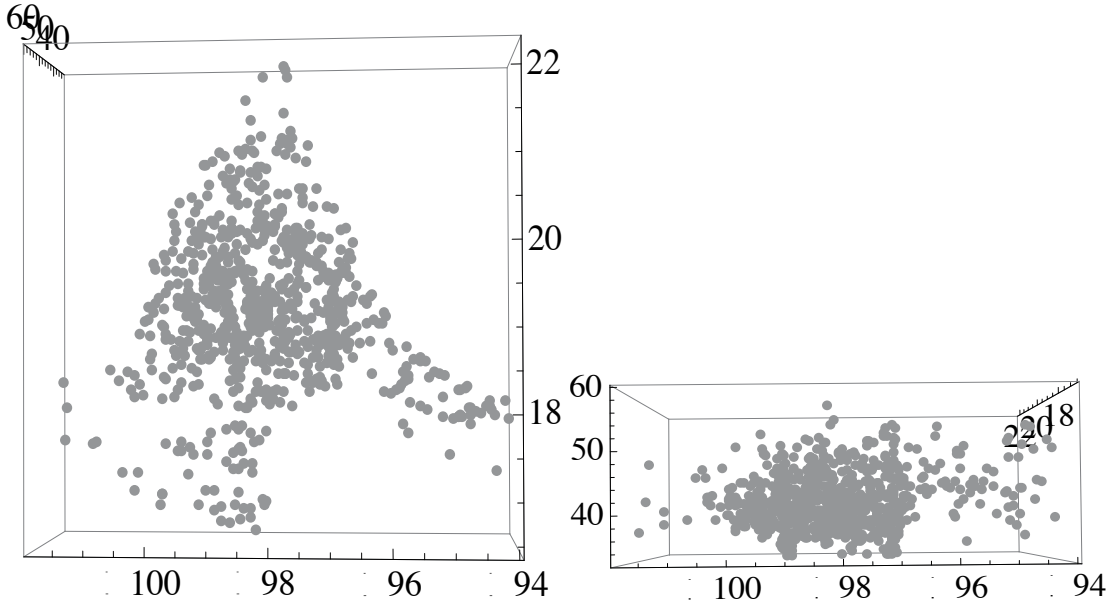
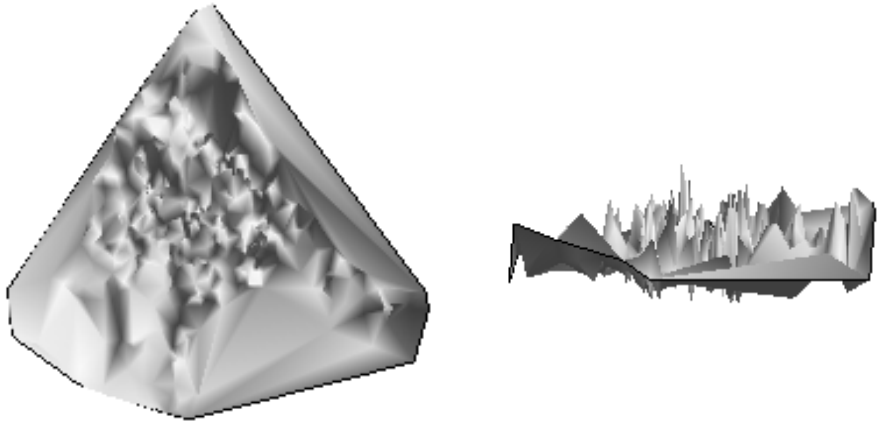


Figura XII. Superficie del Coeficiente de Gini en la Región Centro.



La dimensión fractal para la gráfica del coeficiente de Gini en la Región Centro es: 2.35755.

4.2.4 La Región Sur-Sureste.

La Región Sur-Sureste comprende los estados de Campeche, Chiapas, Oaxaca, Quintana Roo, Tabasco y Yucatán. Cuenta con 830 municipios. En esta región se encuentra el municipio con el coeficiente de Gini más bajo de México (y con la menor desigualdad en el ingreso): Santiago Nejapilla, Oaxaca, con una población de 219 habitantes (al 2010) y con un coeficiente de Gini de .1955. Las gráficas de esta región se muestran a continuación:

Figura XIII. Gráfica del Coeficiente de Gini en la Región Sur-Sureste.

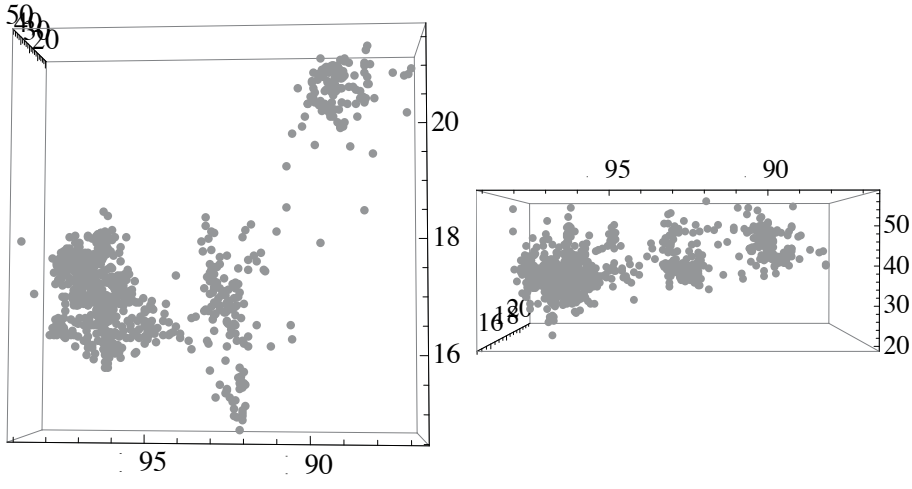
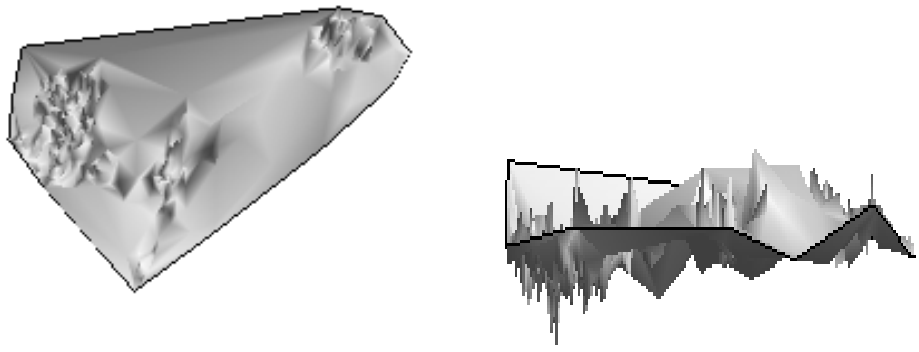


Figura XIV. Superficie del Coeficiente en la Región Sur-Sureste.



La dimensión fractal para la gráfica del coeficiente de Gini en la Región Sur-Sureste es: 1.9542.

Las dimensiones fractales obtenidas para las gráficas se muestran en la siguiente tabla:

Tabla III. Dimensión Fractal de las Gráficas del Coeficiente de Gini.

GRÁFICA DEL COEFICIENTE DE GINI	**DIMENSIÓN FRACTAL**
La República Mexicana	1.92636
Región Norte	1.92543
El Bajío	2.42626
Región Centro	2.35755
Región Sur-Sureste	1.9542

Se observa que la dimensión fractal de las regiones Norte y Sur-Sureste es muy cercana a la dimensión fractal de México en su totalidad. Este hecho lo podemos considerar como evidencia de la propiedad de auto-similitud de la gráfica total con dos de sus regiones, y por lo tanto como una evidencia de que el coeficiente de Gini en México (y la desigualdad en el ingreso) se comporta como un fractal.

5. Conclusiones.

Se encontraron propiedades de auto-similitud de la dimensión fractal de las gráficas del coeficiente de Gini de México, al obtenerse dimensiones cercanas para la gráfica total del coeficiente de Gini de México y para las regiones Norte y Sur-Sureste. Lo anterior apoya la hipótesis de que la desigualdad en la distribución del ingreso o la distribución de la riqueza en México se comporta como un fractal.

Se encontró que el municipio con el coeficiente de Gini más alto (el de mayor desigualdad en la distribución del ingreso), San Andrés Cholula, Puebla, se encuentra en una de las regiones con mayor dimensión fractal, y que el municipio de menor coeficiente de Gini (el de menor desigualdad en la distribución del ingreso), Santiago Nejapilla, Oaxaca, se encuentra en una de las regiones con menor dimensión fractal.

Bibliografía.

Easterly, W. (2010). *Beautiful fractals and ugly inequality*. Aidwatch. New York University, http://aidwatchers.com/2010/09/beautiful-fractals-and-ugly-inequality/.

Krugman, P. (1994). *Vendiendo Prosperidad*. Barcelona: Ariel.

Krugman, P. (2010, September). *Fractal Inequality*. The Opinion Pages, The Conscience of a Liberal. New York Times, http://krugman.blogs.nytimes.com/2010/09/10/fractal-inequality/.

Mandelbrot, B. (1977). *The Fractal Geometry of Nature*. New York: Freeman and Company.

Márquez, O. (2012). *Estudio de la Estructura Fractal de la Distribución de la Riqueza en México*. (Tesis de Licenciatura, Universidad de las Américas, Puebla).

Medina, F (2001). *Consideraciones sobre el índice de Gini para medir la concentración del Ingreso*. CEPAL-SERIE Estudios Estadísticos y Prospectivos. Naciones Unidas.

Sanchez-Perez, J. Plata-Perez, L. Sanchez-Sanchez, F. (2012). *An elementary characterization of the Gini Index*. MPRA Paper No. 36328, http://mpra.ub.uni-muenchen.de/36328/.

Sen A. (2002). *La Desigualdad Económica*. México: Fondo de Cultura Económica.

Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Illinois: Wolfram Media, https://www.wolframscience.com/nksonline/toc.html.

CAPÍTULO II

Estimación del precio de una opción europea fuera de equilibrio.

Guillermo Sierra Juárez
Universidad de Guadalajara

Mauricio Ramírez Grajeda
Universidad de Guadalajara

Resumen

Existe evidencia de que la valuación teórica de opciones financiera, en el contexto de Black-Scholes, no siempre coincide con el precio de los mercados lo que puede originar oportunidades de arbitraje pero el breve tiempo desaparece la reacción del mercado. El trabajo propone una forma simplificada de estimación de la de una opción europea fuera del equilibrio suponiendo que el comportamiento con regresión a la media, y en términos de los parámetros usuales del modelo Black Scholes y sus griegas. Una segunda aproximación plantea al arbitraje virtual como un proceso estocástico con regresión a la media que se agrega al comportamiento geométrico browniano del subyacente (independiente). Al final se llega a una expresión de la opción financiera corregida por los parámetros de reacción del mercado.

Palabras Clave: Arbitraje, Opciones financieras, valuación con desequilibrio

Clasificación JEL: F34, G10, G32, G1, G100 G130, G150

1. Introducción

Cuando el mercado no permite ganancias por arbitraje a los agentes participantes se dice el mercado está libre de arbitraje. Un equilibrio de arbitraje es una precondición para un equilibrio económico general. En finanzas cuantitativas se utiliza frecuentemente este concepto para calcular un precio neutral al riesgo para derivados.

El arbitraje ocurre cuando no se cumple la Ley de un precio, es decir, cuando el mismo activo no se comercia al mismo precio en todos los mercados o bien cuando dos activos con idénticos

flujos de efectivo no tienen el mismo precio o bien cuando se presenta una operación en el mercado financiero, en la que se busca tener ganancias prácticamente sin tomar riesgos aprovechando que hay precios incorrectos o diferencia de precios entre dos sitios.

En el proceso de valuación de los derivados y en particular de las opciones financieras (en el contexto de Black-Scholes) el precio teórico es justo tanto para las posiciones largas como las cortas. Sin embargo, en la práctica los mercados financieros funcionan de forma menos eficiente de lo que supone la teoría y los precios acordados en la compra y venta de opciones no coinciden con los valores teóricos o justos lo que puede generar origen a arbitraje. Sobre este tema resulta muy escaza la literatura en el tema aunque en la práctica es de gran interés poder establecer precio de opciones cuando existe arbitraje o bien cuando se encuentran fuera de equilibrio.

La intención del presente trabajo es proponer expresiones para opciones tipo call europeas con posibilidad de existencia de arbitraje de forma rápida y bajo ciertos supuestos simplificadores. De igual forma una metodología para estimar el parámetro de función o fuerza de mercado.

En la sección siguiente se presenta un resumen de los principales trabajos relacionados con el tema y se recuerdan los supuestos y resultados de Black-Scholes y de Ilinski. En la sección II se presentan los modelos propuestos y en la Sección III los principales resultados y al final se enuncian las conclusiones y bibliografía.

2. Antecedentes

En Otto M.(1999) se describe que ante la ausencia de arbitraje, es posible alcanzar un equilibrio en los mercados financieros. El mismo trabajo hace referencia al modelo propuesto por Illinski (1998) donde, como se mencionará más adelante, se consideran fluctuaciones alrededor del estado de equilibrio introduciendo una dinámica de relajación del tipo Ornstein-Uhlenbeck como ruido aleatorio para desviaciones intermedias y que el autor lo denomina como rendimiento de arbitraje virtual. Además para el análisis se propone una escala diferente de tiempo en donde en se pueda generar el arbitraje.

En Otto M. (1999) se introduce un modelo dentro del marco de las martingales para establecer precios para derivados en mercados incompletos usando un mapeo para la teoría de precios de

opciones con tasas de interés estocásticas y el rendimiento de arbitraje es considerado como una componente como una tasa de interés ficticia en un mundo virtual con el objeto de facilitar su implementación.

La influencia de rendimientos de arbitraje en el precio de derivados en el mundo real puede compensarse como un promedio de los rendimientos (no observables) en el momento de la valuación. Usando la metodología de integrales de trayectoria para las opciones call y put y considerando la influencia de rendimiento de arbitraje virtual (o desviaciones intermedias de equilibrio económico) se obtiene a través de métodos numéricos las expresiones correspondientes para la valuación considerando rendimientos de arbitraje inicial. El resultado se complementa con una discusión sobre estrategia de cobertura asociada a los derivados que replica el mensaje el pago final aunque no sea autofinanciable en el mundo real.

Según el autor, las estrategias de cobertura no son autofinanciables en un mundo real donde el rendimiento de arbitraje no es observado directamente, en promedio cualquier costo intermedio surge durante el proceso de cobertura y tiene que ser cubierto con un premio adicional que tiene que ser considerado dentro de la opción.

La derivación de las expresiones se hace con base en la selección de una medida especifica en un conjunto de medidas martingalas que contienen más que un elemento debido a que el mercado no es completo y surge las oportunidades de arbitraje virtual.

En Fedotov S. y Panayides S., (2005) se revisa el papel del arbitraje en la determinación del precio de los derivados financieros. Se propone un portafolio estocástico en un momento fuera de equilibrio y con un rendimiento de arbitraje estocástico estacionario que va variando rápidamente en el tiempo. Se utiliza el hecho que la valuación de la opción y los rendimientos de arbitraje están en diferentes escalas de tiempo lo que permite analizar el comportamiento asintótico en el tiempo y se restringe a bandas independientes de las características independientes de precios más que precios exactos. De las conclusiones, lo más interesante es que puede explicarse el "smile" de volatilidad en términos de los rendimientos de arbitraje aleatorio.

En Young K. (1999) también se hace una propuesta de modelo de mercado cambiarios a partir de la teoría de norma. Los tipos de cambio pueden expresarse como exponenciales de la teoría

de norma en haces fibrados mientras que las tasa de interés son potenciales de norma en haces fibrados. Se dan oportunidades de arbitraje para valores de la curvatura distintos de cero en circuitos cerrados. Oportunidades de arbitraje involucran tasas cruzadas en el tiempo actual y son equivalentes en el área de la física a campos magnéticos y en contratos futuros oportunidades de arbitraje corresponderían a campos eléctricos.

En el modelo (Haven E. 2002) se consideran las implicaciones implícitas del modelo de Black-Scholes dentro del marco de física cuántica. El precio es considerado como una función de estado y se considera que se encuentra un potencial que permite al precio satisfacer la ecuación diferencial de Schroedinger. A partir de la función de potencial libre de arbitraje se procede a la construcción del potencial que incluya arbitraje, esta funcional es instrumental para determinar la existencia de la función de estado financiera. Esta función permite definir una función de amplitud de probabilidad y resolver la ecuación de Schroedinger. Se muestra la existencia del precio libre de arbitraje cuando la función potencial converge a uno y la existencia de arbitraje cuando el valor de la constante de Planck es diferente de cero y esta constante está relacionada al parámetro (de creencia) que regula la existencia de una trayectoria, además se plantea una discusión interesante sobre el papel de esta constante. El asunto de establecer una relación entre el valor de dicha constante y el número de trayectorias es importante ya que cuando hay trayectorias múltiples, es decir, cuando son estratégicas se debe de indicar que hay una racionalidad límite y es cuando entra la integral de Feymann. Al final lo que se muestra es que puede plantearse en modelo de Black-Scholes dentro de la física cuántica e incluir el arbitraje de una forma natural.

En Sukhomlin N. (2007) se estudia la ecuación a partir de leyes de conservación y se muestra que sin limitaciones complementarias los modelos pueden tener al menos dos volatilidades, esto consecuentemente tiene varias limitaciones para los parámetros del sistema dinámico con el objeto de garantizar la definición correcta.

En Zhou and Xiao (2010) se revisa el modelo de derivados financieros desde el punto de vista de la simetría de normalización y se muestra como la forma de la ecuación puede permanecer invariante bajo transformaciones de numerarias locales, además muestra una relación entre curvatura del haz fibrado y arbitraje.

Finalmente en Sornette (1998) se hace una crítica a la teoría de normalización de finanzas. El autor comenta que aunque la idea en sí es interesante, ni la distribución log-normal, ni las ecuaciones de Black-Scholes demuestran la veracidad de la teoría. Reconoce que el elemento de la introducción del arbitraje aparece de forma correcta como parte de una teoría, pero uno de los problemas que se enfrentan las teorías es que en los mercado reales (incompletos) y que su operador no es único.

El modelo Black & Scholes (1973) propone formar una posición de cobertura con un portafolios que contenga el subyacente (posición larga) y una posición corta de opciones. Mediante argumentos de arbitraje determinan una ecuación diferencial parcial de segundo orden cuya solución representa el precio de la opción. Este modelo es sólo aplicable a opciones europeas y donde hay que recordar que entre los supuestos del modelo Black-Scholes se consideran los siguientes:

La tasa libre de riesgos de corto plazo y la volatilidad son conocidas y constantes durante la vida de la opción, no hay pago de dividendos, ni costos de transacción. El precio del valor subyacente se comporta como un movimiento geométrico browniano y se permite ventas en corto.

A continuación se enuncian las expresiones para la valuación de opciones de compra Call provenientes de Black-Scholes y ampliamente conocidas

$$C_t = S_t \mathrm{N}(\mathrm{d}_1) - \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\mathrm{r}\mathrm{T}}\mathrm{N}(\mathrm{d}_2) \qquad (1)$$

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Ln}\left(\frac{S_t}{\mathrm{K}}\right) + \left[\mathrm{r} + \frac{\sigma^2}{2}\right]\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}} \qquad (2.a)$$

$$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}} \qquad (2.b)$$

donde

S = valor del bien subyacente, K= precio del ejercicio de la opción, r = tasa libre de riesgo T = periodo de la opción y σ = volatilidad del bien subyacente y $N(d_1)$ y $N(d_2)$ son los valores de probabilidad acumulada que corresponden a la curva de distribución normal.

La ecuación Black-Scholes anterior desde su deducción original y posteriores aproximaciones por otros métodos (binomial, simulaciones, ecuación de calor y otros) siempre lleva implícitamente el supuesto de que el sistema se encuentra en un equilibrio. Sin embargo, los mercados en su dinámica diaria no están permanente en equilibrio y las oportunidades de arbitraje son evidencia de ello.

En Ilinski and Kalini (1998) se propone un arbitraje virtual y una reacción de los especuladores, el modelo toma en cuenta la restricción al no arbitraje y las caminatas no brownianas. En el modelo se introduce el formalismo geométrico diferencial estocástico para introducir la teoría de finanzas estocásticas e introducir la teoría de arbitraje domestico donde el mercado es modelado como un haz fibrado principal y el arbitraje corresponde a la curvatura y la estrategia de arbitraje.

Para poder realizar este planteamiento se hace uso de la teoría de norma y de los haces fibrados, que tienen conceptos y definiciones formales en matemáticas, haz fibrado, curvatura, conexiones, transporte paralelo, estructura y que han tenido resultados favorables en física como la gravitación y el electromagnetismo. Geométrica y formalmente se plantea un caso similar para finanzas, utilizando estos conceptos para diferentes activos divisas, monedas, acciones y considerado el valor del dinero en el tiempo. Además de la idea de circuitos en planos o trayectos locales para intercambios financieros cerrados no tienen arbitraje y por otro lado circuitos en superficie con curvatura para la presencia de arbitraje.

El valor al que llegan los call y put considerando arbitraje en su trabajo de Ilinski (1998 y 2002) basado en teoría de norma son:

$$\bar{C}(t,S) = SN\left(\frac{\hat{d}_1(t,S)}{\sqrt{1+\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}\left(1+a\xi-\frac{B(T)}{T}\right)}}\right) \qquad -Ee^{-r_0T+\frac{\Sigma^2}{2\lambda^2}[(1+a\xi)T-B(T)]} \times$$

$$N\left(\frac{\hat{d}_2(t,S)-\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma\sqrt{T}}[(1+a\xi)(T)-B(T)]}{\sqrt{1+\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}\left(1+a\xi-\frac{B(T)}{T}\right)}}\right) \qquad (3)$$

$$\bar{P}(t,S) = Ee^{-r_0(T)+\frac{\Sigma^2}{2\lambda^2}[(1+a\xi)T-B(T)]} \times N\left(\frac{\widehat{-d}_2(t,S)+\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma\sqrt{T-t}}[(1+a\xi)T-B(T)]}{\sqrt{1+\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}\left(1+a\xi-\frac{B(T)}{T}\right)}}\right) -$$

$$SN\left(\frac{-\hat{d}_1(t,S)}{\sqrt{1+\frac{\Sigma^2}{\lambda^2\sigma^2}\left(1+a\xi-\frac{B(T)}{T}\right)}}\right) \quad (4)$$

donde

$$\hat{d}_{1,2}(t,s) = \frac{\log\left(\frac{S}{E}\right)+r_0T\pm\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5a)$$

con

$$\xi = 2\sqrt{\frac{\lambda}{\pi\Sigma^2}} \quad \text{y} \quad B(T) = (1-e^{-\lambda T})/\lambda \quad (5b)$$

3. Modelos

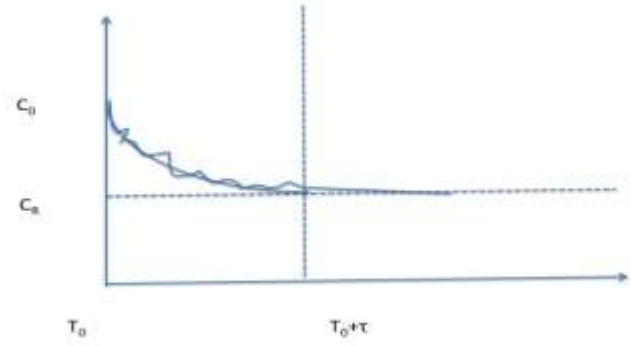
3.1. Primer Modelo

En este primer modelo se propone una forma rápida para determinar el valor esperado de una opción financiera donde existe la posibilidad de arbitraje, suponiendo por un lado el comportamiento de una opción como un proceso aleatorio en el tiempo y por otro lado se piensa como una perturbación del valor de la opción alrededor del equilibrio ajustándolo por las griegas, se supone que ambas formas de estimación son equivalentes por lo que se igualan las expresiones y se deducen algunos resultados .

Supongamos que el valor de una opción financiera plain vanila de tipo call, se comporta a lo largo del tiempo como un proceso estocástico con regresión a la media (similar al modelo de tasa corta de Vasicek), donde inicia desde un valor inicial C_0 en el tiempo T_0 y converge en el tiempo a un valor C_R con una velocidad de reacción del mercado ν (ver figura 1) se propone el comportamiento de la opción de siguiente forma (donde W_t es un movimiento geométrico browniano)

$$dC_t = \nu(C_R - C_t) + \sigma_c dW_c \quad (6)$$

Gráfica 1



Después de aplicar el proceso Ornestein-Uhlenbeck se llega a la siguiente expresión[1]

$$C_t = C_0 e^{-\nu t} + C_R(e^{\nu t} - 1) + \sigma_C \int_{t_0}^{t} e^{-\nu s(t-s)} dW_C \qquad (7)$$

donde el valor esperado y la varianza condicionales para el tiempo t dados los valores iniciales son [2]:

$$\mathbb{E}[C_t|C_0] = C_0 e^{-\nu t} + C_R(1 - e^{-\nu t}) \qquad (8)$$

$$Var[C_t|C_0] = \frac{\sigma_C^2}{2\upsilon}(1 - e^{-\nu t}) \qquad (9)$$

Supongamos que C_R es el valor en equilibrio, libre de arbitraje y que corresponde al valor Black-Scholes tradicional (ver grafica 1)

$$C_R = S_{t_{0+\tau}} N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \qquad (10)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_{t_{0+\tau}}}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (11\ a)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_{t_{0+\tau}}}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (11\ b)$$

[1] Ver apéndice I

[2] τ *esta en una escala de tiempo mucho menor que el vencimiento de la Opción*

donde de forma simplificada podemos pensar que el cambio en el valor de la opción pudo haber sido provocado por un cambio en los parámetros del tiempo, el valor del subyacente, la volatilidad o la tasa de interés o una combinación de ellos y el incremento del cambio está dado por:

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\Delta \sigma + \frac{\partial C}{\partial r}\Delta r \qquad (12)$$

Donde igualando los valores esperados de la ecuación (8) y de la (12) tenemos

$$C_R + \Delta C_R = C_R + e^{-\nu t}(C_0 - C_R) \qquad (13\ a)$$

o bien

$$\frac{\Delta C_R}{C_0 - C_R} = e^{-\nu\tau} \qquad (13\ b)$$

Despejando el parámetro de la reacción del mercado puede expresarse de dos formas distintas

$$\nu = -\frac{1}{\tau}\ln\left[\frac{\mathbb{E}[C_t|C_0] - C_R}{C_0 - C_R}\right] \qquad (14\ a)$$

o bien escrito en otros términos

$$\nu = -\frac{1}{t}\ln\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial C}{\partial \sigma}\Delta \sigma + \frac{\partial C}{\partial r}\Delta r}{C_0 - C_R}\right] \qquad (14\ b)$$

3.2 Segundo Modelo

Supongamos que un subyacente se comporta como un movimiento geométrico browniano y puede escribirse de la siguiente manera (donde W_{1t} es un movimiento geométrico browniano):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_{1t} \qquad (15)$$

Y supongamos que aparece en el mercado un proceso de flujo de arbitraje que se comporta como un proceso de regresión a la media, que de forma general se expresa como:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \Sigma_t dW_{2t} \quad (16)$$

y para este caso particular suponemos que el valor de X_t converge hasta desparecer el efecto con el mercado que actúa con una fuerza ν y con una volatilidad Σ y término estocástico proviene de un movimiento browniano distinto origen W_{2t}

$$dX_t = -\lambda X_t dt + \Sigma_t dW_{2t} \quad (17)$$

Podemos suponer que la relación entre ambos procesos brownianos es de acuerdo a la siguiente tabla

Tabla 1

	dW_1	dW_2
dW_1	Dt	$\rho_{12}dt$
dW_2	$\rho_{12}dt$	Dt

En el caso más sencillo podemos suponer que la correlación entre ambos procesos es nula, es decir, $\rho_{12} = 0$

Siguiendo las ecuación (7, 8 y 9) y del apéndice tendríamos para el proceso de arbitraje se las expresiones equivalentes siguientes:

$$X_t = X_0 e^{-\lambda t} + \Sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dW_s \quad (18)$$

$$\mathbb{E}[X_t|X_0] = X_0 e^{-\lambda t} \quad (19)$$

$$Var[X_t|X_0] = \Sigma^2 \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)} dS = \frac{\Sigma^2}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \quad (20)$$

Con el objeto de simplificar y con fines prácticos, supongamos que la distribución del rendimiento del proceso de arbitraje prácticamente es no negativa o al menos no rebasa la media menos cuatros veces la desviación estándar siempre es positiva

$$X_0 e^{-\lambda t} - 4\sqrt{\frac{\Sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})} > 0 \qquad (21\text{ a})$$

o bien

$$X_0 e^{-\lambda t} > 4\sqrt{\frac{\Sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t})} \qquad (21\text{ b})$$

Reacomodando términos, se establecen condiciones sobre los parámetros del proceso de arbitraje

$$\left(1 + \frac{\lambda X_0^2}{8\Sigma^2}\right) > e^{-2\lambda t} \qquad (21\text{ c})$$

Además se supone una función de distribución conjunta independiente se tienen las consecuencias siguientes:

$$f_{S_T!S_t\, X_T!X_t}(s, x|S_T X_T) = f_{S_T!S_t}(s|S_T) f_{X_T!X_t}(x|X_T) \qquad (22\text{ a})$$

$$\max(S_T - K + X_T, 0) = \max(S_T - K, 0) + X_T \qquad (22\text{ b})$$

$$\int_{E-4\sigma^2}^{E+4\sigma^2} f_{X_T!X_t}(x|X_T)dx \approx 1 \qquad (22\text{ c})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_T!X_t}(x|X_T)dx = \mathbb{E}[X_t|X_0] = X_0 e^{-\lambda t} \qquad (22\text{ d})$$

Además supongamos que el al proceso estocástico del subyacente le agregamos el arbitraje que tiene un proceso de convergencia que con el tiempo tiende a cero y para determinar el precio de la opción con arbitraje hacemos el proceso de valuación tradicional como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco

$$C_{arb} = e^{-rT}\mathbb{E}\{Max(S_T + X_T - K, 0)|\Im_t\} \qquad (23)$$

Y para el valor esperado consideramos una función de distribución conjunta condicionada

$$C_{arb} = e^{-rT} \iint_0^{\infty} Max(S_T + X_T - K, 0) f_{S_T!S_t\, X_T!X_t}(s, x|S_T X_T) ds dx \quad (24)$$

Y suponiendo la independencia de las distribuciones

$$C_{arb} = e^{-rT} \iint_0^{\infty} Max(S_T + X_T - K, 0) f_{S_T!S_t}(s|S_T) f_{X_T!X_t}(x|X_T) ds dx +$$
$$e^{-rT} \iint_0^{\infty} x f_{S_T!S_t}(s|S_T) f_{X_T!X_t}(x|X_T) ds dx \quad (25)$$

Y si además se toma en cuenta los supuestos simplificadores, los resultados de cada uno de los términos son:

$$e^{-rT} \int_0^{\infty} Max(S_T - K, 0) f_{S_T!S_t}(s|S_T) ds = S_T N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (26)$$

con

$$d_1 = d_1\left(S_t, t; T, K, r, \sigma\right) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (27\ a)$$

$$d_2 = d_2\left(S_t, t; T, K, r, \sigma\right) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (27\ b)$$

otras integrales

$$+e^{-rT} \int_0^{\infty} f_{S_T!S_t}(s|S_T) ds = e^{-rT} N(d_2) \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} x\, f_{X_T!X_t}(x|X_T) dx = X_0 e^{-\lambda\tau} \quad (29)$$

Sustituyendo los resultados y reacomodando las integrales se llega a los siguientes resultados

$$C_{arb} = S_T N(d_1) - e^{-rT} N(d_2)(K - X_0 e^{-\lambda\tau}) \quad (30)$$

La expresión anterior muestra el precio de una opción call plain vanilla (del put es similar) general en presencia de arbitraje.

En los caso limite cuando $X_0 \to 0$ y $\tau \to \infty$ entonces $C_R \to C_{B\&S}$

Escribiendo la ecuación anterior ahora se puede estimar la función de reacción del mercado en términos de los parámetros del modelo y el diferencial entre el valor de la opción teórica y del valor real

$$C_0 = S_T N(d_1) - e^{-rT} N(d_2) K + e^{-rT} N(d_2) X_0 e^{-\nu\tau} \quad (31\text{ a})$$

$$C_0 = C_R + e^{-rT} N(d_2) X_0 e^{-\nu\tau} \quad (31\text{ b})$$

$$\nu = -\frac{1}{\tau} ln\left(\frac{C_0 - C_R}{e^{-rT} N(d_2) X_0}\right) \quad (32)$$

4. Resultados

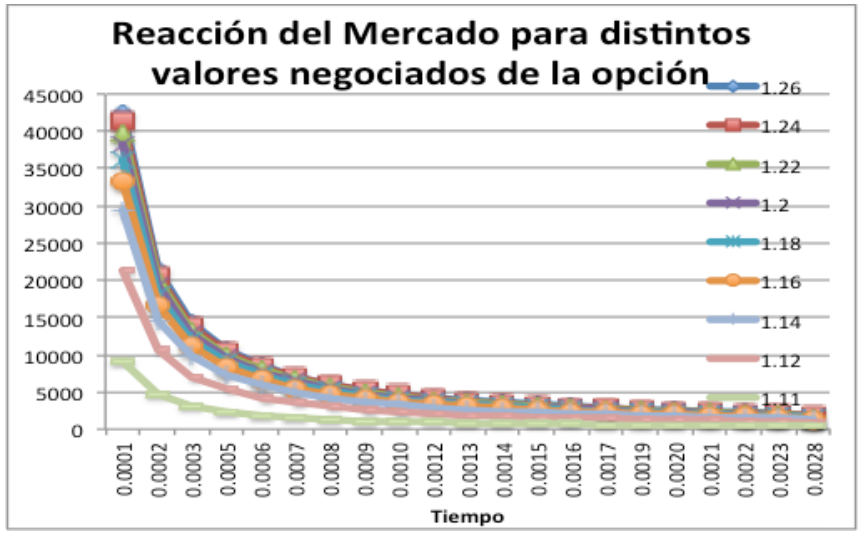
En el primer modelo bajo ciertos supuestos se propone en una primera aproximación una opción financiera europea de tipo call que bajo una perturbación al precio de equilibrio en los parámetros básicos y considerando las sensibilidades de las griegas se obtendría un valor de un call general. Por otro lado, se puede estimar el valor del mismo call considerando un comportamiento de regresión a la media en el tiempo. De las aproximaciones anteriores, se puede deducir una expresión para el parámetro de función de reacción del mercado en el caso de que exista diferencia entre el valor justo teórico de Black-Scholes y del precio con arbitraje de la opción. Una vez estimado dicho parámetro puede servir para estimar valores de opciones del mismo tipo fuera del equilibrio.

Consideremos el caso de un subyacente (que puede ser una acción) con precio inicial del mercado (sin dividendos) de $S_t = 45.15$, precio de ejercicio K= 47 con fecha actual de 3 de Julio de 2015 y vencimiento 18 de Diciembre de 2015, tasa libre de riesgo=0.03 y volatilidad de 0.1316 (ver boletín de opciones financieras del mexder del 3 de Julio de 2015). El valor estimado de la opción call en el contexto de Black-Scholes de acuerdo a la ecuación sería de 1.1067.

Supongamos que la perturbación de un día cambia únicamente por el movimiento del valor del subyacente (sin perder generalidad manteniendo constantes los demás parámetros) y haciendo un barrido en el tiempo en escalas de horas para distintos valores posibles en los que la opción call

pudo haber estado negociando en el mercado, podemos ir observando cómo va cambiando la función de reacción del mercado hasta llegar al equilibrio. A continuación se presenta la gráfica que resume la situación.

Gráfica 2

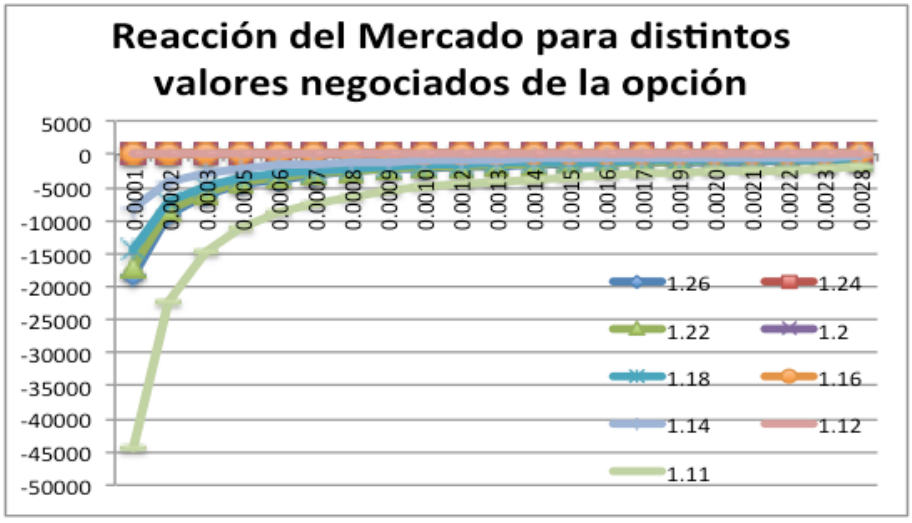


Como era de esperarse cuando el valor de la opción en el mercado está relativamente lejos de su valor teórico Black-Scholes el mercado tiene que actuar con mayor fuerza o velocidad para desaparecer la ineficiencia del mercado y las oportunidades de arbitraje.

En el segundo modelo se supone un proceso de arbitraje que se comporta como un proceso con regresión de la media que se suma linealmente al proceso geométrico browniano original del subyacente. Después de hacer unos supuestos simplificadores y considerando valor de una opción como el valor presente del valore esperado del valor intrínseco, se llega a la expresión (30).

Repitiendo el ejercicio del modelo anterior para los mismos datos e información de la opción call pero con la diferencia que además en este caso se necesita $N(d_2)$ y un valor con el que inicia en arbitraje X_0 que en este caso se propone de 0.05. La grafica siguiente resume la situación

Gráfica 3



De la misma forma ente mayor sea la diferencia entre el precio teórico y del mercado el mismo tiene que reaccionar con mayor fuerza para ajustarse lo más rápido posible.

5. Conclusiones

La valuación de opciones mediante Black-Scholes propone teóricamente un precio justo tanto para el vendedor como para el comprador. Sin embargo, debido a las ineficiencias reales del mercado existen diferencias entre el precio de las opciones determinados por la oferta y la demanda y su valor teórico.

En la práctica el precio de una opción en condiciones de arbitraje es de gran interés. El trabajo más reconocido es el de Ilinski que utiliza la teoría de Norma para poder llegar a una expresión después de un desarrollo bastante formal.

El objetivo de esta propuesta es tratar de estimar expresiones para opciones tipo call europeas con posibilidad de existencia de arbitraje de forma rápida y simplificada y de igual forma tener una expresión para determinar el parámetro de función o fuerza de mercado.

La primera propuesta se aproxima el valor de una opción fuera de equilibrio con la corrección de sus sensibilidades y de otra forma suponiendo al mismo call con arbitraje como un proceso con regresión a la media.

Por otro lado, el segundo modelo supone al arbitraje como un proceso estocástico con regresión a la media que se combina con el mismo proceso geométrico con regresión a la media y se sigue el procedimiento natural de valuación como el valor presente del valor esperado del valor intrínseco. Se consideran algunos supuesto importantes para simplificar el proceso.

Al final aunque se realizaron las estimaciones por dos metodologías o modelos distintos el resultado en el comportamiento de la fuerza del mercado es similar. Conforme el valor de la opción con arbitraje este más lejos del valor tradicional Black-Scholes del call el mercado tiene que actuar con mayor fuerza y velocidad para llegar al equilibrio.

Bibliografía

Black, F. and Scholes, M.(1973),The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-59

Boletín de Opciones Financieras Obtenida el 30 de Junio de 2015 http://aplicaciones.mexder.com.mx/Publicacion/pdfloader?ULTIMO=true&BOLETIN=DO

Farinelli S. (2014), Geometric Arbitrage Theory and Market Dynamics, Obtenida el 30 de Junio de 2015, http://arxiv.org/pdf/0910.1671.pdf

Fedotov S., y Panayides S., (2005). Stochastic arbitrage return and its implication for option pricing, Physica A 345 207-217

Haven E. (2002). *A discussion on embedding the Black-Scholes ption pricing model in a quantum physics setting,* Physica A 304, 507-524

Ilinski K. (2001), *Physics of Finance: Gauge Modelling in Non-equilibrium Pricing, ,* NY USA, John Wiley and Sons.

Ilinski K., Kalinin G. (1998) Black-Scholes equation from gauge theory of arbitrage. Obtenida el 30 de Junio de 2015 http://arxiv.org/pdf/hep-th/9712034v2.pdf

Otto M, (1999), Stochastic relaxation dynamics applied to finance: towards non-equilibrium option pricing theory

Sornette D. (1998) Gauge theory of Finance Obtenida el 30 de Junio de 2015, http://arxiv.org/abs/cond-mat/9804045

Sukhomlin N.(2007) The black–scholes type financial models and the arbitrage opportunities, *Revista de Matemática: Teorías y Aplicaciones* 14(1) : 1–6

Venegas-Martínez, F.(2008), *Riesgos Financieros y Económicos: Productos Derivados y Decisiones Económicas bajo Incertidumbre*, 2nd edition, Cengage Learning, Mexico DF

Young K., (1999) Foreign Exchange market as a lattice gauge theory, Am. J. Phys. 67 (10)

Zhou S., Xiao L. (2010). An application of Simmetry Approach to Finance: Gauge Symmetry in Finance, *Symmetry 2010,* 2, 1763-1775

Apéndice

Consideremos un modelo Vasicek con un proceso de regresión a la media

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \quad \text{(i)}$$

Y se propone un cambio de variable

$$m_t = ar_t - ab \quad \text{(ii)}$$

se puede escribir el modelo de Vasicek, como un procesos Ornstein-Uhlenbeck

$$dm_t = -am_t dt + a\sigma dW_t \quad \text{(iii)}$$

con solución

$$m_t = m_0 e^{-at} + \mathrm{a}\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \quad \text{(iv)}$$

$$m_t = m_0 e^{-at} + \mathrm{a}\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \qquad \text{(v)}$$

Combinando las ecuaciones (ii) (v) se llega a

$$ar_t - ab = (ar_0 - ab)e^{-at} + a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \qquad \text{(vi)}$$

O equivalentemente

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \qquad \text{(vii)}$$

CAPÍTULO III

Raíces unitarias estacionales.

Lucía A. Ruiz-Galindo

Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco.

Resumen

La prueba de Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (1990) [HEGY], permite probar de manera individual y conjunta, la existencia de raíces unitarias tanto en las frecuencia cero como en las estacionales. En este trabajo se presenta evidencia de la presencia de raíces unitarias estacionales en variables de la economía mexicana, los resultados no rechazan su presencia en algunas de las frecuencias estacionales, no en todas, y en la mayoría de las variables en la cero.

Palabras Clave: Raíces unitarias estacionales, prueba HEGY, estacionariedad, estacionalidad, raíces unitarias.

Clasificación JEL: C12, C22, C50

1. Introducción

Generalmente, las variables que se introducen en un modelo de series de tiempo no son estacionarias, esto significa a grandes rasgos, que las series no tienen ni media ni varianzas constantes y tampoco lo son las covarianzas que distan el mismo periodo. La no estacionariedad se debe fundamentalmente a la existencia de raíces unitarias, las de módulo uno, que para series de tiempo con periodicidad menor al año, pueden presentarse en la frecuencia cero, la de largo plazo, y/o en las frecuencias estacionales. Hacer caso omiso de la presencia de raíces unitarias cuando se hace un modelo, tiene serias consecuencias en la inferencia estadística del modelo, su existencia ocasiona que la varianza de las variables crezca indefinidamente y puede conducir a regresiones espurias, por citar algunas implicaciones.

Las pruebas más utilizadas para saber si una serie de tiempo tiene o no una raíz unitaria en la parte ordinaria del proceso, es decir, la asociada a la frecuencia cero o bien, en todas las frecuencias estacionales, son la de Dickey y Fuller (1979) [DFA], Phillips y Perron (1989) [PP] y

Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin (1992) [KPSS]. En las dos primeras la hipótesis nula es la no estacionariedad y en la tercera es la estacionariedad. Una práctica común cuando no se rechaza la hipótesis de estacionariedad, es aplicar una diferencia ordinaria y/o una estacional, con lo cual implícitamente se está implicando la existencia de raíces estacionales en todas las frecuencias, lo cual no necesariamente es lo apropiado, tal y como se hace evidente con los resultados de este trabajo.

Por su parte, las pruebas que estudian las raíces unitarias estacionales de una serie, son las Dickey, Hasza y Fuller (1984) [DHF], Hylleberg, Engel, Granger y Yoo (1990) [HEGY], Canova y Hansen (1995) [CH] y se pueden considerar como extensiones de la prueba de Dickey y Fuller *op. cit*. La prueba DHF solo contempla la posibilidad de que las raíces unitarias existan en todas las frecuencias estacionales, mientras que la HEGY proporciona un procedimiento para información trimestral, en el que sí se puede probar la existencia de raíces unitarias estacionales y en la frecuencia cero, y puede llevarse a cabo de manera individual o conjunta, lo cual representa una gran ventaja respecto a las pruebas que lo hacen sólo de forma conjunta. Posteriormente, Franses (1991) y Beaulieu y Miron (1993) plantean una extensión de la prueba HEGY para datos mensuales.

La prueba CH específica bajo la hipótesis nula, estacionariedad (no existencia de raíces unitarias), a diferencia de la DHF y HEGY, que la establecen bajo la hipótesis alternativa. Su procedimiento obedece a que se pueda mitigar el problema de poca potencia que presentan las pruebas alternativas de DHF y HEGY y puede conducir a los mismos resultados de la HEGY y si no es así, se debe de profundizar en el análisis y elegir de acuerdo a las propiedades de cada una (Hylleberg, 1995).

El objetivo de este trabajo es el estudiar la prueba de HEGY para investigar la presencia de efectos estacionales estocásticos, posiblemente no estacionarios, aplicarla a variables de la economía mexicana y analizar la pertinencia de efectuar este tipo de pruebas al elaborar modelos de series de tiempo, ya que por lo regular como ya se ha indicado, las más utilizadas para verificar la existencia de raíces unitarias estacionales o no, son las de DFA, PP y KPSS, con el inconveniente de que analizan de forma conjunta todas las frecuencias.

El estudiar la existencia de raíces unitarias en las frecuencias estacionales es importante porque los modelos de series de tiempo en particular los económicos que introducen información con

periodicidad inferior a la anual, incorporan datos cuya dinámica presenta un claro patrón estacional y el modelar con datos ajustados estacionalmente podría distorsionar la dinámica del modelo estimado (Wallis, 1974), de aquí la relevancia del uso del procedimiento de prueba de HEGY para verificar la integración de las variables no únicamente en la frecuencia cero, sino también en las estacionales, cuyo estudio es el antecedente inmediato a los modelos de cointegración estacional y por ende, a los de corrección de error.

La prueba HEGY se aplica al consumo, al producto interno bruto, al índice nacional de precios al consumidor y a la base monetaria, todas de la economía mexicana, se usa información trimestral del INEGI (2015), del primer trimestre de 1993 al cuarto de 2014. Las variables no son estacionarias y todas excepto el índice de precios, muestran un patrón claramente estacional. Con base en los resultados de la prueba de HEGY, todas las variables presentan al menos una raíz unitaria en alguna frecuencia estacional, sólo la base monetarias tiene raíces unitarias en todas las frecuencias estacionales y no en la cero, y ninguna es estacionaria en la frecuencia cero y en las estacionales, de manera que la práctica común de aplicar la primera diferencia ordinaria y estacional para obtener una serie estacionaria no es muy apropiada, dado que se están asumiendo raíces unitarias en donde no las hay.

El documento se organiza como sigue, en la Sección 2 se presentan los modelos básicos en la frecuencia cero y en las estacionales, los puramente deterministas, los estacionarios y los integrados; en la 3 se expone de manera sucinta la prueba de HEGY, haciendo hincapié en la regresión auxiliar y sus diferentes componentes; en la Sección 4 se aplica la prueba a algunas variables de la economía mexicana, se plantea la regresión auxiliar haciendo explícita la parte determinista de la misma y se explican los principales resultados de la prueba, se finaliza en la Sección 5 con algunas conclusiones.

2. Modelos en frecuencia cero y estacionales

El análisis tradicional de series de tiempo considera que una variable se puede modelar mediante un proceso de tendencia determinista, uno estacionario en covarianza, uno integrado o de tendencia estocástica o bien, de combinaciones del determinista con alguno de los otros dos. El primero, considera que la serie se puede formular mediante una componente puramente determinista: una función polinomial del tiempo, esto es,

$$y_t = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k + \varepsilon_t,$$

en donde ε_t es un ruido blanco para toda $t = 1, \ldots, T$, T es el tamaño de la muestra. El segundo proceso se plantea en el contexto de los procesos estacionarios en covarianza y de manera más específica, mediante los modelos autorregresivos

$$\varphi(L) y_t = \varepsilon_t,$$

en los que todas las raíces del polinomio característico $\varphi(L)$=0 se encuentran fuera del círculo unitario y L es el operador de rezagos. Finalmente, el tercero, el proceso integrado, es aquel en el que $\varphi(L) = 0$ presenta al menos una raíz unitaria, de manera que no es un proceso estacionario, para que lo sea se necesita integrar (diferenciar), d veces el proceso y_t, con d el número de raíces unitarias de $\varphi(L)$, en cuyo caso se tiene un proceso integrado de orden d o equivalentemente, un $I(d)$.

Paralelamente, en el ámbito estacional, también se tienen tres procesos, el *proceso de tendencia estacional* puramente *determinista,* dado por

$$y_t = \beta_0 + \sum_{k=1}^{s-1} \beta_k d_{kt} + \varepsilon_t,$$

donde s es el número de períodos en el año (s=4 cuando la información es trimestral, s=12 si es mensual), d_{kt} son variables ficticias (*dummy*), estacionales, con uno en la k-ésima estación durante todos los años del periodo de estudio y cero, en las demás.[1] Por su parte, el *proceso estacionario estacional* también se representa mediante el modelo autorregresivo

$$\varphi(L) y_t = \varepsilon_t,$$

en el que la estacionalidad es estacionaria y por ello, las raíces del polinomio $\varphi(L)$ están fuera del círculo unitario y algunas son parejas de raíces complejas con periodicidades estacionales. Por

[1] Por ejemplo, para datos trimestrales

$$d_{kt} = \begin{cases} 1 \text{ en el trimestre } k, \forall t = 1, \ldots, T, \\ 0 \text{ en los otros trimestre} \end{cases}$$

y para datos mensuales

$$d_{kt} = \begin{cases} 1 \text{ en el mes } k, \forall t = 1, \ldots, T, \\ 0 \text{ en los otros meses.} \end{cases}$$

último, se tiene el *proceso integrado estacional*, en el que el polinomio $\varphi(L)$ tiene al menos una raíz unitaria, ya sea en la frecuencia cero o en las estacionales, de manera que su representación autorregresiva

$$\varphi(L)y_t = \varepsilon_t,$$

admite al menos una raíz unitaria.

Observe que los dos últimos procesos, el estacionario y el integrado, presentan estacionalidad estocástica, pero una es estacionaria y la otra es integrada y por ello, en los procesos integrados es necesario para tener un proceso estacionario y poder plantear un modelo uniecuacional, diferenciar el proceso original tantas veces como raíces unitarias tenga el polinomio $\varphi(L)$ o bien, cuando interesa formular un modelo multivariado, investigar si las variables están cointegradas estacionalmente.

3. Prueba HEGY

El analizar la existencia de raíces unitarias tanto en la frecuencia cero como en las estacionales, es un paso necesario en la especificación de un modelo de series de tiempo, ya que si se modela haciendo caso omiso de la presencia de una raíz unitaria se corre el riesgo de tener regresiones espurias y de inferir incorrectamente. Por su parte, el estudio de los procesos integrados, los que tiene raíz unitaria, es el antecedente inmediato a los modelos de cointegración, sea en la frecuencia cero o en las estacionales. Aquí se estudia la prueba HEGY, dado que es una prueba que permite pruebas individuales y conjuntas en las diferentes frecuencias.

La prueba de HEGY se desarrolla fundamentalmente en el hecho de que el incremento anual de una variable en series de tiempo con periodicidad trimestral, dado por

$$\Delta_4 y_t = (1 - L^4)y_t = y_t - y_{t-4}, \qquad (1)$$

donde Δ_s es el operador diferencia estacional (s=4), puede expresarse mediante un polinomio en L como sigue

$$(1 - L^4)y_t = (1 - L)(1 + L)(1 + L^2)y_t \qquad (2)$$

cuyas cuatro raíces, todas de módulo uno, son 1, -1 y $\pm i$, de forma que también se puede escribir

$$(1 - L^4)y_t = (1 - L)(1 + L)(1 - iL)(1 + iL)y_t \qquad (3)$$

En la expresión (2) el primer término después de la igualdad, corresponde a una raíz unitaria no estacional (largo plazo) y está asociada a la frecuencia cero, a la parte ordinaria del proceso, los demás tienen raíces unitarias estacionales. El término (1+L) corresponde a una raíz unitaria semestral (2 ciclos por año), frecuencia π, puesto que

$$(1 + L)y_t = 0$$

puede expresarse como

$$y_t = -y_{t-1} = -(-y_{t-2}) = y_{t-2}$$

y por tanto, el proceso retorna a su valor original en dos periodos (dos trimestres, un semestre). Por último, el término en las raíces complejas corresponde a los cuatro periodos trimestrales (un ciclo por año), frecuencia $\pi/2$, ya que

$$(1 + L^2)y_t = 0$$

es equivalente a

$$y_t = -y_{t-2} = -(-y_{t-4}) = y_{t-4},$$

de manera que el proceso regresa a su valor original en cuatro periodos (cuatro trimestres, un año).

En resumen, cuando la serie transformada $\Delta_4 y_t$ ya es estacionaria puede ser debido a que

i) $y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$ es estacionaria, en cuyo caso se tiene una raíz unitaria no estacional, en la frecuencia cero (cero ciclos por año) y/o

ii) $(1 + L)y_t = y_t - y_{t-2}$ es estacionaria, en cuyo caso se tiene una raíz unitaria estacional, en su frecuencia semestral (dos ciclos por año) y/o

iii) $(1 + L^2) = y_t - y_{t-4}$ es estacionaria, en cuyo caso también se tiene una raíz unitaria estacional, en su frecuencia trimestral (un ciclo por año).[2]

[2] Cero ciclos por año y dos ciclos por año corresponden a la periodicidad estacional π y un ciclo por año, a la $\pi/2$.

Bajo el supuesto de que el proceso generador de información es puramente autorregresivo

$$\varphi(L)y_t = \Delta_4 y_t = \varepsilon_t,$$

las hipótesis de la prueba de HEGY son

$$H_0: \text{Raíces de } \varphi(L) \text{ en el círculo unitario}$$
$$\text{vs}$$
$$H_1: \text{Raíces de } \varphi(L) \text{ fuera del círculo unitario}$$

o equivalentemente,

$$H_0: \text{No estacionariedad en la frecuencia cero y en las estacionales}$$
$$\text{vs}$$
$$H_1: \text{Estacionariedad en la frecuencia cero y en las estacionales.}$$

El procedimiento para probar las hipótesis anteriores, utiliza una descomposición polinomial, debida a Lagrange, para reformular el polinomio $\varphi(L)$ (ver Hylleberge et al., *op. cit.*), que los conduce a la regresión auxiliar

$$\Delta_4 y_t = \pi_1 y_{1t-1} + \pi_2 y_{2t-1} + \pi_3 y_{3t-2} + \pi_4 y_{3t-1} + \varepsilon_t, \quad (4)$$

donde

$$y_{1t} = (1 + L + L^2 + L^3)y_{t,} \quad (5)$$
$$y_{2t} = -(1 - L + L^2 - L^3)y_t, \quad (6)$$
$$y_{3t} = -(1 - L^2)y_t. \quad (7)$$

Observe que (5) se puede escribir como (ver expresión en (3))

$$y_{1t} = (1 + L + L^2 + L^3)y_t = (1 + L)(1 - iL)(1 + iL)y_t,$$

de manera que $(1 + L + L^2 + L^3)$ transforma al proceso dejando fuera las raíces estacionales y manteniendo la raíz en la frecuencia cero. De igual forma, (6), se puede plantear como

$$y_{2t} = -(1 - L + L^2 - L^3)y_t = -(1 - L)(1 - iL)(1 + iL)y_t,$$

y por tanto $(1 - L + L^2 - L^3)$ transforma a la serie eliminando la raíz en la frecuencia cero y las complejas conjugadas y reteniendo la raíz estacional -1. Finalmente, (7) se puede expresar como

$$y_{3t} = -(1 - L^2)y_t = -(1 - L)(1 + L)y_t,$$

donde $(1-L)(1+L)$ hace caso omiso de la raíz en la frecuencia cero y la estacional -1 y conserva a las raíces estacionales complejas conjugadas.

Las pruebas de hipótesis planteadas anteriormente se pueden establecer en términos de las raíces del polinomio $\varphi(L)$ y de forma alternativa, de los parámetros π´s de la regresión planteada en (4), tal y como se muestra en el Cuadro 1, y se llevan a cabo estimando esa ecuación por mínimos cuadrados ordinarios y haciendo pruebas de significancia individual sobre π_1 y π_2 para probar raíz unitaria en la frecuencia cero y π, y una conjunta para las raíces en la frecuencia $\pi/2$, puesto que esa frecuencia está asociado al par de raíces complejas conjugadas $\pm i$, por citar algunas de las que se pueden realizar.

Cuadro 1. Pruebas de hipótesis en frecuencias cero y estacionales.

Prueba	H_0 vs H_1		H_0 vs H_1	
I	$\varphi(1)=0$	$\varphi(1)>0$	$\pi_1=0$	$\pi_1<0$
II	$\varphi(-1)=0$	$\varphi(-1)>0$	$\pi_2=0$	$\pi_2<0$
III	$\lvert\varphi(i)\rvert=0$	$\lvert\varphi(i)\rvert>0$	$\pi_3=\pi_4=0$	$\pi_3<0$ o $\pi_4<0$
IV	$\varphi(-1)=0$ $\lvert\varphi(i)\rvert=0$	$\varphi(-1)>0$ $\lvert\varphi(i)\rvert>0$	$\pi_k=0$, $k=2,3,4$	$\pi_k<0$, $k=2$ y 3 o 4

En resumen, el proceso es

- estacionario en la frecuencia cero y en las estacionales, si se rechaza la hipótesis nula en las prueba I, II y III del Cuadro1, lo cual es equivalente a que los parámetros $\pi_k<0$ para $k=1,2$ y 3 o 4,
- estacionario en la frecuencia cero, en la parte ordinaria, si se rechaza la hipótesis nula en la prueba I ($\pi_1<0$) y
- estacionario en las frecuencia estacionales, en la parte estacional, si se rechaza la hipótesis nula en la prueba IV, es decir, cuando $\pi_2<0$ y $\pi_3<0$ o $\pi_4<0$,

El modelo en (4) puede ser extendido para permitir la presencia de componentes deterministas, que pueden consistir de un término independiente (constante), tendencia y/o variables *dummies* estacionales, de manera que se puede especificar como

$$\Delta_4 y_t = \mu_t + \pi_1 y_{1t-1} + \pi_2 y_{2t-1} + \pi_3 y_{3t-1} + \pi_4 y_{3t-1} + \varepsilon_t, \qquad (8)$$

donde μ_t incorpora algunos o todos los elementos deterministas previamente mencionados.

También se puede plantear un modelo más general que incorpore rezagos de la variable dependiente, al igual que en el procedimiento de prueba de DFA, esto es,

$$\Delta_4 y_t = \mu_t + \pi_1 y_{1t-1} + \pi_2 y_{2t-1} + \pi_3 y_{3t-1} + \pi_4 y_{3t-1} + \sum_{k=1}^{K} \beta_k \Delta_4 y_{t-k} + \varepsilon_t, \qquad (9)$$

donde el número de rezagos, *K*, puede ser seleccionado mediante los criterios de información de Akaike (CIA), de Schwarz (CIS) o bien, el de Hannan-Quin (CIHQ).

Finalmente, cabe mencionar que los valores críticos para la prueba t de una cola (prueba I y II, Cuadro 1) y la F (prueba III y IV, Cuadro1), son generados mediante simulaciones Monte Carlo y proporcionados en Hylleberg et al., *op. cit.*, ellos dependen de la especificación elegida y del tamaño de la muestra.[3]

4. Aplicación de la prueba HEGY a variables de la economía mexicana

El analizar la existencia de raíces unitarias en las frecuencias estacionales tiene gran importancia porque los modelos de series de tiempo en particular los económicos que introducen información con periodicidad inferior a la anual, incorporan datos cuya dinámica presenta un claro patrón estacional y el modelar con datos ajustados estacionalmente podría distorsionar la dinámica del modelo estimado (Wallis, 1974), de aquí la relevancia del uso del procedimiento de prueba de HEGY para verificar la integración de las variables no únicamente en la frecuencia cero, sino también en las estacionales, cuyo estudio es el antecedente inmediato a los modelos de cointegración estacional.

En esta Sección se muestra la aplicación de la prueba HEGY a diferentes series de la economía mexicana (INEGI) , el consumo (CONS), el producto interno bruto (PIB), el índice nacional de precios al consumidor (INPC) y la base monetaria (BM), las cuales se eligieron por la

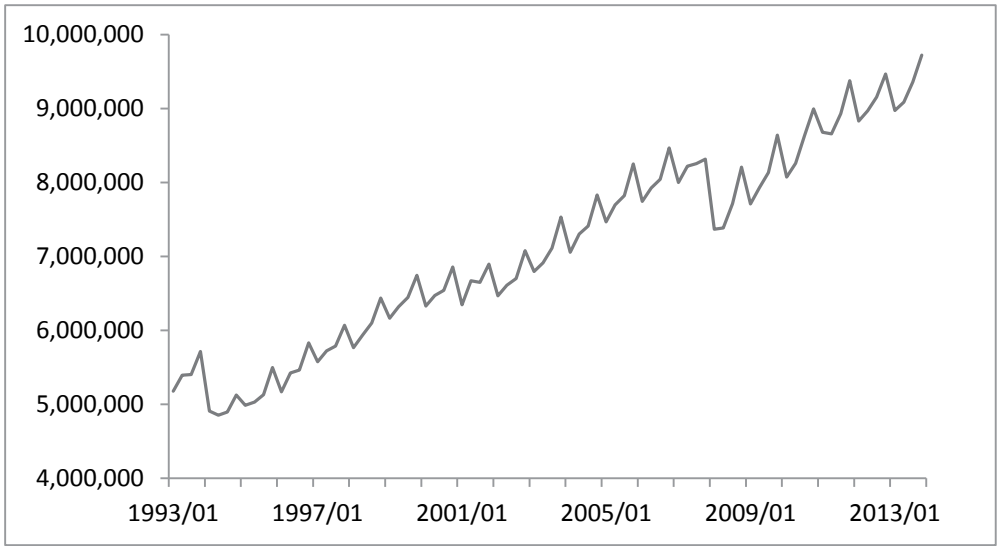
[3] Las simulaciones Monte Carlo son necesarias dado que la hipótesis nula es de no estacionariedad y por tanto, los valores críticos de las pruebas usuales de significancia individual y conjunta no son válidos, tal y como sucede con la prueba DFA.

importancia que tienen en el modelado económico o bien, por su comportamiento estacional. Las variables seleccionadas están en términos reales (2008=100), tienen periodicidad trimestral, el periodo de análisis es del primer trimestre de 1994 al cuarto del 2014 y no están ajustadas estacionalmente.

Las Gráficas 1 a 4 muestran la dinámica de las variables en estudio. En ellas se observa que todas presentan tendencia y poca variabilidad, que el CONS y la BM exhiben un claro patrón estacional, mientras que en el PIB no es tan evidente esa dinámica estacional, de esta manera se puede concluir que ninguna de las variables es estacionaria y por ello, es admisible la presencia de raíces unitarias en diferentes frecuencias.

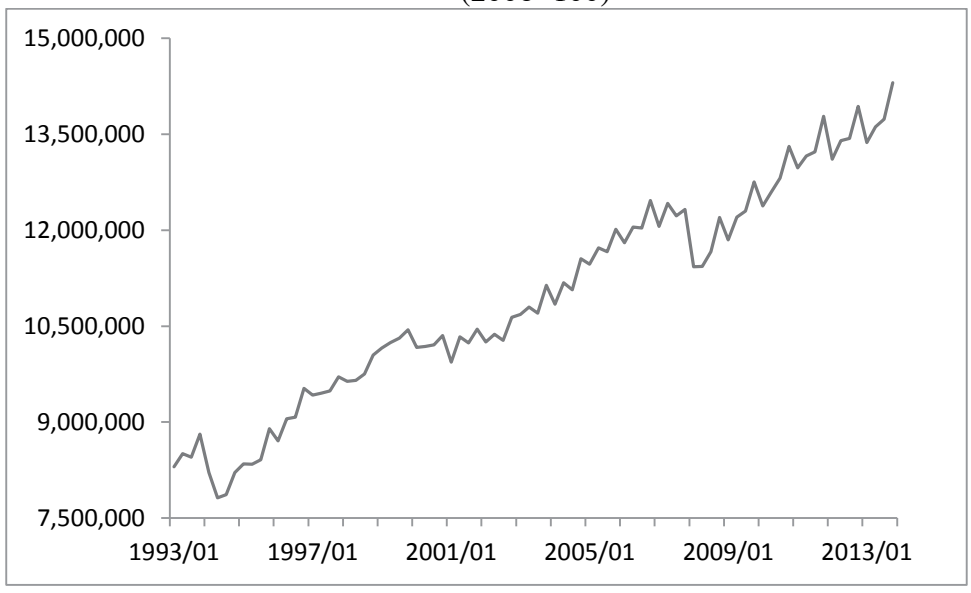
Dado lo anterior, ahora se procede a aplicar el procedimiento de la prueba HEGY para verificar la estacionariedad o no de las variables y de manera más específica, para analizar la existencia de raíces unitarias tanto en las frecuencias ordinarias como en las estacionales, que es la ventaja que tiene esta prueba sobre las que ya se han mencionado para probar raíces unitarias estacionales y adicional a ellas, la de Hasza y Fuller (1982), y la de Osborn, Chui, Smith y Birchenhall (1988).

Gráfica 1. Consumo (CONS)
(2008=100)



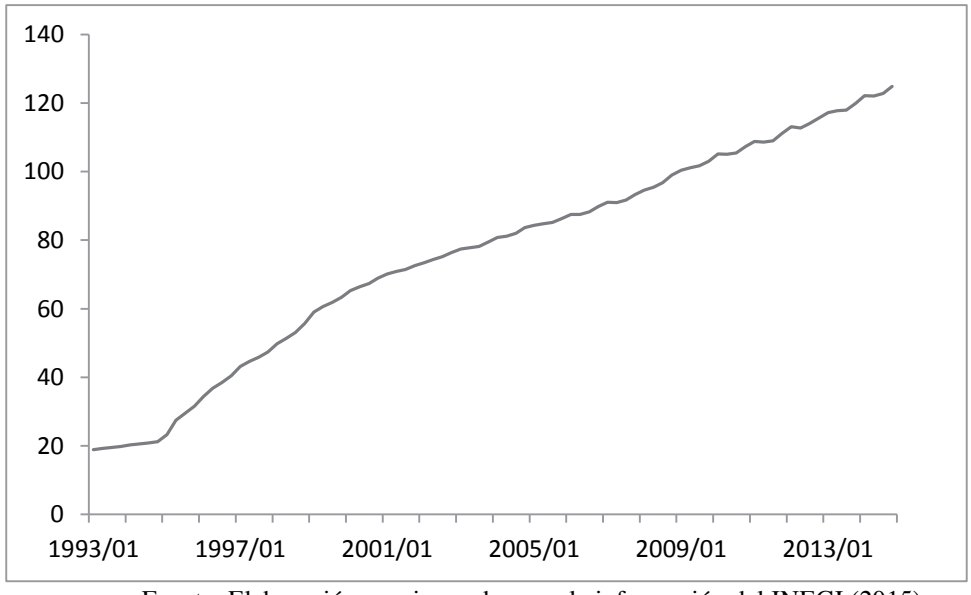
Fuente: Elaboración propia con base en la información del INEGI (2015).

Gráfica 2. Producto Interno Bruto (PIB)
(2008=100)



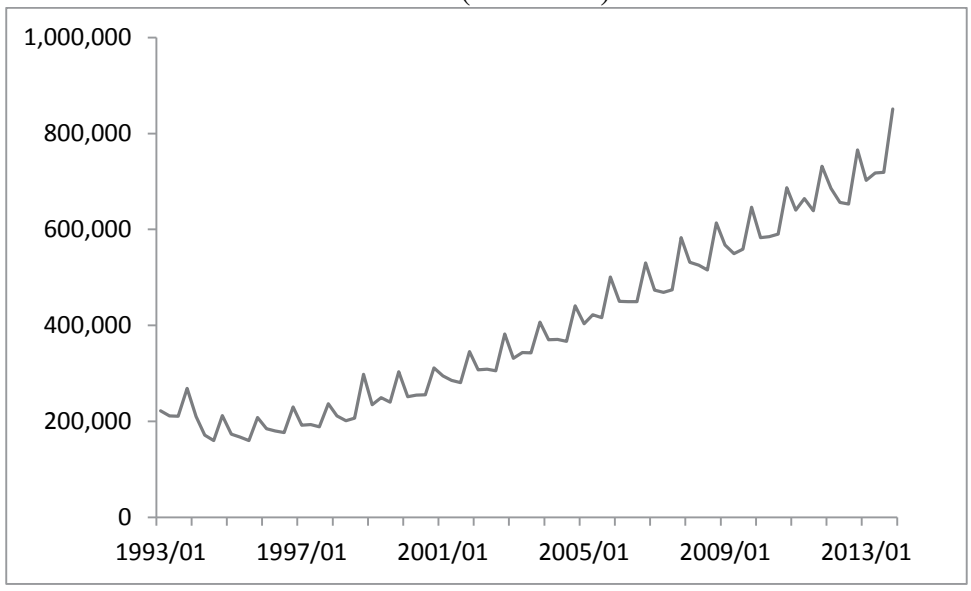
Fuente: Elaboración propia con base en la información del INEGI (2015).

Gráfica 3. Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC)
(2008=100)



Fuente: Elaboración propia con base en la información del INEGI (2015).

Gráfica 4. Base Monetaria (BM)
(2008=100)



Fuente: Elaboración propia con base en la información del INEGI (2015).

La regresión estimada para cada una de las variables incluye término independiente, variables *dummies* trimestrales y rezagos de la variable dependiente cuyo número fue determinado usando los CIA, CIS y/o CIHQ. La incorporación de variables dummies obedece a que la pérdida de potencia ocasionada por su inclusión cuando no son importantes es poco significativa comparada con el sesgo que ocasiona el excluirlas cuando sí lo son (Beaulieu y Miron, *op. cit.*). Con estas consideraciones, la regresión que se estima para cada una de las variables es la siguiente

$$\Delta_4 y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i d_{it} + \alpha_4 T_t + \pi_1 y_{1t-1} + \pi_2 y_{2t-1} + \pi_3 y_{3t-1} + \pi_4 y_{3t-1} \quad (10)$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \beta_k \Delta_4 y_{t-k} + \varepsilon_t,$$

en donde T_t es la tendencia y lo demás ya ha sido definido. Observe que esa regresión es un caso particular de la formulada en (9), solo que aquí ya se ha hecho explícito el componente determinístico μ_t, que corresponde a la dinámica presentada por las series.

En el Cuadro 2 se presentan los resultados de la estimación para los parámetros de interés, los π_k, k=1,2,3,4, a partir de los cuales se podrá decidir no únicamente si la serie es estacionaria o no, sino también la frecuencia en la que se está rechazando la hipótesis nula y cuando no se rechaza, permite conocer también la frecuencia que ocasiona la no estacionariedad, de manera que conduzca a la diferenciación precisa para obtener una nueva serie que sí sea estacionaria y cuando sea el caso, plantear un modelo más adecuado .

Cuadro 2. Estadísticos *t* y *F* para la prueba HEGY

	Frecuencia	0	π	$\pi/2$		
Variable	Rezagos	π_1	π_2	π_3	π_4	π_3 y/o π_4
CONS	2	-4.1499	-4.0414	-2.6186	-4.5027	15.7532
PIB	1	-3.5975	-2.6153	-2.4210	-4.1185	11.2374
INPC	6	-3.2270	-3.1711	-2.8051	-2.2782	6.7692
BM	5	-4.4749	-1.4509	-1.7955	-0.4349	1.7042

En la frecuencia cero, se rechaza H_0 al 5% para el CONS, PIB y BM, de manera que sólo el INPC no es estacionario en esa frecuencia, al 10% también el PIB resulta ser no estacionario. Por su parte, en las frecuencias estacionales y en la prueba individual, la *t*, BM no es estacionaria en todas ellas, PIB en la frecuencia π y $\pi/2$ (π_3=0) y CONS e INPC únicamente en $\pi/2$ (π_3=0). En la prueba conjunta, la *F*, la hipótesis nula se rechaza al 5% para CONS, PIB e INPC, pero al 10% sí se rechaza para INPC y para BM no se rechaza.

Del análisis previo se concluye que no hay una variable que sea estacionaria, tal y como ya se había comentado en el análisis gráfico, que todas presentan al menos una raíz unitaria en alguna frecuencia estacional, que sólo BM es una variable con raíces unitarias en todas las frecuencias estacionales y que no hay una variable que tenga raíz unitaria en la frecuencia cero y también en todas las estacionales (Cuadro 3).

Cuadro 3. Estacionariedad de las variables
(Nivel de significancia: 5%)

Frecuencia	0	π	$\pi/2$		
Variable	π_1	π_2	π_3	π_4	π_3 y/o π_4
CONS	E	E	~E	E	E
PIB	E*	~E	~E	E	E
INPC	~E	E	~E	E	E*
BM	E	~E	~E	~E	~E

E significa que la series es estacionaria y ~E que no lo es, en las correspondientes frecuencias.
* En estos casos, al 10% de significancia no se rechaza la hipótesis nula y por tanto las variables se pueden considerar no estacionarias en esas frecuencias.

5. Conclusiones

Un elemento fundamental para la elaboración de los modelos de series de tiempo es el análisis de estacionariedad de las variables que se incorporan en el mismo y su estudio, se basa en verificar la existencia raíces unitarias. Cuando la información tiene periodicidad menor a la anual, esas raíces pueden presentarse en la frecuencia de largo plazo, la cero, o en las frecuencias estacionales. Generalmente, en los trabajos empíricos no se analizan por separado las diferentes frecuencias estacionales, de hecho cuando mediante alguna prueba de hipótesis, no se rechaza la presencia de raíces unitarias ordinarias y estacionales, es práctica común aplicar de manera conjunta la diferencia ordinaria y estacional, para obtener una nueva serie que sí sea estacionaria.

En este trabajo se presenta el procedimiento de prueba de HEGY, cuya gran ventaja es que no únicamente analiza, para series trimestrales, las raíces unitarias en la frecuencia de largo plazo, la cero, sino que también lo hace en las frecuencias estacionales y es posible efectuarla de manera individual y conjunta, de manera que se puede dilucidar de forma más precisa, cuál o cuáles son las frecuencias en las que se presentan raíces unitarias estacionales y por ende, estacionalidad estocástica.

La prueba se aplicó a cuatro series de la economía mexicana, series importantes en los modelos económicos, algunas de las cuales muestran de manera clara, un patrón estacional en su comportamiento. Los resultados de estimar la regresión auxiliar de la prueba de HEGY proporcionan evidencia a favor de la existencia de raíces unitarias en las frecuencias estacionales,

ya que todas las variables tienen al menos una raíz unitaria estacional y por tanto, presentan estacionalidad estocástica. Además, ninguna es estacionaria en la frecuencia cero y en las estacionales, de manera que la práctica común de aplicar la primera diferencia ordinaria y estacional para obtener una serie estacionaria no es muy apropiada, se están asumiendo raíces unitarias en donde no las hay. De aquí la importancia de que en el modelado de series de tiempo y más precisamente en el análisis de estacionariedad, se efectúen pruebas de raíces unitarias en frecuencias diferentes a las cero como la de HEGY o las que se han mencionado en el desarrollo de este trabajo.

Bibliografía

Beaulieu, J. J. y Miron, J. A. (1993). Seasonal unit roots in aggregate U.S. data. *Journal of Econometrics*, 55, 305-328.

Canova F. y Hansen, B. (1995). Are seasonal patterns constant over time? A test for seasonal stability. *Journal of Business an Economic Statistics*, 13, 237-252.

Dickey, D. y Fuller, W. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with unit root. *Journal of American Statistical Association*, 74, 427-431.

Dickey, D. A., Hasza, D. P. y Fuller, W. A. (1984). Testing for unit roots in seasonal time series. *Journal of the American Statistical Association*, 5, 355–367.

Franses, P. H. (1991). Model selection and seasonality in time series. *Tinbergen Institute Research Series*, 18.

Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1982). Testing for nonstationary parameter specifications in seasonal time series models. *The Annals of Statistics*, 10, 1209–1216.

Hannan, E. J. y Quinn, B. G. (1979). The determination or the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society*. Series B, 41, 190-195.

Hylleberg, S., Engle, R., Granger, C. W. J. y Yoo, B. S. (1990). Seasonal integration and cointegration. *Journal of Econometrics*, 44, 215-238.

Hylleberg, S. (1995). Tests for seasonal unit roots. General to specific or specific to general? *Journal of Econometrics* 69, 5-25.

INEGI (2015). Banco de Información Económica, <http://dgcnesyp.inegi.gob.mx/>

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. y Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of unit root. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

Ljung, G. M. y Box, G. E. P. (1978). On a measure of a lack of fit in Time Series. *Biometrika*, 65(2), 297-303.

Maddala, G. S. y Kim, I. M. (1998). *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*. Reino Unido: Cambridge University Press.

Osborn, D. R., Chui, A. P. L., Smith, J. P. y Birchenhall, C. R. (1988). Seasonality and the order of integration for consumption, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*. 54, 361–377.

Phillips, P. and Perron P. (1990). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75, 335-346.

Wallis, K. F. (1974). Seasonal adjustment and relations between variables. *Journal of the American Statistical Association* 69, 18-31.

CAPÍTULO IV

Efectividad de las opciones installments como instrumentos de cobertura ante el riesgo cambiario.

Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional (ESE-IPN), México.

Araceli Hernández-Jiménez
Universidad Cristóbal Colón, Veracruz, México.

Elena Moreno-García
Universidad Cristóbal Colón, Campus Calasanz. Veracruz, México.

Arturo García-Santillán
Universidad Cristóbal Colón, Veracruz, México.

Resumen

El presente estudio expone la importancia del uso de los derivados en la administración del riesgo financiero en las empresas exportadoras e importadoras. Se analizan las opciones installments como un instrumento de cobertura ante el riesgo cambiario y su valuación mediante el modelo de Black-Scholes. A través de un ejercicio hipotético-práctico se demuestra el beneficio que se obtiene en el pago de las primas. La valuación realizada a la opción installment en diferentes periodos permite identificar el punto más favorable para ejercer la opción y entonces su efectividad como instrumento de cobertura ante el riesgo cambiario.

Palabras Clave: Riesgo cambiario, cobertura, opciones installments.
Clasificación JEL: G11, G12

1. Introducción

Los instrumentos derivados se han desarrollado desde hace dos décadas y se les considera una herramienta idónea para administrar el riesgo financiero. Las características de los derivados (forward, futuros, opciones y swaps, entre otros) posibilitan al tenedor de estos instrumentos a cubrirse del riesgo al que están expuestas las empresas que celebran sus operaciones al exterior.

Berkman y Bradbury (1996) argumentan que el mercado de derivados ha tenido un gran desarrollo en el mundo desde la década de los setenta, apreciándose desde entonces un evidente aumento en su uso, en particular de los derivados cambiarios a partir de 1999, por el incremento en la volatilidad que ha tenido el dólar (Fernández, 2001).

Para Clavijo y Roberto (2009) el que cubre el riesgo de mercado siempre será un ganador sin importar si tiene ganancias o pérdidas en el instrumento financiero empleado, porque su objetivo no es especular con la variabilidad de la tasa, sino asegurar una rentabilidad fijando sus costos o ingresos a un valor previamente determinado. Sin embargo, Hull (2009) y Roos, et al (2005), advierten que el uso de los derivados puede tener un efecto contrario a la cobertura, es decir, aumentar el riesgo.

Según Levi (2006) el riesgo cambiario se encontrará positivamente relacionado tanto con el nivel de exposición cambiaria como con la varianza de cambios no anticipados en las tasas cambiarias. Cuando un valor denominado en una moneda extranjera no se encuentra financieramente protegido con un contrato cambiario a plazo, se encontrará expuesto y sujeto al riesgo cambiario.

"El nivel de exposición cambiaria se refiere a la sensibilidad de las variaciones en el valor real en moneda nacional de los activos, de los pasivos y de los ingresos en operación en función de las variaciones no anticipadas en los tipos de cambio" (Levi, 2006: 321).

Existen tres tipos de exposición cambiaria, por transacciones de efectivo, económica u operativa y por conversión (Madura, 2009). En cuanto a la exposición que tiene la empresa y su gestión del riesgo, se debe analizar el tipo de cobertura. Como cobertura natural se encuentra la deuda en divisa, dado que las empresas con ingresos en moneda extranjera pueden endeudarse en esa moneda para efectuar una compensación entre los flujos de activo y pasivo y, de este modo, eliminar o reducir el riesgo cambiario (Kedia y Mozumdar, 2003).

Para Levi (2006) existen varias razones por las cuales las coberturas cambiarias deberían ser adoptadas por la empresa, como la existencia de impuestos corporativos de tipo progresivo, economías de escala en la cobertura de transacciones, beneficios de comercialización y de empleo, una menor cuantía en los costos de quiebra esperados y una mejor información interna. Sin embargo, si al usar una cobertura cambiaria a plazo, el diferencial entre compra-venta sobre las transacciones a plazo excede al de las transacciones al contado, habrá un costo esperado para las coberturas cambiarias a plazo.

Una estrategia de cobertura consiste en emplear instrumentos financieros que contrarresten de manera eficiente las pérdidas o ganancias que la empresa sufre en su posición primaria debidas a los movimientos en los niveles de las diferentes variables (Arango y Arroyave, 2011). Para Lamothe et al., (2003) las opciones son el instrumento idóneo para cubrir cualquier riesgo de precios debido a que en una opción se transfiere el riesgo de pérdida, pero se mantienen las posibilidades de beneficio ante una evolución positiva de los precios. En este sentido, existen sólo dos instrumentos que permiten este tipo de cobertura, las pólizas de seguros y las opciones. La cobertura de riesgos con opciones es flexible mientras que la cobertura con futuros y forward, no lo es.

Las opciones pueden ser ejercidas mediante; opciones americanas, las cuales permiten al comprador ejercer la opción en cualquier momento o hasta la fecha de vencimiento, opciones europeas permiten al comprador ejercer la opción tan sólo en la fecha de expiración de la opción y las opciones installment pueden ser ejercidas en varias fechas predeterminadas.

Las opciones installments u opción a plazos, es un derivado financiero, donde la prima inicial se paga por adelantado y la otra parte se paga durante la vida del contrato. El inversionista tiene el derecho de decidir si sigue pagando las primas o permitir que el contrato expire sin tener que pagar todo el importe de la prima. Estas opciones poseen la ventaja frente a otras opciones porque permiten detener el pago de las primas antes de que llegue a su vencimiento la opción.

La propiedad de las opciones installments es que permiten a las empresas llevar a cabo una política de inversiones y consecuentemente reducir su porcentaje de pérdida~~,~~ por la terminación anticipada en caso de que no favorezca a los intereses del inversor. Es útil ante situaciones donde la necesidad de cobertura es incierta y la prima inicial es baja, permitiendo de tal manera, programar sus pagos con el presupuesto de la empresa. La valuación y comparación de este tipo de opciones es importante para que las empresas tengan una alternativa de cobertura y así mismo, mostrar que el uso de este tipo de operaciones permite administrar el riesgo al ser realizadas (Anton, et. al., 2010).

Wystup (2004) argumenta que el beneficio que ofrecen las opciones installments es la prevención de las pérdidas a través de la posibilidad de la terminación anticipada, útil en situaciones donde la necesidad de cobertura es incierta. Asimismo, ofrecen una prima inicial baja y fácil de programar en el presupuesto de la empresa.

En relación a la valuación de una opción installment, el modelo Black Scholes, es un modelo matemático que pronostica el precio de una opción, reduciendo la probabilidad de riesgo y puede ser efectivo en el corto plazo. El modelo de Black Scholes pondera el valor intrínseco de una opción con la probabilidad de ocurrencia de que la opción termine dentro del dinero.

A continuación se presenta una amplia revisión de la literatura sobre exposición al riesgo cambiario y el uso de derivados como instrumentos de cobertura. El tercer apartado presenta la metodología del trabajo seguido por el análisis de los resultados. La sección cinco presenta el estudio de caso y finalmente se exponen las conclusiones.

2. Revisión de la Literatura

Lemes, et al., (2013), Sierra y Londoño (2010), Bartram, et al., (2003), Graham y Rogers (2002), Bessembinder (1991), Smith y Stulz (1985), Stulz (1984), recabaron evidencia sobre las razones por las que las empresas pueden tener interés en cubrir sus riesgos en un contexto de imperfecciones de mercado y las estrategias de cobertura encaminadas a aumentar el valor de la empresa. Sin embargo, para Guay y Kothary (2003) las posiciones de cobertura que las empresas toman en productos derivados no incide en su valoración.

Modigliani y Miller (1958) probaron que en ausencia de imperfecciones de mercado no hay relación entre el valor de la empresa y sus decisiones financieras por lo tanto, la administración de riesgos es irrelevante dado que los accionistas pueden por si mismos mantener una cartera de activos bien diversificada (Ross, et. al. 2005). Por su parte, Nain (2005) señala que las investigaciones precedentes se han centrado en la imperfección del mercado de capitales como la razón de fondo que explica el cubrimiento de una empresa.

De acuerdo a diversos estudios realizados por Castillo y Moreno (2008) y Allayannis y Weston (2001), la exposición al riesgo cambiario tiene un impacto negativo en el valor de las empresas, y una relación positiva entre el monto de derivados utilizado y el valor de la empresa, señalando que el uso de instrumentos derivados permite a las empresas reducir la exposición al riesgo cambiario y por lo consecuente mejorar su valor de mercado. Por su parte, Aabo (2006) indica que cuanto más directa y de corto plazo es la exposición cambiaria, más probable es que las empresas opten por los derivados antes que por otras técnicas de cobertura orientadas a más largo plazo.

Bartram, Brown y Fehle (2003) clasificaron los productos derivados y sus resultados indicaron que las empresas utilizan mayormente los derivados sobre divisas; en segundo término los derivados sobre tasas de interés, y en menor porcentaje los derivados sobre precios de commodities.

Sierra y Londoño (2010), Vivel et al., (2009), Bartram, et al., (2003), Gyoshev (2001), Jorion (1990), señalan que las empresas que más usan derivados son aquellas que están expuestas mediante algún canal internacional, especialmente las que importan y exportan o que buscan financiamiento en el extranjero. Por otra parte, Allayannis y Ofek (2001) mostraron que las empresas con mayor tamaño y nivel de exposición cambiaria son más propensas al uso de la deuda en divisa.

Clark y Judge (2008) encontraron que el horizonte temporal de la exposición cambiaria condiciona el tipo de instrumento de cobertura utilizado, señalando que los forward y las opciones, suelen utilizarse para cubrir la exposición a corto plazo generada por la actividad exportadora. Por el contrario, la deuda en divisa y los swaps, suelen utilizarse para cubrir la exposición cambiaria a largo plazo generada por la localización de activos en el exterior. Al respecto, Ochoa y González (2007) hacen énfasis en que las opciones pueden tener una mayor aplicación y ser un excelente mecanismo para realizar coberturas de riesgo cambiario, pero es necesario desarrollar la cultura de la gestión del riesgo.

Vivel, et. al., (2012), Vivel et al., (2009), Cowan, et al., (2006), Muller y Verschoor (2006), Hagelin y Pramborg (2004), Bartram et al. (2003), Fok et al., (1997), señalan que el uso de los derivados estaría relacionado con la cantidad de activos y deuda en dólares que poseen las empresas y con su nivel de ingresos en moneda extranjera.

Otero y Fernández (2005), Nguyen y Faff (2002), encuentran que el grado de endeudamiento de la empresa es un factor que determina el uso de derivados. Sin embargo, para Clark y Judge (2008), el valor del ratio de endeudamiento es menos significativo que la capacidad para hacer frente a la deuda; un alto endeudamiento puede obedecer más a que las empresas usen la deuda en divisa como instrumento de cobertura que a una potencial situación de insolvencia financiera.

Para Mian, (1996); Berkman y Bradbury, (1996); y Ross et al (2005), el establecimiento de un programa de cobertura, genera altos costos fijos e implica una relación positiva entre el tamaño de la empresa y la cobertura, sus resultados coinciden con los hallados por Lin y Smith (2005), Gay y Nam (1998), Berkman y Bradbury (1996), Nance, et al., (1993), quienes argumentan que

las empresas de alto crecimiento buscan aumentar su nivel de inversión al decidir usar derivados, coincidiendo con Vivel et. al., (2012), Bartram, et al., (2003) y Geczy et al., (1997), quienes además relacionan el tamaño de la empresa con el sector de actividad al que pertenecen.

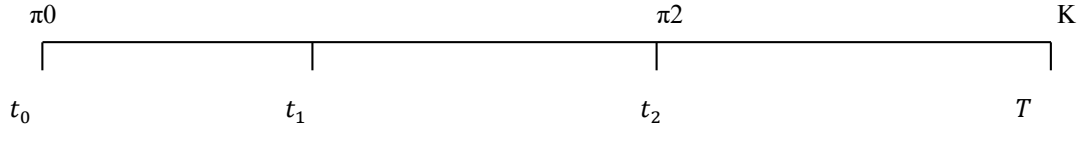
Muller y Verschoor (2006), Stulz, (1984 y 1990), Mayers y Smith, (1982) señalan que la aversión al riesgo es otra variable a considerar para el uso de los derivados. Por el contrario, Haushalter (2000), Géczy, et al., (1997), no encontraron evidencia de que la aversión al riesgo afecte la estrategia de cobertura adoptada por el corporativo. Vivel et al., (2012) y DeMarzo y Duffie (2002) señalan que las empresas más afectadas por asimetrías informativas, obtienen mayores beneficios de una estrategia de cobertura, por lo cual dichas empresas son más propensas al uso de derivados.

3. Metodología

Para realizar el análisis se valuará a través del modelo Black-Scholes una opción call installment, sobre divisa de Estados Unidos como activo subyacente, durante el periodo 2012-2013. Posteriormente se llevará a cabo el estudio de caso de una empresa que celebra operaciones comerciales al exterior, la cual ha contraído obligaciones que tienen como riesgo financiero, el tipo de cambio, contemplando como instrumento de cobertura ante sus pasivos, una opción call de divisa tipo installment.

Siguiendo un horizonte temporal como el que aparece en la figura 1, se presentan los pagos trimestrales de la opción durante la vida de la misma, siendo $t_o = 0$ la fecha de emisión de la opción y $t_1, t_2, \ldots$ las fechas de vencimiento de las cuotas de pago (π) hasta llegar a T que representa el tiempo de madurez de la opción. La letra $\pi 0$ representa el pago de la prima inicial, $\pi 2$ el precio de ejercicio y K el precio de ejercicio de madurez de la opción.

Figura 1. Vida de la opción installment.



, los supuestos del modelo de Black-Scholes, la fórmula para determinar el precio de una opción de compra cuando el activo paga dividendos es la siguiente:

$$C = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (1)$$

Para la valuación de opciones installments con activo subyacente tipo de cambio, se modifica el término q de la fórmula por r_f, la cual es la tasa de interés libre de riesgo en el país de la divisa extranjera, obteniéndose la siguiente ecuación:

$$C = S_0 e^{-r_f T_0} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (2)$$

Donde:

C = Valor de la prima Call

S_0 = Precio del activo subyacente (tipo de cambio spot o al contado de la divisa a adquirir).

K = Tipo de cambio de ejercicio pactado en el contrato.

r = Tasa de interés libre de riesgo en la moneda nacional (anual compuesta anualmente). Es la tasa de interés doméstica.

rf = Tasa de interés libre de riesgo en el país de la divisa extranjera (anual compuesta anualmente).

T = Tiempo de vencimiento de la opción en términos anuales.

N =Probabilidad en la función normal estándar.

e = 2.71828 (constante matemática).

En la ecuación (2), la prima de la opción call se basa en la diferencia entre el tipo de cambio spot y el tipo de cambio de ejercicio del contrato (S_o-K), donde los términos $e^{-r_f T_0}, e^{-rT}$ representan el factor de descuento por un período de T años a una tasa de interés continuo r. Tanto S_o como K están posicionados en el momento de maduración (futuro), por ello deben traerse al presente en el cálculo de la prima, ya que ésta se cancela en tiempo presente, al suscribir el contrato. En caso de que r y rf se desconozcan se podrán aproximar a las tasas de interés de captación, como un hecho empírico.

N corresponde a la función estandarizada de distribución normal de probabilidades y establece las probabilidades de ocurrencia de los valores S_o y K. La deducción de estos parámetros obedece a una asignación de distribución de probabilidades del tipo log normal para los precios de la divisa, de ahí que los valores de los argumentos d_1 y d_2 sean como sigue:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (4)$$

Donde:

ln = Operador de logaritmos neperianos.

σ = Volatilidad del tipo de cambio al contado en el período.

Para obtener los valores de la ecuación 2 se determinará en primer lugar la volatilidad del activo subyacente (tipo de cambio), es decir, el riesgo de la divisa, definida por la desviación estándar (σ) anualizada, la cual se calcula con las fluctuaciones diarias en el precio de la divisa. La medición del riesgo es a partir de información estadística real de las cotizaciones diarias del dólar (tipo de cambio FIX) de los Estados Unidos de América (EUA) del periodo 2012-2013.

Para el cálculo futuro del tipo de cambio Spot (S_0), se utiliza información diaria del tipo de cambio spot del periodo 2012-2013. Con la información del tipo de cambio se correrá un modelo AR (1) de la siguiente forma $Fix_t = \alpha Fix_{t-1} + \varepsilon_t$ para obtener el valor del coeficiente alfa (α), lo cual determinará el valor de S_1, S_2, S_3, S_4 (tabla 2). El modelo AR (1) es un modelo autorregresivo de orden 1, que especifica que la variable de salida depende linealmente de su propios valores anteriores, de las últimas observaciones de la variable. El proceso autorregresivo es un modelo de regresión en el que las variables explicativas son la misma variable dependiente retardada.

Para calcular la tasa de interés doméstica (*r*) y extranjera (*rf*) se utiliza información de tasas libre de riesgo de los países involucrados. En este caso son los Cetes 91 días y los T-Bills 90 días. El tenedor de la divisa bajo el supuesto del modelo de Black-Scholes, recibe un rendimiento igual a la tasa de interés libre de riesgo.

Para la tasa de interés extranjera se correrá un modelo AR (2) para determinar el valor del intercepto beta (β).

Una vez obtenido el precio futuro de la opción installment se procede a realizar el vector de primas para obtener la prima total de un año de vida de la opción, lo cual permitirá a la empresa ejercer la opción cuando le sea conveniente. El precio de las primas installments, es la cantidad que va a pagar la empresa para tener cobertura ante el riesgo cambiario.

Mediante la siguiente fórmula se realizará el vector de primas de manera trimestral de una opción installment, para obtener la prima total de un año de vida:

$$c = c_0 + c_1 e^{-rT_1} + c_2 e^{-rT_2} + Ce^{-rT} \tag{5}$$

4. Análisis de Resultados

La tabla 1 muestra la volatilidad (σ) anual del tipo de cambio FIX del período 2012-2013, la cual alcanza un valor del 12.53%, bajo el supuesto del modelo Black-Scholes, la volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.

Tabla 1. Volatilidad Anual del Tipo de Cambio Fix (2012-2013)

Rendimiento promedio en el precio de la divisa	Volatilidad anual
$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} Ri}{n}$	$\sigma = \left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\mu)\,\sigma^2}{n-1}}\right] * \sqrt{365}$
μ = -0.010%	σ = 0.66% *Raíz(365) = 12.53%

Elaboración propia

Para proyectar el tipo de cambio Spot se obtiene información histórica diaria del periodo 2012-2013. En la tabla 2 se muestran los datos obtenidos a través de un modelo AR (1) de la forma $Fix_t = \alpha Fix_{t-1} + \varepsilon_t$ para obtener el coeficiente alfa α, la cual está determinado por la variable SPOT01 con un valor **0.999886**. Con un coeficiente de determinación de 0.970606, el cual refleja la proporción de la variabilidad de la variable dependiente que puede explicarse por el modelo y la calidad del mismo para replicar los resultados.

Tabla 2. Tipo de cambio spot

Variable Dependiente: SPOT	Método: Mínimos Cuadrados	Fecha: 10/29/14 1/02/2012 12/31/2013		Muestra (ajustada):
Observaciones incluidas: 730 después de los ajustes				
Variable	Coeficiente	Desviación Típica	Estadística T	Prob.
SPOT01	**0.999886**	0.000203	4922.607	0.0000

R-cuadrado	0.970606	Media de la variable Dependiente	12.96689
R-cuadrado corregido	0.970606	D.T. de la variable dependiente	0.415329
S.E. de regresión	0.071206	Criterio de información Akaike	-2.445105
Suma de cuadrado de los residuos	3.696266	Criterio de Schwarz	-2.438813
Log probabilidad	893.4632	Criterio de Hannan-Quinn	-2.442677
Estadístico de Durbin-Watson	1.896894		
Raíz Invertida AR	1.00		

Elaboración propia con E-views 8

Con el valor del coeficiente alfa α, determinado por la variable SPOT01 (tabla 2), se resuelve la ecuación $Fix_t = \alpha\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, el cual se multiplica por el último dato observado del periodo 2012-2013, obteniendo un valor de $S_1 = 13.0750$. Para los siguientes pronósticos del tipo de cambio spot se realiza el mismo procedimiento que se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. Cálculo tipo de cambio spot

Tipo de Cambio Spot	
cálculo futuro de S_1 a S_4 coeficiente $\alpha = 0.999886$	
Resolviendo la ecuación $\boldsymbol{Fix_t = \alpha\, Fix_{t-1} + \varepsilon_t}$	Se obtiene:
S_1	13.0750
S_2	13.0735
S_3	13.0720
S_4	13.0705

Elaboración propia

La tasa de interés doméstica se calculará trimestralmente, hasta llegar al periodo T, tomando como base Cetes a 91 días. El cálculo se hará a través de un modelo AR (1) de la forma $r_t = \beta r_{t-1} + \varepsilon_t$ (tabla 4). El valor del coeficiente está determinado por la variable CETE01 con un valor de **0.997233,** el cual refleja la proporción de la variación de la variable dependiente que puede explicarse por el modelo.

Tabla 4. Tasa de interés doméstica CETES primer trimestre

Variable Dependiente: CETES	Método: Mínimos Cuadrados	Fecha: : 10/30/14	Muestra (ajustada): 1/12/2012 12/26/2013	
Observaciones incluidas: 103 después de los ajustes				
Variable	Coeficiente	Desviación Típica	Estadística T	Prob.
CETES01	**0.997233**	0.001262	790.2774	0.0000
R-cuadrado	0.976929	Media de la variable dependiente		4.090583
R-cuadrado corregido	0.976929	D.T. de la variable dependiente		0.347052
S.E. de regresión	0.052715	Criterio de información Akaike		-3.038186
Suma de cuadrado de los residuos	0.283441	Criterio de Schwarz		-3.012606
Log probabilidad	157.4666	Criterio de Hannan-Quinn		-3.027826
Estadístico de Durbin-Watson		1.804557		
Raíz Invertida AR		1.00		

Elaboración propia con E-views 8

Con el coeficiente determinado por la variable CETES01 (tabla 4), se resuelve la ecuación $Fix_t = \alpha\, y_{t-1} + \varepsilon_t$, el cual se multiplica por el último dato observado del periodo 2012-2013, obteniendo un valor de $r_1 = 3.29$ en el primer trimestre, este procedimiento se empleará para los siguientes periodos: r_2, r_3, r_4 y se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Cálculo tasa de interés doméstica Cetes

Tasa de interés doméstica Cetes	
cálculo futuro de r1 a r4	
coeficiente β1= 0.997233	
Resolviendo la ecuación	**Obtenemos:**
$\boldsymbol{r_t = \beta r_{t-1} + \varepsilon_t}$	
$\mathbf{r_1}$	3.290869%
$\mathbf{r_2}$	3.281763%
$\mathbf{r_3}$	3.272682%
$\mathbf{r_4}$	3.263627%

Elaboración propia

La tasa de interés extranjera $\boldsymbol{r_f}$, se calculará trimestralmente, hasta llegar al periodo T, tomando como base la tasa T-bill 90 días a partir de un modelo AR (2) de la forma $y_t = \alpha + \beta_1\, y_{t-1} + \beta_2\, y_{t-2} + \varepsilon_t$ (tabla 6).

Tabla 6. Tasa de extranjera T-bill primer trimestre

Variable Dependiente: Treasury bill	Método: cuadrados ordinarios	Mínimos	Fecha: 10/30/14	Muestra (ajustada): 1/16/2012 12/30/2013
Observaciones incluidas: 103 después de los ajustes				
Variable	Coeficiente	Desviación Típica	Estadística T	Prob.
TBILL1	**0.688747**	0.094824	7.263405	0.0000
TBILL2	**0.297215**	0.095180	3.122657	0.0023
R-cuadrado	0.682387	Media de la variable dependiente		0.062427
R-cuadrado corregido	0.679242	D.T. de la variable dependiente		0.026289
S.E. de regresión	0.014889	Criterio de información Akaike		-5.557178
Suma de cuadrado de los residuos	0.022390	Criterio de Schwarz		-5.506018
Log probabilidad	288.1947	Criterio de Hannan-Quinn		-5.536456
Estadístico de Durbin-Watson	1.929216			
Raíz Invertida AR	.99	-.30		

Elaboración propia con E-views 8

Como se puede observar en la tabla 6, el valor de beta (β_1) de **0.688747** y de beta (β_2) de **0.297215** se utiliza para obtener el valor de $r_f = 0.0592$. Este procedimiento se empleará para los siguientes periodos (tabla 7).

Tabla 7. Cálculo de la tasa de interés extranjera t-bill.

Tasa de interés extranjera t-bill		
cálculo futuro de rf1 a rf4		
coeficiente β1= 0.688747 y β2= 0.297215		
Resolviendo la ecuación		
$\mathbf{y_t = \alpha + \beta_1\, y_{t-1} + \beta_2\, y_{t-2} + \varepsilon_t}$		Obtenemos:
rf1	0.0592	
rf2	0.0583	
rf3	0.0575	
rf4	0.0567	

Elaboración propia con E-views 8

La tabla 8, muestra de manera general los resultados de las variables pronosticadas que se utilizarán en la fórmula de Black-Scholes para determinar el precio futuro de la opción installment en un año, en periodos comprendidos trimestralmente.

Tabla 8. Variables pronosticadas

Periodo	Tipo de cambio spot, $\boldsymbol{S_0}$	Tipo de cambio pactado, K	Volatilidad, $\boldsymbol{\sigma}$	Tasa de interés doméstica, r	Tasa de interés extranjera, $\boldsymbol{r_f}$
$\mathbf{t_0}$	13.0750	13.0030	12.53%	3.290869%	0.0592
$\mathbf{t_1}$	13.0735	13.0545	12.53%	3.281763%	0.0583
$\mathbf{t_2}$	13.0720	13.0670	12.53%	3.272682%	0.0575
T	13.0705	13.0800	12.53%	3.263627%	0.0567

Elaboración propia

Para realizar la valuación de una opción call de divisa tipo installment, con las variables pronosticadas en la tabla 8 se procede a determinar los valores de N. Los términos N corresponden a la función estandarizada de distribución normal de probabilidades, son lo que establecen las probabilidades de ocurrencia de los valores So y K.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{13.0750}{13.0030}\right) + \left(0.0329 - 0.0592 + \frac{0.1253^2}{2}\right)0.25\right] / 0.1253\sqrt{0.25}$$

$\boldsymbol{d_1} = 0.0146$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0.0146 - 0.1253\sqrt{.25}$$

$\boldsymbol{d_2} = 0.0481$

En la tabla 9 se concentran los resultados obtenidos d_1 y d_2 para los siguientes periodos.

Tabla 9. Valores de la variables $\boldsymbol{d_1}$ y $\boldsymbol{d_2}$

Periodo	$\boldsymbol{d_1}$	$\boldsymbol{d_2}$
$\mathbf{t_0}$	0.0146	-0.0481
$\mathbf{t_1}$	-0.0831	-0.1717
$\mathbf{t_2}$	-0.1134	-0.2220
T	-0.1352	-0.2605

Elaboración propia

De tal forma que el periodo t_0 queda:

$$c = 13.0750e^{-0.059(0.25)}N(0.0146) - 13.003e^{-0.0329(.25)}N(-0.0481)$$

c =0.3154

Una vez obtenido el valor de la opción de compra installment para el periodo T_0 aplicando la ecuación 2, de igual manera se sustituyen para los siguientes periodos el tipo de cambio Spot,

tipo de cambio de ejercicio, la volatilidad, las tasas de interés doméstica y extranjera y los valores de N (d_1 y d_2). Los siguientes periodos se encuentran enlistados en la tabla 10.

Tabla 10. Precio de la opción installment

Periodo	Precio de la opción de compra installment
$\mathbf{t_0}$	0.3154
$\mathbf{t_1}$	0.3828
$\mathbf{t_2}$	0.4394
$\mathbf{T}$	0.4819

Elaboración propia

Mediante la siguiente fórmula se calculará el vector de primas para obtener la prima total de un año de vida en periodos trimestrales de la opción installment. La fórmula indica el valor de la prima a valor presente.

$$c = c_0 + c_1 e^{-rT_1} + c_2 e^{-rT_2} + Ce^{-rT} \qquad (5)$$

Tabla 11. Vector de primas installments

Periodo	Precio de la prima
$\boldsymbol{c_0}$	0.3154
$\mathbf{c_1 e^{-rT_1}}$	0.3735
$\mathbf{c_2 e^{-rT_2}}$	0.4322
$\mathbf{Ce^{-rT}}$	0.4779

Elaboración propia

Como puede observarse en la tabla 11, entre más lejana esté la fecha de vencimiento de una opción, mayor incertidumbre habrá sobre los movimientos del precio del activo subyacente lo que incrementa el valor de la prima de la opción. A mayor tiempo se incrementa la posibilidad que la compra de opciones resulte con beneficios para el comprador con lo que el vendedor pedirá más dinero por la venta.

4.1 Caso de Estudio

Camexi, S.A. de C.V, es una empresa mexicana importadora y exportadora, que requiere de una cobertura ante el riesgo que le representa el tipo de cambio. La empresa tiene pasivos en dólares americanos por pagar a lo largo del año 2014 y ha contemplado la compra de una opción installment con la cual se pretende proteger contra un aumento del tipo de cambio.

Camexi, S.A. adoptará la estrategia minimización de la prima, la cual utilizará la opción modalidad installment para la obtención de una prima inicial baja y fácil de programar en el presupuesto de la empresa.

La estructura de pasivos de la empresa para el año 2014 implica un pago de 400 mil dólares en cada uno de los cuatro trimestres.

Se retomarán las bases y resultados de la evaluación de la opción installment por el método de Black Scholes para aplicarlos a esta empresa y así observar de manera más detallada cómo y para qué sirven este tipo de opciones.

En la tabla 12 se muestra los resultados, se puede apreciar como el costo de la prima va de menor a mayor, los cual indica que los tres primeros trimestres los pagos de las primas pueden ser factibles para la empresa que desee cubrirse contra un aumento en el tipo de cambio.

Tabla 12. Costo de la prima de la opción installment por el método Black-Sholes

Periodo	Pasivos	Prima	Total a pagar para asegurar el tipo de cambio
t_o	400,000	0.3154	126,152
t_1	400,000	0.3735	149,393
t_2	400,000	0.4322	172,898
T	400,000	0.4779	191,165

Elaboración propia

Se muestra el comportamiento del precio de la prima de la opción installment, donde se refleja una relación positiva ya que a medida que el número de pagos aumenta, el precio de la opción también aumenta (tabla 12).

A continuación se mostrará los costos de operación que incurrirá la empresa con y sin contrato installment los cuales se toman como referencia para elegir los momentos adecuados para ejercer esta opción. Los montos y las diferencias están expresados en pesos mexicanos (tabla 13).

Tabla 13. Comparativo de los montos de la empresa con y sin contrato de opción installment

Trimestre	Cobertura	Tipo de Cambio	Pasivos	Monto	Diferencia
1					
	Sin Opción	13.0750	400,000.00	$5,230,000.00	$28,800.00
	Con Opción	13.0030	400,000.00	$5,201,200.00	
2					
	Sin Opción	13.0735	400,000.00	$5,229,440.00	$ 7,600.00
	Con Opción	13.0545	400,000.00	$5,221,800.00	
3					
	Sin Opción	13.0720	400,000.00	$5,228,800.00	$ 2,000.00
	Con Opción	13.0670	400,000.00	$5,226,800.00	
4					
	Sin Opción	13.0705	400,000.00	$5,228,200.00	$ - 3,800.00
	Con Opción	13.0800	400,000.00	$5,232,000.00	

Elaboración propia

Como puede observarse en los tres primeros trimestres conviene ejercer la opción ya que hay una diferencia positiva a favor de la empresa, a diferencia del cuarto trimestre, en el que se tendría una pérdida de $3,800 pesos si se ejercería la opción, por lo que conviene dar por terminado el contrato antes del último trimestre.

5. Conclusiones

La volatilidad monetaria en el mundo reduce el margen que tienen las empresas para ajustar sus estrategias de negocios debido a un entorno complicado.

En ese contexto, los productos derivados han cobrado importancia para las empresas que los pueden emplear como instrumentos de cobertura debido a que tienen un límite de pérdida potencial equivalente al precio de la misma. Las opciones en particular, son utilizadas para ajustar el riesgo y rendimiento de una posición determinada a un costo muy bajo y le permite a la empresa cubrirse de los riesgos que generan movimientos en variables económicas.

La opción installment en su caso, permite asegurar cierta estabilidad para operaciones con divisas, protegiendo así a su tenedor de las fluctuaciones del mercado cambiario. La prima de una opción se ve influida constantemente por factores exógenos (precio del subyacente, volatilidad, dividendos y la tasa de interés) y por factores endógenos (plazo y el precio de ejercicio) por lo que resulta interesante medir a través de un parámetro, como pudiera ser la vida del contrato, los efectos que tiene sobre la prima de una opción los cambios en un factor específico.

Como se pudo observar en el caso de estudio, al contratar una opción installment la empresa puede prever un aumento en el tipo de cambio, los montos a los que asciende el pago de las primas y cómo se podrían ver afectados sus flujos de efectivo si no hubiera contratado opciones.

Actualmente, el mercado mexicano de derivados sólo se tiene contratos de opciones de divisas tipo europeo del dólar de los Estados Unidos de América, a través del análisis que se realizó a las opciones installments se ha demostrado su efectividad como instrumento de cobertura ante el riesgo cambiario, por lo consiguiente se propone la modalidad installment como una alternativa en el listado de MexDer en términos de la disposición de ejercer la opción.

Bibliografía

Aabo, T. (2006). “The Importance of Corporate Foreign Debt As an Alternative to Currency Derivatives in Actual Management of Exchange Rate Exposures”, *European Financial Management*, 12(4), 635-649.

Allayannis, G. y Ofek, E. (2001): "Exchange Rate Exposure, Hedging, and the Use of Foreign Currency Derivatives", *Journal of International Money and Finance,* 20, 273-296.

Allayannis, G. y Weston, J. P. (2001). The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value. *Review of Financial Studies,* 14(1), 243-276.

Anton, M., Anton P. y Ehrhardt M. (2010). Efficient Numerical Valuation of Continuous

Installment Options. Adv. Appl. Math. Mech., 20.

Arango, E. y Arroyave, J. (2011). "Swaps de tasa de interés y de cruce de monedas como herramientas de cobertura para las empresas colombianas*". Revista EIA*, ISSN 1794-1237 Número 16, p. 189-205. Diciembre 2011. Escuela de Ingeniería de Antioquia, Medellín (Colombia)

Bartram, S. M.; Brown, G. W. & Fehle, R. F. (2003): "International Evidence on Financial Derivatives Usage", Working Paper, Kenan-Flagler Business School, University of North Carolina at Chapel Hill.

Berkman, H. y Bradbury, M. (1996): "Empirical Evidence on the Corporate Use of Derivatives", *Financial Management,* 25, 5-14.

Bessembinder, H. (1991): "Forward Contracts and Firm Value: Investment Incentive and Contracting Effects", *Journal of Financial and Ouantitative Anaiysis,* 26 (4), 519-532.

Castillo, A. y Moreno, D. (2008). "Uso de derivados cambiarios y su impacto en el valor de empresas: el caso de empresas chilenas no financieras". *Estudios de Administración*. 15, pp. 1-30.

Clark, E.A. y Judge, A. (2008). "The Determinants of Foreign Currency Hedging: Does Foreing Currency Debt Induce a Bias?".*European Financial Management Journal*. 14(3), 445-469.

Clavijo, W. y Roberto, K. (2009). "Las operaciones de cobertura y sus efectos fiscales". *Revista Impuestos*, vol. 153 (mayo-junio), pp. 22-25.

Cowan, K., Hansen, E. y Herrera, L. (2006), "Currency Mismatches in Chilean Nonfinancial Corporations", en *External Vulnerability and Preventive Policies,* editado por Banco Central de Chile.

DeMarzo, P. y Duffie, D. (2002). "Corporate incentives for hedging and hedge accounting". *Review of Financial Studies,* 8 (3), 743-71.

Fernández, V. (2001), "The Derivatives Market in Latin America with emphasis on Chile",

Working Paper, Universidad de Chile, Departamento de Ingeniería Industrial.

Fok, R., Carroll, C. y Chiou M. (1997): "Determinants of corporate hedging and derivatives: A revisit". *Journal of Economics and Business,* 49, 569-585.

Gay, C y Nam, J. (1998): "The Underinvestment Problem and Corporate Derivatives Use", *Financial Management,* 27 (4), 53 - 69.

Géczy, C; Minton, B.A. y Schrand, C. (1997): "Why Firms Use Currency Derivatives", *Journal of Finance, 52,* 1323-1354.

Graham, J. y Rogers, D. (2002). "Do firms hedge in response to tax incentives?" *The Journal of Finance*, 57(2), 815-839.

Guay, W. y Kothari, S.P. (2003). "How much do firms hedge with derivatives?" *Journal of Financial Economics*, 70(3), 423-461.

Gyoshev, S.B. (2001). "Synthetic repurchase programs through put derivatives: theory and evidence. Drexel University.

Hagelin, N. y Pramborg, B. (2004): "Hedging Foreign Exchange Exposure: Risk Reduction from Transaction and Traslation Hedging", *Journal of International Financial Management and Accounting,* 1 5(1), 55-69.

Haushalter, G.D. (2000): "Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging: Evidence from Oil and Gas Producers", *Journal of Finance,* 55 (1), 107-152.

Hull C. Jhon, (2009*), Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*, Madrid, Pearson Educación, ed.

Jorion, P. (1990). "The Exchange Rate Exposure of U.S. Multinationals". *Journal of Business*. 13(11), 375-386.

Kedia, S. y Mozumdar, A., 2003: "Foreign currency – denominated debt: An empirical examination", *Journal of Business*, 76, 521-546.

Lamothe, P., Pérez, M. (2003). *Opciones financieras y productos estructurados*. España: Mc Graw Hill.

Lemes, P., Jurandyr, S. y Rossi, J. (2013), "Swap, Futuro e Opções: Impacto do uso de Instrumentos Derivativos sobre o valor das firmas Brasileiras". *Ram, Rev. Adm. Mackenzie*. 14(1), 126-142.

Levi, M. (2006). *Finanzas Internacionales*. Mc Graw Hill. 3era. Edición.

Lin, C. y S. Smith (2005). "Hedging, Financing and Investment Decisions: a Simultaneous Equations Framework", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper Series.

Madura, J. (2009). *Administración Financiera Internacional*. CENGAGE, Learning. 9ª. Edición.

Mayers, D. y Smith Jr., C. W. (1982). "On the corporate demand for insurance". *Journal of Business, 55 (2), 281-296*.

Mian, S. L. (1996): "Evidence on Corporate Hedging *Policy", Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 31 (3) ,419-439.

Modigliani, F. y Miller, M. (1958). "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment". *The American Economic Review,* 48, 261-97.

Muller, A. y Verschoor, W. (2006). "The Impact of Corporate Derivative Usage on Foreign Exchange Risk Exposure", *Journal of Multinational Financial Management*. 16(4), 385-410.

Nain, A. (2005). *The strategic motives for corporate risk management*. Job Market Paper. Department of Finance, University of Michigan.

Nance, D. R.; Smith, C. W. y Smithson, C. (1993): "On the Determinants of Corporate Hedging", *Journal of Finance*. 48, 267-284.

Nguyen, H. y R. Faff (2002). "On the Determinants of Derivative Usage by Australian Companies". *Australian Journal of Management*, 25(1), 1-24.

Ochoa, I. y González, C. (2007). "Evaluación del mercado de opciones sobre tasas de cambio: perspectivas para una mejor utilización". *Revista EIA*, (7), 145-158.

Otero, L A. y Fernández, S. (2005): "Factores determinantes de la utilización de productos derivados en el sector asegurador español". *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*. 14 (3), 135-148.

Ross, Westerfield, Jaffe (2005), *Finanzas Corporativas*, 7ª. Edición. México: Mc Graw Hill/Interamericana de México.

Sierra, J. y Londoño, D. (2010). "Cobertura con derivados en empresas manufactureras colombianas: análisis previo a la apertura del mercado de derivados en la bolsa de valores de Colombia". *Cuad. Adm. Bogotá (Colombia),* 23 (41): 237-260. Universidad Javeriana.

Smith, C. W. y Stulz, R. M. (1985): "The Determinants of Firms' Hedging Policies", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 20 (4), 391 -405.

Stulz, R. (1984): "Optimal Hedging Policies", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 19 (2), 127-140.

— (1990). "Managerial Discretion and Optimal Hedging Policies". *Journal of Financial Economics* 26:1:3-27.

Venegas Martínez Francisco, (2008), *Riesgos Financieros y Económicos, Productos Derivados y Decisiones Económicas Bajo Incertidumbre*, México, Cengage Learning, 2ed.

Vivel, M., Otero, L., Fernández, S. y Duran, P (2009): "Análisis de la decisión de cobertura cambiaria a través del endeudamiento en divisa en el mercado español". *Revista española de financiación y contabilidad*. 38 (144), 607- 645.

Vivel, M., Otero, L., Fernández, S. y Duran, P (2012): "La decisión de cobertura del riesgo cambiario en las empresas españolas internacionales". *Revista de Economía Mundial*. 30, 233-268. España.

Wystup, U. (2004), FX Instalment Options, Goethe-University.

CAPÍTULO V

Flight to quality, como canal de transmisión de volatilidad entre el S&P500, el tipo de cambio usd/gbp, y el mercado del oro.

Salvador Cruz Aké

Instituto Politécnico Nacional – ESE

Juan César Cabrera Avellaneda

Instituto Politécnico Nacional–ESE

Claudia Estrella Castillo Ramírez

Universidad de las Américas Puebla

Resumen

La recomposición de los portafolios de inversión en momentos de alta incertidumbre es una práctica común entre algunos inversionistas que desean salvaguardar el valor de sus portafolios aumentando su exposición a activos considerados seguros. Tradicionalmente esta recomposición incluye activos de reserva de valor, especialmente el oro. En este trabajo se encuentra evidencia empírica sobre los efectos de derrame de volatilidad existentes entre los rendimientos del S&P500, los rendimientos del tipo de cambio USD/GBP y rendimiento del precio del oro, resultado de este rebalanceo. El uso de un modelo VARMA-GARCH permite separar los efectos de media de los rendimientos de los activos analizados, las volatilidades y los efectos de derrame del sistema. En este trabajo, se muestra evidencia empírica de que la volatilidad asociada al *Flight to Quality* se origina en el mercado accionario, se transmite al mercado de divisas y posteriormente se refleja en los rendimientos del oro, el cual absorbe parte de los efectos de volatilidad de todo el sistema. Estos efectos de derrame de volatilidad pueden cambiar el sentido de las correlaciones entre los mercados analizados, tal y como ocurrió en la parte más álgida de la crisis *Subprime*.

Palabras Clave: Flight to quality, VARMA – GARCH, derrame de volatilidad

Clasificación JEL: C22, E39, C32

1. Introducción

La aparente simplicidad de los efectos de las decisiones económicas realizadas por los individuos, rápidamente es refutada por las consecuencias no previstas de sus actos. Así pues, la complejidad que surge de las elecciones individuales, las cuales se agregan para crear características no esperadas del sistema. Para mayores detalles véase (Harrison & Moore, 2012)

Nuestro análisis inicia tomando como dado el hecho de que cuando un inversionista construye su cartera de inversión, lo hace intentando maximiza su beneficio, sujeto a la cantidad de riesgo que considera tolerable. De tal suerte que, cuando las condiciones cambian, es necesario que el agente económico altere su portafolio para adaptarlo a las nuevas condiciones de riesgo percibido. Esta idea es congruente con la visión tradicional de la formación de portafolios que se inicia con el trabajo de (Markowitz, 1952) y que se ha desarrollado hasta hoy con trabajo como los de (Bermúdez, et al., 2012) o (DeMiguel, et al., 2013), entre muchos otros.

Estos rebalanceos de portafolio suelen estar asociados a un comportamiento no lineal cuando ocurren en épocas de turbulencia financiera, tal como lo indican (Chan, et al., 2011) (Harrison & Moore, 2012) o (Hoevenaars, et al., 2014). Cuando esta turbulencia es sostenida y generalizada, los rebalanceos del portafolio se extienden incluso a los mercados de divisas cuando los inversionistas buscan diversificar geográficamente su riesgo o regresar a mercados que consideran estables (usualmente los mercados de origen de estos agentes económicos), para mayores detalles sobre este fenómeno véase (Heathcote & Perri, 2013), (Beugelsdijk & Frijns, 2010) o (Anderson, et al., 2011).

Relacionado con este fenómeno de sesgo hacia el mercado de origen, algunos autores como (Knowles, et al., 2013), (Chaudhuri, et al., 2012) o (Ehrmann, 2011) quienes afirman que otros factores relacionados a la similitud cultural o relaciones comerciales fuertes con otras entidades financieras, también afecta la forma en la que se re balancean los portafolios. Ante esta evidencia empírica, parece lógica la estrecha relación entre los mercados financieros de los Estados Unidos de Norte América (USA) y los del Reino Unido (UK), donde además se encuentra el principal mercado de oro *spot*, el *London Bullion Market Association (LBMA)* en el cual el oro se comercia

por onzas en una pureza de 24 quilates[1] o en lingotes, además de uno de los mayores mercados de futuros de oro, el *London Metal Exchange*.

La adquisición de *commodities* como el oro o sus futuros (comerciados principalmente en Londres), con la finalidad de salvaguardar el valor de un portafolio en momentos de alta volatilidad es conocido como *Flight to quality*. Es importante señalar, que aunque este fenómeno de rebalanceo del portafolio hacia instrumentos con un valor intrínseco (valor industrial o artesanal) para tratar de aminorar las perdidas, incluso obtener alguna ganancia mediante el arbitraje está principalmente ligado al oro, se puede generalizar a los *commodities* en general. Para profundizar en el estudio del oro como activo de reserva véase (Smith, 2001), (Baur & Lucey, 2010) o (Baur & McDermott, 2010).

Tal y como se estableció previamente, existen otros *commodities* o sus futuros que son usados como reserva de valor a pesar de ser mercados que usualmente presentan una situación de contango[2], la cual tiende a disminuir, e incluso revertirse en épocas de alta volatilidad. Ejemplo de esto son: el paladio, el platino, la plata, el cobre, incluso algunos inversionistas han utilizado el hierro como reserva de valor, para más detalles del uso de los *commodities* en portafolios de inversión, véase (Daskalaki & Skiadopoulos, 2011), (Belousova & Dorfleitner, 2012) o (Cumming, et al., 2014).

En este estudio, sólo se analizará el caso del oro, en cuyo caso en particular se acentúa la propiedad de ser *commodity-driven*, *i.e*. es fácilmente convertible en dinero o intercambiable, además de tener una fuerte correlación negativa con los precios de las acciones. Para más detalles sobre la discusión sobre la liquidez del oro como activo de portafolios véase (Hillier, et al., 2006), (Hammoudeh, et al., 2011) o (Charles, et al., 2015), mientras que estudios sobre su correlación negativa con los instrumentos de capital se puede encontrar en (Bhar & Hammoudeh, 2011), (Akram, 2009) o (Agyei-Ampomah, et al., 2014).

[1] En orfebrería, un quilate representa 1/24 de la masa total de la aleación que compone el metal.
[2] El término contango describe una situación en la que el precio del futuro sobre el activo es más alto que el precio futuro esperado del *spot*. Esta situación está usualmente relacionada a costos de mantenimiento (*convenience yield*).

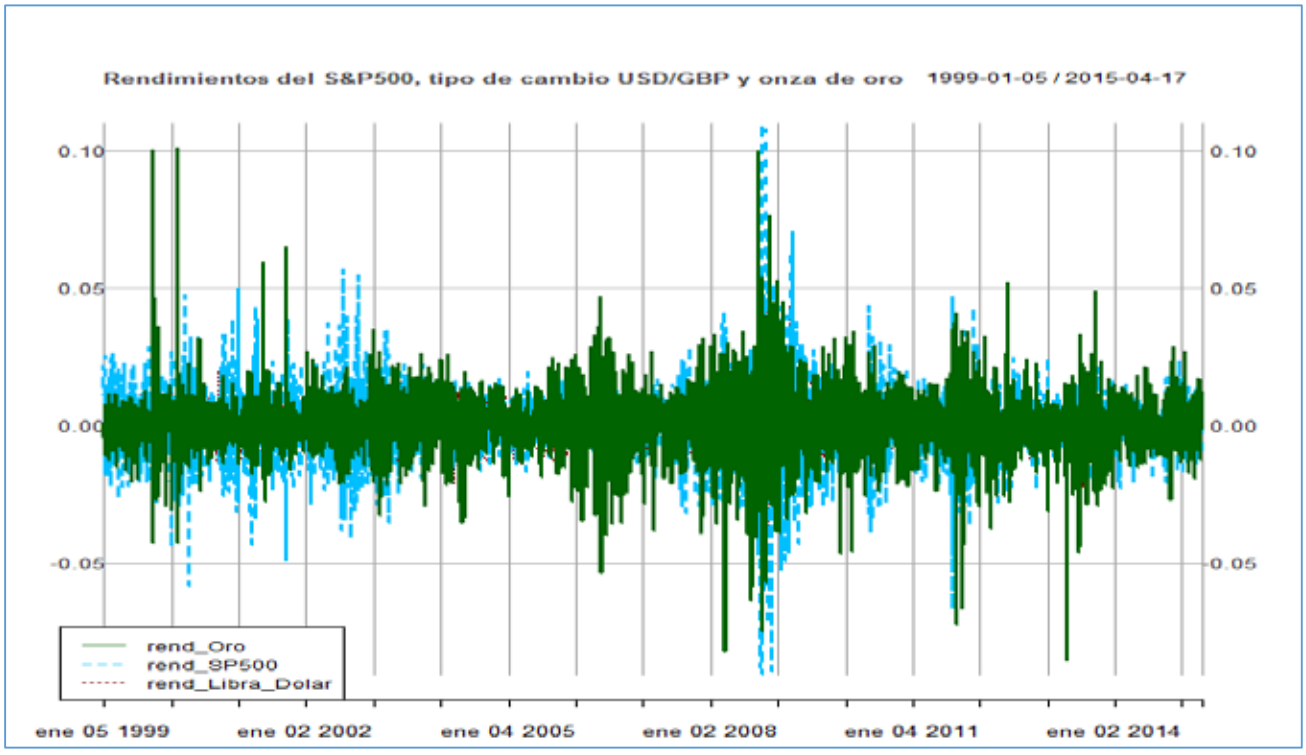
La elección de los rendimientos del índice S&P500 y el oro no es del todo arbitraria, pues existen varias empresas industriales[3] incluidas en el índice que usan el oro en forma de lingote (cuyo precio es fuertemente influenciado por el *World Gold Council*) como insumo y que por tanto también capturan el efecto del precio del oro (como insumo) sobre la industria.

Una vez establecida la relación existente entre el rebalanceo de los portafolios ante entornos de alta volatilidad persistente, que este rebalanceo usualmente incluye *commodities* como el oro dada su liquidez y una aparente correlación negativa con el resto del portafolio, y que el mercado del oro está parcialmente concentrado en el Reino Unido, parece natural la inclusión del tipo de cambio del dólar estadounidense con la libra esterlina como puente entre ambos mercados tal y como se propone en nuestro trabajo. Es importante hacer notar que esta relación ha sido previamente estudiada (incluyendo factores como el comercio exterior y otros mercados) en trabajos como los de (Lucey & Tully, 2006), (Officer, 2007) o (Pukthuanthong & Roll, 2011), donde se incluyen aspectos monetarios del uso del oro, pues este es usado y atesorado por los bancos centrales como reserva de valor.

Con la finalidad de analizar las relaciones existentes entre los rendimientos del S&P500, del tipo de cambio usd/gbp y del precio de la onza de oro en forma de lingote, se muestra la gráfica 1. En esta gráfica se aprecia que los rendimientos promedio de los tres mercados son cercanos a cero, que existen agrupamientos de volatilidad y varios valores extremos, los cuales aparentemente están relacionados.

[3] Estas empresas se encuentran en ramas tan disímbolas como la joyería, tecnologías, industria aeroespacial, medicina, entre otras.

Gráfica 1 Rendimientos del S&P500, tipo de cambio gbp/usd y onza de oro. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis.



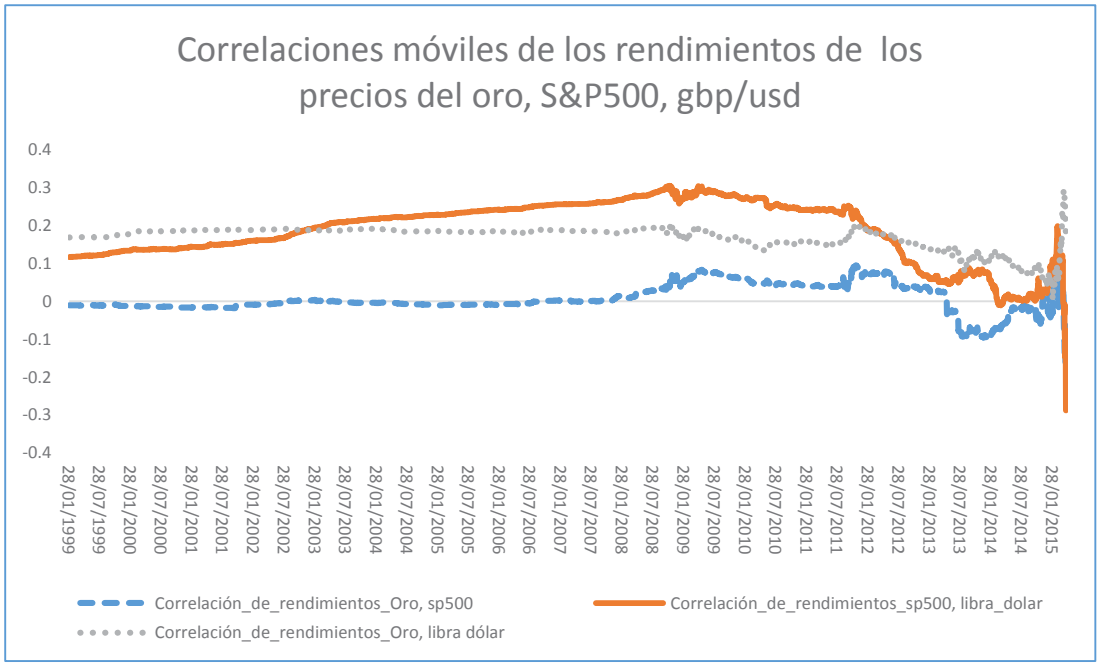
Todas las características antes mencionadas (valores extremos, agrupamientos de volatilidad y relaciones no lineales de contagio entre los tres mercados) impiden la aplicación de métodos econométricos tradicionales. En efecto, un modelo ARIMA (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) como el propuesto por (Box, et al., 1970) y (Box & Jenkins, 1973) sólo captura las dependencias lineales del problema, dejando de lado las interrelaciones en media y varianza, además de todos los valores aberrantes, pues se fundamenta en el supuesto de normalidad de las innovaciones.

Por otra parte, los modelos de la familia GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity); iniciados por (Engle, 1982) y (Bollerslev, 1986), en algunas de sus variadas versiones son capaces de analizar tanto la media como la volatilidad de las series, lo que captura incluso efectos asimétricos en los agrupamientos de volatilidad. Incluso estos modelos son

capaces de incorporar distribuciones no normales[4] a las innovaciones y por ende incorpora la información proporcionada por los valores extremos de la muestra, Ejemplos de su aplicación a los mercados analizados se pueden encontrar en (Ding, et al., 1993), (Tully & Lucey, 2007) o (Shaikh, et al., 2014). Mientras que un excelente compendio de esta familia de modelos es el trabajo de (Karlsson, 2002).

Desafortunadamente, estos modelos son univariados, por lo que, sin importar su sofisticación, no son capaces de capturar los efectos de derrame de volatilidad que se presentan entre los rendimientos de los mercados del Oro, Libra/Dólar, S&P500. A lo largo de este trabajo, se presentará evidencia empírica que comprobará los derrames de volatilidad entre ellos y que la asociará al fenómeno del *Flight to quality*. Con el fin de iniciar el análisis, se muestra en la gráfica 2 la correlación serial dinámica a 30 días existente entre los tres mercados estudiados.

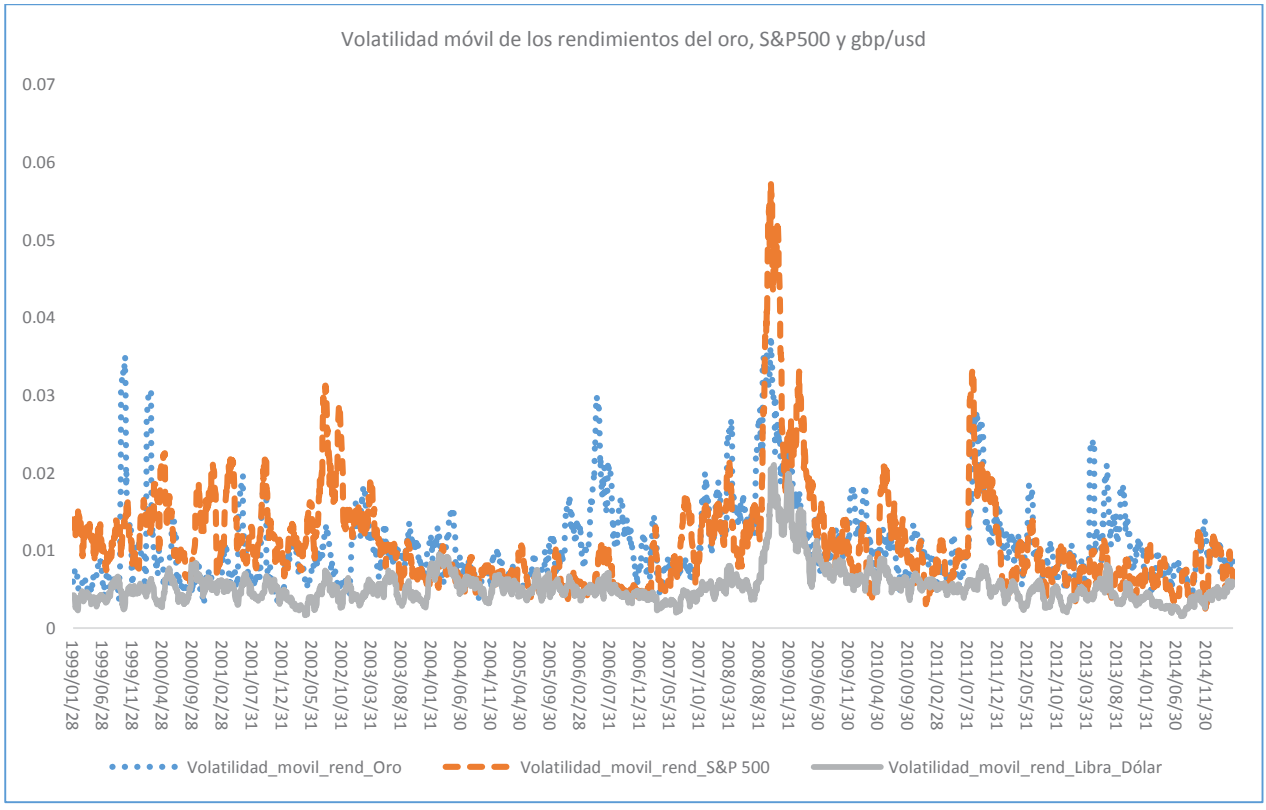
Gráfica 2 Correlación serial entre los rendimientos del oro en lingote, el tipo de cambio libra esterlina/dólar estadounidense y el índice S&P500. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis



[4] El paquete fGarch (Wuertz, et al., 2013) de R (R Core Team, 2014), es capaz de modelar las siguientes distribuciones condicionales: normales, t de student (con y sin sesgo) y generalizadas de valores extremos (con y sin sesgo).

En la gráfica 2 se observa la no linealidad de las correlaciones cruzadas entre los mercados a partir de 2008, lo que implica derrames no constantes ni en sentido ni en fuerza. También resulta llamativa la simetría de la relación (hasta 2013) de la correlación entre los rendimientos del oro con los del S&P500 y la correlación de los rendimientos del oro con los del tipo de cambio libra/dólar (gbp/usd), la cual se invierte después de este periodo y no parece regresar a sus valores habituales sino hasta los últimos días de la muestra[5]. Del mismo modo, la relación entre la correlación de los rendimientos del S&P500 y el tipo de cambio gbp/usd invierten su relación con la correlación de los rendimientos del oro y el tipo de cambio gbp/usd a mediados de 2013.

Gráfica 3 Desviación estándar móvil de los rendimientos del Oro, S&P500 y tipo de cambio gbp/usd. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis.



[5] Se aprecia una tendencia a regresar a sus valores habituales, pero esta tendencia no ha sido confirmada.

Por otra parte, la gráfica 3 muestra las desviaciones estándar de las tres series analizadas. En ella es posible observar agrupamientos de volatilidad alrededor de las principales épocas de turbulencia financiera de las dos últimas décadas, junto con valores extremos dentro de cada uno de estos agrupamientos de volatilidad. También resulta llamativo que la volatilidad es asimétrica a lo largo de toda la muestra, pues es mayor en momentos de alta incertidumbre y que esta parece tener un ligero rezago entre los mercados, lo que implicaría una causalidad entre las volatilidades, aunque esto aún deberá ser comprobado empíricamente.

Este somero análisis de los datos hace patente la necesidad de un modelado que permita captar tanto los agrupamientos de volatilidad asimétricos como los valores extremos y las contaminaciones que se dan entre los mercados, posiblemente dado por movimientos de transmisión de corto plazo como los estudiados por (Ortiz, et al., 2007). Todas estas características conducen a una familia de modelos conocida como GARCH multivariados. Esta clase de modelos inició con el trabajo de (Bollerslev, et al., 1988) en el cual la volatilidad de las series analizadas podía ser expresada como una función de sus innovaciones pasadas y de sus productos cruzados.

Esta clase de modelos ha seguido evolucionando hasta hoy, dando lugar a derivaciones como el modelo de Correlación Condicional Dinámica[6] (DCC) propuesto por (Engle, 2002) o la versión de (Cappiello, et al., 2006) que es la usada en este trabajo el cual hace uso del algoritmo de R creado por (Wuertz, et al., 2013). Este tipo de modelos también ha derivado en el uso de cópulas; como las usadas por (Patton, 2006) y (Jondeau & Rockinger, 2006) para el modelado de la dependencia entre las volatilidades de la serie. Esta clase de modelado queda como futura línea de investigación. Una revisión sobre los modelos de eta familia puede encontrarse en (Bauwens, et al., 2006) o en (Su & Huang, 2010).

2. Modelos de Correlación Dinámica Condicional (*DCC*)

Heurísticamente, los modelos de Correlación Dinámica Condicional (*DCC*) pueden ser definidos como un híbrido entre los modelos de Vectores Auto Regresivos (*VAR*) propuestos por (Sims,

[6] Dinamic Conditional Correlation (DCC) en inglés.

1980) y los modelos GARCH propuestos por (Bollerslev, 1986) y (Engle, 1982). Esto es, que los modelos DCC son sistemas de ecuaciones que modelan la varianza de un sistema en dónde se permite que las innovaciones de todas las varianzas se afecten entre sí, pudiendo o no afectar la media (esto es un modelo MGACH en media desarrollado por (Engle & Kroner, 1995). En este trabajo en particular, donde las medias son estadísticamente constantes de valor cero, se usará la metodología MGARCH (*Multivariate Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity*) propuesta por (Cappiello, et al., 2006) el cual a su vez, se basa en el de (Engle, 2002), mientras que las pruebas estadísticas se basan en (Engle & Sheppard, 2001).

Es muy importante hacer notar que ni estos modelos, ni sus variantes, son una panacea. En efecto, autores como (Caporin & McAleer, 2013) hacen notar que (entre otros detalles) estos modelos en realidad modelan la covarianza condicional (aunque en el desarrollo se encuentran correlaciones), que sus parámetros pueden ser inconsistentes dada la estimación en dos etapas que se realiza, y que por tanto, los parámetros no pueden ser probados estadísticamente. A pesar de esto, se sigue realizando investigación en todo el mundo con la finalidad de mejorar el modelo.

En el modelo, se propone un vector con proceso estocástico de realizaciones $\{y_t\}$ que representa las realizaciones del sistema dado por los rendimientos del oro, el índice S&P500 y el tipo de cambio libra esterlina contra dólar estadounidense. En este caso se supone que las medias del sistema son constantes y por tanto, todos los cambios en las realizaciones provendrán de las innovaciones ε_t.

$$\begin{aligned} y_t &= \mu(\theta) + \varepsilon_t; \\ y_t &= \mu + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{1}$$

En estos modelos se supone que las innovaciones son heterocedásticas y que tienen una matriz de varianza condicional (estructura de dependencia representada por una matriz de tamaño N x N), $H(\theta)$, que depende de una serie de parámetros del modelo, θ, por estimar y es contaminada por un vector aleatorio z_t (para nuestro modelo siguen una distribución t sesgada). Esto es

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2}(\theta)\, z_t, \tag{2}$$

donde el vector aleatorio de contaminaciones no es necesariamente normal y basta con que cumpla el ser estandarizada, esto es de media dada por un vector de ceros y varianza dada por una matriz identidad. Es decir

$$E(\mathrm{z}_t) = 0 \tag{3}$$

$$Var(\mathrm{z}_t) = I_N \tag{4}$$

Dada la existencia de agrupamientos de volatilidad asimétricos combinados con la presencia ocasional de valores extremos, no es posible garantizar que el proceso estocástico multivariado analizado sea idénticamente distribuido, por lo que este supuesto se cambia por el de un proceso que es una martingala local, por lo que el proceso dependerá sólo de la información pasada, I_{t-1}. Esto lleva a la matriz de varianza condicional[7], H, a:

$$\begin{aligned} Var(y_t \mid I_{t-1}) &= Var_{t-1}(y_t), \\ &= Var_{t-1}(\varepsilon_t), \\ &= H_t^{1/2} Var_{t-1}(\mathrm{z}_t)(\mathrm{H}_t^{1/2})', \\ &= \mathrm{H}. \end{aligned} \tag{5}$$

Para el modelo *DCC*, la matriz de varianza – covarianza está dada por la descomposición de la matriz definida positiva, H, en componentes diagonalizables, D_t, que indican la forma en que las varianzas se afectan a sí mismas y otra matriz R que da los elementos constantes de los derrames entre varianzas (este es uno de los problemas del modelo).

$$\begin{aligned} &H_t = D_t R D_t, \\ &D_t = diag(h_{11t}^{1/2} .. h_{NNt}^{1/2}), \\ &R_t = diag\left(q_{11,t}^{-1/2}, \ldots, q_{\mathrm{NN},t}^{-1/2}\right) Q_t diag\left(q_{11,t}^{-1/2}, \ldots, q_{\mathrm{NN},t}^{-1/2}\right), \\ &Q_t = \left(1-\alpha-\beta\right)\bar{Q} + \alpha u_{t-1} u_{t-1}^{'} + \beta Q_{t-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

[7] Esta es una de las fuentes de discusión sobre las capacidades de los modelos DCC, se analiza la covarianza condicional, no la correlación. Aunque esta se obtiene dentro de la matriz R, no es la forma tradicional en la que se obtiene una correlación. Adicionalmente, la matriz de varianza condicional H no es igual a la incondicional (aplicando propiedad de la torre) dado que el proceso no es necesariamente una martingala dada la existencia de valores extremos. Esto es ampliamente discutido en (Caporin & McAleer, 2013).

En este caso, $\bar{Q}$ es la matriz incondicional de varianza covarianza. El resultado de este modelo es una correlación móvil de la forma

$$\rho_{1,2,t} = \frac{(1-\alpha-\beta)\bar{q}_{12} + \alpha u_{1,t-1}u_{2,t-1} + \beta q_{12,t-1}}{\sqrt{\left((1-\alpha-\beta)\bar{q}_{11} + \alpha u_{1,t-1}^2 + \beta q_{11,t-1}\right)\left((1-\alpha-\beta)\bar{q}_{22} + \alpha u_{2,t-1}^2 + \beta q_{22,t-1}\right)}}. \quad (7)$$

En este caso, las modelaciones de las varianzas incondicionales se da como un modelo GARCH (para nuestro modelo es un eGARCH, por lo que las restricciones de estos modelos permanecen).

Tal como se mencionó antes, los parámetros del modelo son obtenidos mediante un proceso de Máxima Verosimilitud en dos Etapas en el cual el proceso estocástico se asume como una Martingala local[8], lo que lleva a una ecuación de cuasi-verosimilitud dada por

$$L_T(\zeta) = \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t \middle| \zeta, I_{t-1}\right), \quad (8)$$

con una función de densidad de la forma

$$f\left(y_t \middle| \zeta, I_{t-1}\right) = \left|H_t\right|^{-\frac{1}{2}} g\left(H_t^{-1/2}\left(y_t - \mu_t\right) \middle| \eta\right), \quad (9)$$

donde $\left|H_t\right|^{-\frac{1}{2}}$ es el Jacobiano obtenido de la transformación de los datos en innovaciones. En su trabajo, (Bauwens, et al., 2006) hacen notar que a menos que la función *g (.)* pertenezca a la familia elíptica[9] (sea función de $z'_t z_t$), el estimador depende de la elección de la descomposición del Jacobiano ya que $z_t' z_t = \left(y_t - \mu_t\right)' H_t^{-1}\left(y_t - \mu_t\right)$. Para nuestro trabajo, la función de densidad *g(.)* condicionada a los parámetros del modelo que se usó en la verosimilitud está dada por una distribución t, esto es:

[8] Este supuesto puede ser rebatido si los valores extremos son tales que impidan la existencia del segundo momento, lo cual no es tan raro en los mercados financieros, trabajos que profundizan en esto son los de (Mandelbrot, 1966) y (Mandelbrot, 1971).

[9] En nuestro trabajo, lo es, pues se supone que las innovaciones vienen de un proceso *t- student* asimétrico.

$$g\left(z_t|\theta,\nu\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left[\pi\left(\nu-2\right)\right]^{\frac{N}{2}}}\left[1+\frac{z_t^{'}z_t}{\nu-2}\right]^{-\frac{N+\nu}{2}}. \tag{10}$$

Para el cálculo de la verosimilitud, (Engle & Sheppard, 2001) muestran que el cálculo de la cuasi verosimilitud puede ser escrita como la suma de la cuasi verosimilitud de la media, más la de la varianza (dependientes de un conjunto de parámetros individuales θ_1) más la de la correlación (dependiente de un conjunto de parámetros θ_2). A partir de la descomposición de la matriz condicional de varianza covarianza, H_t, dada en (6) se puede encontrar un conjunto de parámetros θ_1 ineficientes pero consistentes reemplazando la matriz R (desconocida) por una matriz identidad, con lo que la función de cuasi verosimilitud queda como:

$$QL1_T\left(\theta_1^*\right)=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left[\log\left(h_{iit}\right)+\frac{\left(y_{it}-\mu_{it}\right)^2}{h_{iit}}\right], \tag{11}$$

bajo las condiciones de regularidad dadas en su artículo, (Engle & Sheppard, 2001) muestran que los estimadores θ_2 (consistentes aunque ineficientes) se obtienen mediante

$$QL2_T\left(\theta_2^*\theta_1^*\right)=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\log\left|R_t\right|+u_t^{'}R_t^{-1}u_t\right),$$
$$u_t=D^{-1}\left(y_t-\mu_t\right).$$

En el artículo, también se muestra que la suma del valor de la cuasi verosimilitud de las ecuaciones (10) y (11) más la mitad de la suma de los residuales al cuadrado (que es muy similar a TN/2) es similar a la función de verosimilitud planteada en (8). Finalmente, también muestran que en un proceso iterativo, los estimadores se vuelven asintóticamente eficientes, con lo que las pruebas de hipótesis ya son posibles y válidas.

Resultados

El modelo aquí mostrado está hecho con datos de observaciones diarias de los rendimientos del tipo de cambio Libra/Dólar, el precio de la onza del oro para Londres (en dólares), y el índice de cotizaciones del Standard and Poor's 500, a partir de datos obtenidos de la Reserva Federal de

San Luis[10]. La muestra de datos va del 04 Enero de 1999 al 17 de Abril del 2015 (3990 observaciones completas para la muestra).

El primer paso del análisis fue garantizar la estacionariedad de las variables analizadas, para lo cual se hizo uso de la prueba KPPS propuesta por (Kwiatkowski, et al., 1992) incluida en el paquete "tseries" de R creado por (Trapletti & Hornik, 2013). Los resultados de las pruebas en niveles para las variables analizadas están mostradas en la tabla 1, mientras que las pruebas para los rendimientos de las series se muestran en la tabla 2.

Tabla 1 Pruebas de raíz unitaria KPSS para las series en niveles. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis.

Prueba de raíz unitaria KPSS, (incluye tendencia). H_0: La serie es estacionaria.				
	KPSS (Tendencia)	**Rezago para truncar**	**P-Value [11]**	**Resultado**
Oro	2.4781	14	**0.01*** **	Se rechaza
S&P 500	2.9339	14	**0.01*** **	Se rechaza
Libra Dólar	3.634	14	**0.01*** **	Se rechaza

[10] De la base de datos *Federal Reserve Economic Data (FRED)*.

[11] ***Para Niveles de significancia para el 1% de la distribución.
** Para Niveles de significancia para el 5% de la distribución.
* Para Niveles de significancia para el 10% de la distribución.

Tabla 2 Pruebas de raíz unitaria KPSS para los rendimientos de las series. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis.

Prueba de raíz unitaria KPSS, (No incluye tendencia). H_0: La serie es estacionaria.				
	KPSS (Nivel)	**Rezago**	**P-Value**	**Resultado**
Rend_Oro	0.1762	14	**>0.1***	No se rechaza
Rend_S&P500	0.1812	14	**>0.1***	No se rechaza
Rend_Libra_Dólar	0.097	14	**>0.1***	No se rechaza

Una vez que se tienen series estacionarias, es posible establecer el modelo GARCH multivariado que ajusta al sistema de derrame de varianza propuesto. Este es

Tabla 3 Resultados del modelo DCC aplicado a los rendimientos del oro, S&P500 y tipo de cambio libra/dólar. Elaboración propia con datos de la Reserva Federal de San Luis.

Parámetros del modelo DCC aplicado al fenómeno *Flight to Quality*				
Parámetro	Estimado	E. estándar	Valor t	Pr(>|t|)
[rend_Oro].mu (Constante de media)	0.00046	0.000141	3.26413	0.001098
[rend_Oro].omega (Constante de Volatilidad)	-0.119522	0.006308	-18.94717	0
[rend_Oro].alpha1 (Término ARCH)	0.043688	0.009051	4.82709	0.000001
[rend_Oro].beta1 (Término GARCH)	0.986937	0.000722	1366.85822	0
[rend_Oro].gamma1 (Parámetro localización t)	0.138774	0.02178	6.37174	0
[rend_Oro].skew (Parámetro Sesgo t)	1.010909	0.022892	44.15951	0
[rend_Oro].shape (Parámetro forma t)	5.372626	0.567087	9.47408	0
[rend_SP500].mu	0.000101	0.000111	0.91385	0.360793
[rend_SP500].omega	-0.147355	0.002628	-56.07206	0
[rend_SP500].alpha1	-0.153601	0.009761	-15.73563	0
[rend_SP500].beta1	0.983967	0.000049	20105.17857	0
[rend_SP500].gamma1	0.100917	0.005984	16.86572	0

[rend_SP500].skew	0.868384	0.017758	48.90039	0
[rend_SP500].shape	9.393806	1.170459	8.02574	0
[rend_Libra_Dolar].mu	-0.000013	0.000079	-0.16616	0.868034
[rend_Libra_Dolar].omega	-0.069421	0.001304	-53.23313	0
[rend_Libra_Dolar].alpha1	-0.017887	0.006661	-2.68537	0.007245
[rend_Libra_Dolar].beta1	0.99333	0.000062	16051.868	0
[rend_Libra_Dolar].gamma1	0.088106	0.006515	13.52268	0
[rend_Libra_Dolar].skew	0.946079	0.020013	47.27266	0
[rend_Libra_Dolar].shape	12.6305	1.970899	6.4085	0
[Joint]dcca1 (Par. derrame conjunto ARCH)	0.008302	0.001846	4.49709	0.000007
[Joint]dccb1 (Par. derrame conjunto GARCH)	0.987698	0.003042	324.65381	0
[Joint]mshape (Par. forma distr. Conjunta)	9.225601	0.684267	13.48247	0

Con la finalidad de hacer más claro el tipo de modelo altamente no lineal con el cual se atacó el problema, se muestran (en la tabla 3) las condiciones de estimación hechas para el análisis. Es importante destacar que en este trabajo se presenta el mejor modelo (el que tiene el menor criterio de Schwarz), que cumple con tener parámetros individuales significativos y pasar las pruebas tradicionales hechas a los residuales[12] (normalidad e independencia).

[12] Las pruebas están a disposición del lector interesado a vuelta de correo electrónico.

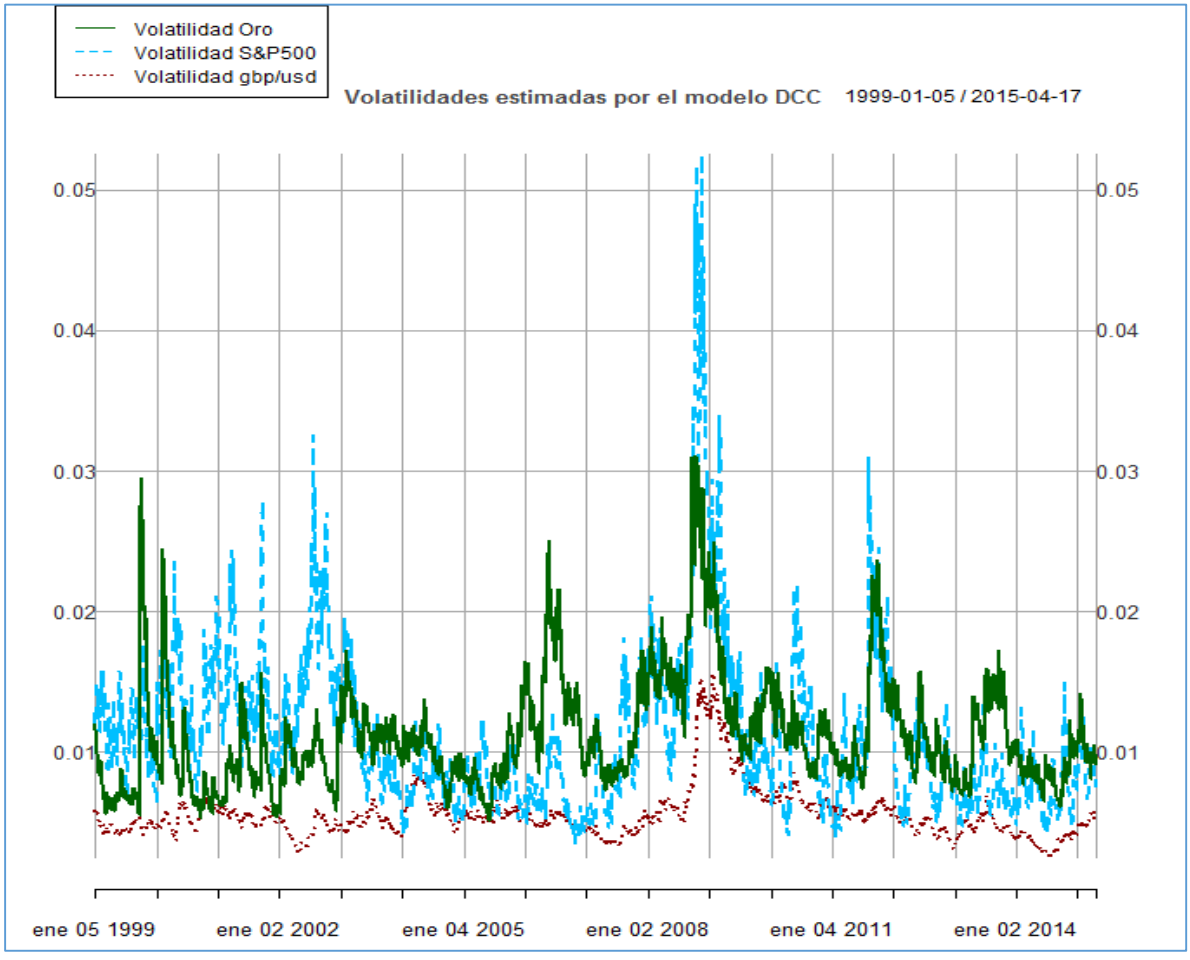
Tabla 4 Condiciones de estimación del modelo DCC presentado en la tabla 2

Condiciones de la estimación del modelo DCC	
Distribución	Mvt
Modelo	DCC(1,1)
No. Parámetros	27
[VAR GARCH DCC UncQ]	[0+21+3+3]
No. Series	3
No. Obs.	3990
Log-Verosimilitud	40726.48
Log-Verosimilitud promedio	10.21
Dinámica de la Varianza Condicional	
Modelo GARCH	eGARCH(1,1)
Dinámica de la Media Condicional	
Media del Modelo	ARFIMA(0,0,0)
Incluye Media	VERDADERO
GARCH-en-Media	FALSO
Distribución Condicional	
Distribución	Sstd
Incluye sesgo	VERDADERO
Incluye forma	VERDADERO
Incluye Lambda	FALSO

Lo más destacable del modelo es su no linealidad tanto en las series individuales de varianza como en la estimación conjunta. En efecto, todas las series individuales siguen un proceso eGARCH(1,1) cuyas innovaciones siguen distribuciones t sesgadas y cuyos parámetros son estadísticamente significativos (excepto las constantes de las medias). El uso de este modelo obedece a la cercanía a la raíz unitaria que exhiben los procesos de varianza de cada uno de los rendimientos analizados, lo cual es eludido mediante esta clase de modelos.

Por otra parte, el modelo conjunto sigue una distribución t multivariada que exhibe derrames de volatilidad tanto en las innovaciones de la varianza como en los rezagos comunes del sistema (términos conjuntos). Esta es la parte más llamativa del trabajo, pues demuestra fehacientemente la existencia de derrames de volatilidad entre las variables asociadas al fenómeno del *Flight to quality*. Además demuestra que los agrupamientos de volatilidad y los valores extremos del sistema están altamente correlacionados y que hay una temporalidad específica entre ellos, pues esta se origina en él S&P500, se transmite al mercado cambiario libra esterlina/dólar estadounidense y termina en los rendimientos del oro (aunque atemperada). Esto está sustentado en el rezago mostrado por las series de volatilidad mostradas por el modelo y por su valor. Esto se muestra de forma más clara en la gráfica 4.

Gráfica 4 Volatilidades estimadas por el modelo DCC para el Flight to quality. Elaboración propia mediante el paquete R con datos de la Reserva Federal de San Luis.



Finalmente, se muestra en la tabla 5 la matriz Q del modelo DCC, esta matriz muestra los derrames de volatilidad entre las variables del sistema y hace patente que estos derrames existen y que son significativos. Es de destacarse el efecto existente entre las volatilidades del tipo de cambio y del S&P500 (7%), las volatilidades del rendimiento del oro con el del tipo de cambio gbp/usd (18%), y la aparentemente poca relación entre la volatilidad del S&P500 con el oro dada por el canal industrial. (1.5%). Esto abona a la hipótesis de temporalidad de movimientos en los mercados, los cuales inician en el mercado accionario, pasan al tipo de cambio y terminan en el oro, pues los inversionistas buscan su seguridad ante entornos de alta volatilidad en el mercado de capitales.

Tabla 5 Matriz de derrames de volatilidad asociados al Flight to quality.

Matriz Q del DCC (Derrames de Volatilidad)			
	Rend_oro	Rend_S&P500	Rend_gbp/usd
Rend_oro	1.052290066	0.014821471	0.182797366
Rend_S&P500	0.014821471	1.007866053	0.065857188
Rend_gbp/usd	0.182797366	0.065857188	0.994917869

3. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se mostró que el fenómeno del *Flight to quality* implica un derrame de volatilidad entre los mercados de capitales; representados en este estudio por los rendimientos del S&P500, los rendimientos del mercado cambiario gbp/usd (pues el principal mercado de oro está ubicado en Londres y comerciado en libras esterlinas) y los rendimientos del precio del oro (medido en dólares de los Estados Unidos para captar el efecto cambiario).

Tal y como se observó en los datos, el fenómeno del *Flight to quality* provoca agrupamientos de volatilidad, sesgos en ésta volatilidad y valores extremos que no son mesurables mediante modelos ARMA o GARCH univariados, por lo que fue necesario hacer uso del modelo de

correlaciones dinámicas condicionales (*DCC)* con ecuaciones individuales eGARCH (para lidiar con los parámetros cercanos a la raíz unitaria del modelo) con innovaciones *t-student* sesgadas (para modelar el sesgo dado por el mayor tamaño de las volatilidades en tiempos de estrés financiero) que eran agrupadas por una distribución multivariada t (este fue el mejor modelo de muchas variaciones intentadas).

Tal y como se pudo observar en el desarrollo del trabajo, todos los parámetros (excepto dos constantes de la media que ya se esperaban cero) son estadísticamente significativos y arrojan un modelo que aparte de dar una explicación al *Flight to quality*, dan una secuencia a los eventos asociados, la cual es congruente con los desarrollos teóricos previos. En efecto, el modelo establece (tanto en la matriz de derrames, Q, como en la gráfica) que la volatilidad inicia en el mercado de capitales, pasa al mercado cambiario y termina en el mercado del oro. Todo ello con efectos decrecientes en fuerza (valores menores en la gráfica), pero crecientes en poder explicativo (esto es dado por los valores de la matriz Q) tal y como lo explican la gráfica de volatilidades estimadas y la matriz de derrames.

Finalmente, el trabajo muestra que aunque existen algunas dudas sobre varios aspectos metodológicos del DCC, este explica razonablemente bien el fenómeno del *Flight to quality*. El uso de modelos más elaborados como el de cópula GARCH y el análisis de este y otros fenómenos relacionados quedan como futuras líneas de investigación

Bibliografía

Agyei-Ampomah, S., Gounopoulos, D. & Mazouz, K., 2014. Does gold offer a better protection against losses in sovereign debt bonds than other metals?. *Journal of Banking & Finance, 40,* pp. 507-521.

Akram, Q. F., 2009. Commodity prices, interest rates and the dollar. *Energy Economics 31 (6),* pp. 838-851.

Anderson, C. W., Fedenia, M., Hirschey, M. & Skiba, H., 2011. Cultural influences on home bias and international diversification by institutional investors. *Journal of Banking & Finance, 35 (4),* pp. 916-934.

Baur, D. G. & Lucey, B. M., 2010. Is gold a hedge or a safe haven? An analysis of stocks, bonds and gold. *Financial Review 45 (2),* pp. 217-229.

Baur, D. G. & McDermott, T. K., 2010. Is gold a safe haven? International evidence. *Journal of Banking & Finance 34.8,* pp. 1886-1898.

Bauwens, L., Laurent, S. & Rombouts, J. V., 2006. Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of applied econometrics 21 (1),* pp. 79-109.

Belousova, J. & Dorfleitner, G., 2012. On the diversification benefits of commodities from the perspective of euro investors. *Journal of Banking & Finance 36 (9),* pp. 2455-2472.

Bermúdez, J. D., Segura, J. V. & Vercher, E., 2012. A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection. *Fuzzy Sets and Systems 188 (1),* pp. 16-26.

Beugelsdijk, S. & Frijns, B., 2010. A cultural explanation of the foreign bias in international asset allocation. *Journal of Banking & Finance, 34 (9),* pp. 2121-2131.

Bhar, R. & Hammoudeh, S., 2011. Commodities and financial variables: Analyzing relationships in a changing regime environment. *International Review of Economics & Finance 20 (4)* , pp. 469-484.

Bollerslev, T., 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics 31 (3),* pp. 307-327.

Bollerslev, T., Engle, R. F. & Wooldridge, J. M., 1988. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *The Journal of Political Economy 96 (1),* pp. 116-131.

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. & Reinsel, G. C., 1970. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. New York: John Wiley and Sons Inc..

Box, G. E. P. & Jenkins, M., 1973. Some comments on a paper by Chatfield and Prothero and on a review by Kendall. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* , pp. 337-352.

Caporin, M. & McAleer, M., 2013. Ten things you should know about the dynamic conditional correlation representation. *Econometrics 1 (1),* pp. 115-126.

Cappiello, L., Engle, R. F. & Sheppard, K., 2006. Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial econometrics 4 (4),* pp. 537-572.

Chan, K. F., Treepongkaruna, S., Brooks, R. & Gray, S., 2011. Asset market linkages: Evidence from financial, commodity and real estate assets. *Journal of Banking & Finance, 35 (6),* pp. 1415-1426.

Charles, A., Darné, O. & Kim, J. H., 2015. Will precious metals shine? A market efficiency perspective. *International Review of Financial Analysis,* p. forthcoming.

Chaudhuri, R., Ivkovich, Z. & Trzcinka, C., 2012. *Strategic performance allocation in institutional asset management firms: Behold the power of stars and dominant clients*. San Diego, s.n., pp. 1 - 56.

Cumming, D., Helge Haß, L. & Schweizer, D., 2014. Strategic asset allocation and the role of alternative investments. *European Financial Management 20 (3),* pp. 521-547.

Daskalaki, C. & Skiadopoulos, G., 2011. Should investors include commodities in their portfolios after all? New evidence. *Journal of Banking & Finance 35 (10),* pp. 2606-2626.

DeMiguel, V., Plyakha, Y., Uppal, R. & Vilkov, G., 2013. Improving portfolio selection using option-implied volatility and skewness. *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 48 (06),* pp. 1813-1845.

Ding, Z., Granger, C. W. & Engle, R. F., 1993. A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance 1 (1),* pp. 83-106.

Ehrmann, M. M. F. a. R. R., 2011. Stocks, bonds, money markets and exchange rates: measuring international financial transmission. *Journal of Applied Econometrics 26 (6),* pp. 948-974.

Engle, R., 2002. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics 20 (3),* pp. 339-350.

Engle, R. F., 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society 50 (4),* pp. 987-1007.

Engle, R. F. & Sheppard, K., 2001. *Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. No. w8554*. [En línea] Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.196.3196&rep=rep1&type=pdf

Engle, R. & Kroner, K. F., 1995. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric theory 11 (01),* pp. 122-150.

Hammoudeh, S., Malik, F. & McAleer, M., 2011. Risk management of precious metals. *The Quarterly Review of Economics and Finance, 51 (4),* pp. 435-441.

Harrison, B. & Moore, W., 2012. Stock market efficiency, non-linearity, thin trading and asymmetric information in MENA stock markets. *Economic Issues 17 (1),* pp. 77 - 93.

Heathcote, J. & Perri, F., 2013. The international diversification puzzle is not as bad as you think. *Journal of Political Economy 121 (6),* pp. 1108-1159.

Hillier, D., Draper, P. & Faff, R., 2006. Do precious metals shine? An investment perspective. *Financial Analysts Journal 62 (2),* pp. 98-106.

Hoevenaars, R. P., Molenaar, R. D., Schotman, P. C. & Steenkamp, T., 2014. Strategic Asset Allocation For Long-Term Investors: Parameter Uncertainty And Prior Information. *Journal of Applied Econometrics, 29 (3),* pp. 353-376.

Jondeau, E. & Rockinger, M., 2006. The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of international money and finance 25 (5),* pp. 827-853.

Karlsson, L., 2002. *Theoretical Survey, Model Implementation and Robustness Analysis*. [En línea] Available at: http://www.algorithmica.se/research/masters%20thesis%20-%20garch%20modeling.pdf

Knowles, S., Phillips, G. & Lidberg, J., 2013. The framing of the Global Financial Crisis 2005-2008: a cross-country comparison of the US, UK and Australia. *Australian Journalism Review 35 (2) ,* pp. 59 - .

Kwiatkowski, D., Phillips, P. C., Schmidt, P. & Shin, Y., 1992. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?. *Journal of econometrics, 54(1),* pp. 159-178.

Lucey, B. M. & Tully, E., 2006. Seasonality, risk and return in daily COMEX gold and silver data 1982–2002. *Applied Financial Economics, 16 (4),* pp. 319-333.

Mandelbrot, B., 1966. Forecasts of future prices, unbiased markets, and" martingale" models. *Journal of Business 39 (1),* pp. 242-255.

Mandelbrot, B. B., 1971. When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *The Review of Economics and Statistics 53 (3),* pp. 225-236.

Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *The journal of finance 7(1) ,* pp. 77-91.

Officer, L. H., 2007. *Between the Dollar-Sterling Gold Points: Exchange Rates, Parity and Market Behavior*. New York: Cambridge University Press.

Ortiz, É., Lopéz-Herrera, F. & Cabello, A., 2007. Las bolsas de valores en el área del TLCAN: un análisis a largo plazo. *Problemas del Desarrollo. Revista Latinoamericana de Economía 38 (151),* pp. 37-61.

Patton, A. J., 2006. Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review 47 (2),* pp. 527-556.

Pukthuanthong, K. & Roll, R., 2011. Gold and the Dollar (and the Euro, Pound, and Yen. *Journal of Banking & Finance, 35 (8),* pp. 2070-2083.

R Core Team, 2014. *R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.*. [En línea] Available at: http://www.R-project.org/

Shaikh, E. A., Rizvi, S. M. A., Bashir, R. & Salam, M., 2014. Modeling Volatility of Gold-Futures' Returns using GARCH-Family Models: Empirical Evidence from Pakistan. *Asian Journal of Research in Social Sciences and Humanities 4 (4),* pp. 20-27.

Sims, C. A., 1980. Macroeconomics and reality 48 (1). *Econometrica: Journal of the Econometric Society ,* pp. 1-48.

Smith, G., 2001. The price of gold and stock price indices for the United States. *The World Gold Council 8,* pp. 1-16.

Su, W. & Huang, Y., 2010. *Comparison of Multivariate GARCH Models with Application to Zero-Coupon Bond Volatility*.. Available at: https://lup.lub.lu.se/luur/download?func=downloadFile&recordOId=1619618&fileOId=1619628

Trapletti, A. & Hornik, K., 2013. *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance. R package version 0.10-32*. [En línea] Available at: http://CRAN.R-project.org/package=tseries

Tully, E. & Lucey, B. M., 2007. A power GARCH examination of the gold market. *Research in International Business and Finance 21 (2),* pp. 316-325.

Wuertz, D., Chalabi, Y. & al, e., 2013. *fGarch, Rmetrics - Autoregressive Conditional Heteroskedastic Modelling*.Available at: http://CRAN.R-project.org/package=fGarch

CAPÍTULO VI

¿Las empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores generan valor a sus accionistas?

Dr. Julio Téllez Pérez

Universidad Anáhuac Norte

Resumen

Se realizó un análisis empírico para encontrar la posible asociación relativa e incremental de las variables dependientes MVA y TSR con las variables independientes ROE, EVA y FLE utilizando la técnica de regresión de mínimos cuadrados ordinarios y análisis datos panel para las estimaciones. Se tomó una muestra de 43 empresas que cotizaron en la Bolsa Mexicana de Valores entre 1996 y 2010 (15 años) encontrando que el ROE tiene una relación significativa con TSR, caso distinto para MVA ya que solo EVA y FLE presentaron una relación significativa.

Palabras clave: Generación de valor, valor agregado de mercado, valor económico agregado, retorno del capital, flujo libre de efectivo, retorno de los accionistas. Clasificación JEL: C23, C22, D52, D46.

1.Introducción

El concepto de valor ha existido desde que la humanidad ha hecho comercio y como resultado de este, la acumulación de capital. Las sociedades han desarrollado modelos de creación de riqueza basados en la agricultura, para luego transformar y orientar dichos modelos a economías basadas en la producción o servicios. El valor, consistentemente, ha sido la premisa utilizada para normar los criterios de los tomadores de decisiones de inversión. Aristóteles (384-322 A.C.) se le atribuye como la primera persona que reflexiona sobre el concepto de valor, dando énfasis en las distintas maneras de adquirir bienes que tienen las personas, una de las cuales es el intercambio. Es el primero en distinguir entre el valor de uso y el valor de cambio. Aristóteles generó una importante línea de pensamiento donde grandes filósofos como San Agustín (345-430), San Alberto Magno (1193 – 1280) y Santo Tomás de Aquino (1225-1274) se suman y

contribuyen sustancialmente para el entendimiento del concepto de valor. En el siglo XVIII y XIX, es cuando el concepto de valor empieza a ser estudiado en detalle y de manera formal bajo el concepto de empresa por Smith (1776) y Marshall (1890), donde ambos concluyen que una compañía genera valor cuando sus ganancias son mayores que el costo del capital y de la deuda.

Los cambios ocurridos, tanto económicos y políticos, en los años noventa han generado diversas fuerzas que han impactado y transformado radicalmente a las empresas. En particular tres son las fuerzas que han contribuido a la creciente importancia de adoptar una estrategia de negocios orientada a la creación de valor según Black, Wright y Bachean (1998). La primera se relaciona con los recursos financieros provenientes de fondos privados, la segunda se deriva de la globalización de los mercados y la última fuerza tiene que ver con la necesidad de contar con sistemas de información eficientes y oportunos.

Con respecto a la primera fuerza, la colocación de recursos financieros de los fondos privados se ha incrementado de manera drástica a nivel mundial en los últimos 50 años debido a los avances tecnológicos logrados en un periodo relativamente pacífico posterior a la segunda guerra mundial y al incremento del comercio mundial. Cabe mencionar que los sucesos ocurridos en la primera mitad del siglo XIX, en especial los derivados por la segunda guerra mundial, genero el interés de las personas por contar con algún tipo de protección contra riesgos. Debido a este impulso, la población empezó a contratar seguros médicos y de vida, situación que obligo al estado a establecer políticas de regulación y de inversión agresivas en áreas como pensiones, salud y seguridad social. Al contar con un marco favorable y transparente, las personas empezaron a realizar inversiones privadas con el propósito de asegurar sus pensiones en función a diferentes combinaciones de crecimiento, riesgo y retorno. Los que decidieron optar por inversiones de largo plazo, considerando un mayor riesgo, invirtieron en fondos de pensiones que estaban integrados por acciones de empresas públicas, propiciando que dichos fondos se convirtieran en los principales inversionistas institucionales.

La segunda fuerza adquiere relevancia en las empresas a partir de 1970 donde se empiezan a establecer diversos tratados generales de tarifas y comercio con el propósito de disminuir barreras comerciales entre los países. Con la disminución de dichas barreras comerciales, sorpresivamente se incrementó el comercio mundial generando que las empresas cada vez más tomaran decisiones de donde vender y cómo hacerlo. Actividades como las inversiones en mercados foráneos, las transferencias de dinero de un país a otro y el flujo de utilidades que

generaban las subsidiarias internacionales empezaron a realizarse con mayor frecuencia. El mercado de divisas empezó a crecer en tamaño y sofisticación a partir del colapso ocurrido a principios de los años 70's del sistema de tipos de cambio fijos de Bretton Woods. En los años 80's, se inició un proceso de desregulación financiera permitiendo la eliminación de las restricciones del flujo de capitales de los países pertenecientes a la OCDE, generando un mercado global de activos financieros en donde las inversiones internacionales fluían de una manera más proactiva que en el pasado. En esa misma década, las empresas empezaron a competir internacionalmente no solo por los consumidores, productos y empleados, sí no que también por capital. Atraer capital dependía de quién contara con el mejor criterio para alcanzar el objetivo de generación de valor a los accionistas. México no ajeno a esta situación, establece un tratado de libre comercio (TLCAN) con Estados Unidos de Norteamérica y Canadá, entrando en vigor el 1ro. Enero de 1994. Entre todos los objetivos establecidos en dicho tratado, destaca el objetivo que fomenta las inversiones entre los países miembros, dando como resultado una importante entrada de recursos financieros y tecnológicos en los años posteriores a la firma del TLCAN al país, provenientes principalmente de Estados Unidos. Es en ese momento cuando las empresas mexicanas se dan cuenta que sus modelos de gestión y producción están rezagados con respecto a los otros dos países miembros del tratado siendo no atractivas para la captación del capital extranjero, situación que generó un cambio radical en sus modelos de gestión, destacando la adopción de estrategias encaminadas a crear valor a los accionistas.

La tercera fuerza es el tema de la información. El aumento de la sofisticación de las telecomunicaciones, permitieron que las transferencias de dinero se realicen en cuestión de segundos y de manera segura. Greenspan (1997) menciona que el rápido desarrollo de las tecnologías de comunicación han impactado de una manera importante a los mercados financieros, ocasionando que los gobiernos de los países se vean en la necesidad de desregular y liberalizar dichos mercados con el propósito de hacerlos más eficientes. Lo anterior ha ocasionado la formación de un sistema financiero global donde las dos premisas fundamentales que dominan es la comunicación instantánea y la posibilidad de las empresas para diversificar los riesgos de manera más efectiva. Las nuevas tecnologías han tenido un impacto significativo en la manera en que se venía produciendo los bienes y servicios, dando paso a un sistema más conceptual que físico.

Las sociedades que adoptan un sistema basado en la creación de valor logran mejores estándares de vida, mayores niveles de productividad y competencia, y mercados de capitales eficientes, como es el caso de Estados Unidos de América. Países donde el sistema no se basa en la maximización del patrimonio de los accionistas, los accionistas obtienen pobres retornos de capital en comparación con los que sí lo tienen, aunado a que el concepto de creación de valor cada vez se vuelve más importante debido a la globalización de los mercados de capital (Copeland, Koller y Murrin, 1995).

El momento crucial que hace que el concepto de creación de valor tome importancia, y sea adoptado por las empresas, se da con la publicación del libro *Creating Shareholder Value: A guide for Managers and Investors* por Alfred Rapapport en 1986, generando una nueva forma de ver a las empresas por parte de los inversionistas y gerentes, bajo el entendimiento que una empresa crea valor cuando el rendimiento de los activos operativos es mayor que el costo de capital que se deriva del financiamiento de los mismos.

Con el propósito de medir la creación de valor, se han elaborado diversas medidas con metodologías propias para cuantificar de alguna manera la maximización del patrimonio de los accionistas. Las medidas propuestas se basan en una idea en común, la cual es que una empresa crea valor cuando los resultados exceden las expectativas de los accionistas. Cabe mencionar que la gran mayoría de las medidas han sido desarrolladas por empresas de consultoría financiera, como lo son Stern & Stewart, The Boston Consulting Group, McKinsey, entre otras, desarrollando metodologías que prometen el cálculo y cuantificación de la generación de valor, y que posteriormente las comercializan entre sus carteras de clientes. La insistencia de muchas de estas empresas de consultoría al afirmar que las medidas que proponen son las mejores, obedece al interés monetario que se deriva de la contratación de las consultoras por parte de las empresas, pero no por ello las métricas propuestas carecen de rigor científico y sustento en las principales teorías financieras. Las métricas más utilizadas para dimensionar la generación de valor se clasifican según la fuente de información en internas y externas. Las métricas internas son las que se calculan utilizando la información financiera de las empresas, mientras que las medidas externas tienen que ver con la manera en que los mercados asignan valor a las empresas a través de los movimientos de los precios de las acciones.

La medida interna más utilizada para cuantificar la creación de valor de las empresas es la denominada Valor Económico Agregado (EVA por sus siglas en inglés), marca registrada por Stern & Stewart, concepto que se popularizó a partir de una publicación en la revista *Fortune* en 1995 y se basa en el concepto de que una empresa debe ganar por lo menos su costo promedio ponderado de capital (WACC por sus siglas en inglés) , además que la creación de valor proviene exclusivamente de los resultados operativos. El EVA consiste en determinar la rentabilidad obtenida por la empresa, deduciendo de la utilidad de operación neta de impuestos, el costo de capital de los recursos propios y externos que utiliza para su operación. Sí el EVA es positivo, significa que la empresa ha generado una rentabilidad por arriba de su costo promedio ponderado de capital, lo que le genera una situación de creación de valor, mientras que si es negativo, se considera que la empresa no es capaz de cubrir su costo promedio ponderado de capital y por lo tanto está destruyendo valor para los accionistas. Independientemente del valor económico agregado, existen otras dos medidas internas de amplio uso para cuantificar la creación de valor, el Retorno de Capital (ROE) y el Flujo Libre de Efectivo (FLE), al igual que el EVA, ambas se calculan en base en los estados financieros de las empresas.

Las dos medidas externas más utilizadas para dimensionar la creación de valor son el Valor Agregado de Mercado (MVA por sus siglas en inglés) y el Retorno Total de los Accionistas (TSR por sus siglas en inglés). El MVA es la diferencia entre el valor de mercado de la empresa y la inversión de capital en un periodo de tiempo determinado y se considera como el premio que el mercado le otorga a la empresa por sobrepasar las expectativas de los inversionistas. El TSR, desarrollada por The Boston Consulting Group, es una medida que combina los movimientos de los precios de las acciones y los dividendos pagados en un periodo de tiempo determinado (normalmente se considera un año) y el resultado se interpreta como el rendimiento total que obtuvo el accionista por su inversión.

El interés por encontrar el medidor más adecuado para dimensionar la creación de valor ha generado una vasta línea de investigación que tiene como propósito determinar la medida más eficiente que cuantifique la generación de valor de las empresas hacía con sus accionistas, en especial, las empresas que cotizan en los mercados de capitales. La mayoría de las

investigaciones se enfocan en tratar de encontrar la posible relación entre las medidas internas con las medidas externas, considerando que las medidas externas reflejan la formación de precios de las acciones en los mercados de capitales según las expectativas del gran público inversionista. El presente trabajo empírico obedece al interés para encontrar el grado de asociación relativa e incremental entre medidas financieras basadas en la rentabilidad del capital de los accionistas (ROE), la generación de flujo libre de efectivo (FCF) y valor económico agregado (EVA) con la creación de valor de los accionistas, este último medido por el retorno total de los accionistas (TSR) y el valor agregado de mercado (MVA).

La estructura del estudio empírico inicia con la introducción, donde se expone de manera conceptual el tema de creación de valor, posteriormente, se hace una revisión de los principales trabajos empíricos que se han realizado al respecto, para continuar con la descripción de la metodología utilizada para encontrar los posibles grados de asociación relativa e incremental entre las variables dependientes con las independientes seleccionadas en las hipótesis a contrastar, y por último, se analizan los resultados obtenidos.

2. Revisión de la literatura

Durante los años 90's se realizaron numerosos estudios sobre la posible relación entre los precios de las acciones de empresas públicas y la información contable, basada en estándares de registro generalmente aceptados, con el propósito de encontrar posibles vínculos que pudieran explicar y/o en su caso predecir dichos precios; destacando los trabajos realizados por Ohlson y Penman (1992), Barth (1994), Dechow (1994) y Collins, Maydew y Weiss (1997).

El afán por encontrar las posibles relaciones o vínculos entre el valor de las acciones y la información contable genero una importante línea de investigación que Holthausen y Watts (2001) la denominaron Relevancia del Valor (Value-Relevance por sus siglas en inglés), donde los estudios enfocados a la creación de valor forman parte importante.

Holthausen y Watts (2001) comentan que los trabajos realizados sobre la línea de investigación Relevancia del Valor se pueden clasificar en 3 categorías: a) *Estudios de asociación relativa*.- que son los que comparan la asociación entre el precio de las acciones o el cambio en el precio y

medidas financieras basadas en la contabilidad, utilizando la correlación de Pearson (R), que se determina calculando la raíz cuadrada del coeficiente de determinación (R^2). La medida financiera con el mayor R^2 se considera que es la que mayor impacto tiene; b) *Estudios de asociación incremental***.-** tienen como propósito investigar sí una medida financiera en particular ayuda a explicar el comportamiento de otras variables específicas. Se considera que una medida financiera es relevante cuando su coeficiente estimado, derivado de una regresión, es significativamente diferente a cero, y c) *Contenido de información marginal***.-** se refiere al estudio de un conjunto de números contables específicos si agregan valor a la información disponible para los inversionistas. La metodología que más se usa en este tipo de estudios es el estudio de eventos y tiene como propósito determinar si la nueva información contable generada por la empresa tiene efectos en el valor de las acciones. Holthausen *et al*. (2001) concluyen que el 94% de los estudios empíricos que tiene que ver con la relevancia del valor, lo hacen bajo la categoría de asociación relativa e incremental mientras que el 6% restante se realizan bajo estudios de eventos u otro tipo de metodología.

Sharma y Kumar (2010) hacen una revisión de las principales publicaciones, 112 trabajos en total, sobre el EVA entre 1994 y 2008 donde clasifican los trabajos en 7 grupos según la relación que tiene el EVA con: 1) los precios de las acciones, 2) el MVA, 3) las compensaciones a los gerentes, 4) el proceso de implementación, 5) la administración basada en el valor, 6) valor del dinero a través del tiempo y 7) la revisión de literatura. Los autores encontraron que el 52% de los trabajos revisados se enfocaron a encontrar una posible relación entre el EVA y los precios de las acciones, mientras que sólo el 22% se centraron en estudiar la posible relación con el MVA.
Los trabajos empíricos que más destacan sobre la posible relación del EVA con los precios de la acción son los realizados por Stewart (1991 y 1995) donde afirma que el EVA es la medida que mejor explica el valor de mercado de las acciones, ya que destaca como la única medida de creación de riqueza que explica en un 50% mejor los cambios en la creación de valor en comparación con medidas tradicionales como el ROE y UPA, argumentos que fortalecen la idea de que el EVA es el mejor indicador financiero para cuantificar la generación de riqueza de las empresas para con sus accionistas. Lo anterior hace que el EVA cobre popularidad generando una línea de investigación extensa, teniendo como objetivo principal determinar si efectivamente el EVA es la medida financiera con mayor valor de relevancia que explique los cambios en los

precios de las acciones en comparación con las medidas financieras tradicionales. Lehn y Makhija (1997) estudiaron la correlación entre diferentes medidas financieras y los retornos de las acciones utilizando una muestra de 452 empresas de Estados Unidos, encontrando que el EVA es el medidor que mayor correlación tiene; Bao and Bao (1998) estudiaron la relación del EVA con las utilidades anormales en empresas de Estados Unidos, concluyendo que el EVA es una variable significante en los retornos de las acciones y presenta un mayor poder explicativo que las utilidades; O'Byme (1997) sustenta que el objetivo que persigue el EVA es la de ser el medidor más eficiente para comprender el desempeño de las empresas y que está relacionado con el modelo de flujos libres de efectivos descontados y, en consecuencia, que presente una elevada correlación con el valor de mercado de las empresas; Machuga *et al*. (2002) afirman que el EVA puede ser utilizado para mejorar las proyecciones de las utilidades; Hall (2002) argumenta que la metodología que sustenta el cálculo del EVA es uno de los mejores métodos para saber si se está creando o destruyendo valor; Worthington y West (2004) encontraron evidencia que en Australia los movimientos en los precios de las acciones están más relacionados con el EVA que con el modelo de utilidades residuales.

Sin embargo, existe un grupo de trabajos empíricos importante que sugiere que el EVA no presenta una relación significativa con los retornos de las acciones, sobresaliendo los trabajos de Peterson y Peterson (1996) quienes analizaron la relación entre los medidores tradicionales y el EVA con los retornos de las acciones, encontrando que ambos presentaban el mismo nivel de relevancia al explicar los cambios en los valores de las acciones; Biddle, Bowen y Wallace (1997) y Biddle (1998) compararon los retornos de las acciones ajustados con el EVA, el modelo de utilidad residual y el flujo de efectivo operativo y los resultados obtenidos no sustentan que el valor económico agregado sea el mejor medidor financiero para explicar los retornos de las empresas públicas en Estados Unidos; Chen y Dodd (1997) analizaron 1,000 empresas en Estados Unidos encontrando que el valor económico agregado no tiene un mayor contenido de información que las medidas tradicionales que se derivan de la utilidad contable, adicionalmente encontraron que el EVA y el modelo de Utilidad Residual (Ohlson 1995) dan los mismos resultados al momento de explicar los retornos de las acciones; Ismail (2006) encontró una relación no significativa del EVA al explicar las variaciones en los precios de las acciones y que los medidores tradicionales mostraban una significativa relación para empresas del Reino Unido

y Fernandez (2002) que analizó la correlación entre el EVA y el valor agregado de mercado en empresas de Estados Unidos y España encontrando un mínimo grado de correlación entre ambas. En México, los trabajos de investigación sobre el tema han sido escasos destacando las investigaciones de Saavedra (2004) encontrando que solo algunos sectores económicos presentan una relación significativa entre el EVA y el valor de capitalización bursátil, y Adam, J.A. (2005) que comparo diversas métricas de valuación con el EVA concluyendo que el método de valoración mixto basado en el fondo de comercio (Goodwill por sus siglas en inglés) es el que mayor relación presenta con el valor económico agregado.

3. Hipótesis

El presente trabajo de investigación lo podemos clasificar dentro de las dos primeras categorías establecidas por Holthausen *et al*. (2001), estudios de asociación relativa e incremental, sustentando la investigación empírica en la teoría "*input-to-equity*", la cual establece que el papel de la contabilidad es generar información que se pueda utilizar como entradas a los modelos de valuación que los inversionistas usan para analizar a las empresas.

El objetivo general que sustenta la investigación empírica es el de: Analizar la posible asociación entre medidas financieras basadas en la rentabilidad del capital de los accionistas, la generación de flujo libre de efectivo y valor económico agregado con la creación de valor de los accionistas, y para ello, se formularon las siguientes hipótesis:

H_1: El valor económico agregado (EVA) es la mejor medida financiera para explicar los cambios en el retorno total de los accionistas (TSR) en comparación con la rentabilidad contable (ROE) y flujo libre de efectivo (FLE).

H_2. El valor económico agregado (EVA) es la mejor medida financiera para explicar los cambios en el valor agregado de mercado (MVA) en comparación con la rentabilidad contable (ROE) y flujo libre de efectivo (FLE).

La primera hipótesis (H_1) examina si hay una posible relación significativa entre el valor económico agregado (EVA) y el retorno total de los accionistas (TSR), considerando a este último como la mejor medida para cuantificar la creación de valor bajo una perspectiva de mercado, donde la oferta y demanda establecen los precios de las acciones, reflejando las expectativas del gran público inversionista con respecto al desempeño de las empresas. El planteamiento de la hipótesis afirma que el valor económico agregado presenta una fuerte

correlación positiva con TSR y, como tal, proporciona información adicional que explica las variaciones en los precios de las acciones. Esta hipótesis está en línea con los estudios empíricos de Lehn y Mackhijia (1997), Feltham et al. (2004) y Worthington y West (2004), donde concluyen que el valor económico agregado es la métrica financiera que mayor asociación presenta en los retornos de las acciones en comparación con otras medidas contables. La segunda hipótesis (H_2) examina la posible relación entre el valor económico agregado (EVA) y el valor de mercado agregado (MVA), considerando el MVA como la mejor métrica financiera que captura la generación de valor de las empresas, en línea con los estudios empíricos de Stewart (1991, 1995), Milunovich and Tseui (1996), Uyemura, Kantor y Petit (1996), Lehn y Mackhijia, (1997), Ehrbar (1998) y Grant (2003), donde concluyen que el EVA es el indicador financiero que mayor grado de asociación presenta con el MVA en comparación con las medidas tradicionales de desempeño basadas en los resultados contables.

Para contrastar las hipótesis planteadas bajo una perspectiva de asociación relativa e incremental, se tomaron como variables dependientes el retorno total de las acciones (TSR) y el valor agregado de mercado (MVA) considerando que son las medidas más utilizadas para evaluar la creación de valor:

TSR_t: El retorno total de las acciones al 31 de diciembre al año *t* calculado con la siguiente expresión:

$$\mathrm{TRS_t} = \left(\frac{(\mathrm{P_1} + \mathrm{Div}) - \mathrm{P_0}}{\mathrm{P_0}}\right)$$

donde P_1 es el precio de la acción al final del año, Div son los dividendos por acción, P_0 es el precio de la acción al inicio del año.

MVA_t : Valor agregado de mercado al 31 de diciembre al año *t* calculado con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{MVA_t} = \mathrm{VE_t} - \mathrm{IC_t}$$

donde VE es la suma de la deuda con costo y el valor de capitalización de la empresa e IC es la inversión de capital neto en los activos operativos de la empresa a valor en libros, todos en el periodo *t*.

Las variables independientes que tienen como propósito cuantificar la rentabilidad en diferentes niveles y analizar el grado de asociación que presentan con las variables dependientes son:
ROE_t: El retorno del capital al 31 de diciembre al año *t* calculado con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{ROE_t} = \frac{\mathrm{UN_t}}{\mathrm{CC_t}}$$

donde *UN* es la utilidad neta y *CC* es el capital contable, ambos del ejercicio *t*.

EVA_t: El EVA al 31 de diciembre al año *t* se obtiene con la siguiente fórmula:

$$\mathrm{EVA_t} = \mathrm{UNO_t} - \text{Cargo por Uso de Capital}_\mathrm{t}$$

donde UNO es la utilidad neta de operación que representa la utilidad de operación después de impuestos y Cargo por uso de Capital que representa el costo del dinero de los activos involucrados en la generación de la utilidad de operación que deben pagar, que se obtiene de la multiplicación de la inversión de capital en los activos netos (IC) con el costo promedio ponderado de capital (WACC por sus siglas en inglés), ambos en el ejercicio t.

FLE_t: Flujo libre de efectivo al 31 de diciembre al año *t* calculado con la siguiente expresión:

$$\mathrm{FLE_t} = \mathrm{UNO} + \text{Dep \& Amort}_\mathrm{t} \pm \text{Gastos de Capital}_\mathrm{t} \pm \Delta\ \text{Capital de Trabajo}_\mathrm{t}$$

donde UNO es la utilidad de operación menos impuestos, Dep & Amort equivale a la disminución del valor de los activos en el tiempo, Gastos de Capital (CAPEX por sus siglas en inglés) son las inversiones en activos fijos y Δ Capital de Trabajo son los recursos que se tienen para sustentar la operación de la empresa en el corto plazo, todos en el ejercicio t.

El propósito de agregar variables de control a los modelos de valuación es incorporar variables que midan aspectos distintos de las empresas con el propósito de poner a prueba el impacto relativo de las variables independientes objeto de estudio. Se revisó la literatura correspondiente a esta línea de investigación y se identificó las siguientes medidas financieras como las más utilizadas:

D/C_t: El grado de apalancamiento financiero al 31 de diciembre al año *t* obtenido con la siguiente fórmula:

$$D/C_t = \frac{DT_t}{VM_t}$$

donde DT representa la deuda que tiene un costo implícito, principalmente la conforma los préstamos bancarios y VM es el valor de bursatilización de la empresa, ambos del ejercicio *t*.
$Tamaño_t$: Logaritmo natural del total ventas al 31 de diciembre al año *t* calculado de la siguiente manera:

$$Tamaño_t = \ln(Ventas_t)$$

El apalancamiento financiero (D/C) y tamaño son medidores financieros que tienen como propósito establecer referencias relativas y generar información que permita entender de mejor manera las variables explicativas y su grado de asociación con las variables dependientes (Shroff, 1995).

4. Descripción de la Metodología

La metodología que sustenta el trabajo empírico para contrastar las hipótesis planteadas es la que propone Biddle, Seow y Siegel (1995), la cual establece los lineamientos para elaborar una correcta apreciación de la relevancia del valor desde sus dos principales perspectivas: asociación relativa y asociación incremental. Biddle *et al*. (1995) definen que bajo una perspectiva de asociación relativa, se estudia el contenido de información de cada una de las variables independientes para determinar cuál de ellas ofrece el mayor poder explicativo con respecto a las

otras de manera individual, mientras que un análisis de asociación incremental, evalúa si una medida proporciona más información de manera individual que combinada con otra. La comparación entre el contenido de información tomando como referencia dos medidas financieras X e Y (e.g. retorno de las acciones y el retorno del capital), se representa de la manera siguiente:

a) Comparación de contenido de Información Relativa:
Contenido de información (X) ≥ Contenido de información (Y)?
Contenido de información (Y) ≥ Contenido de información (X)?

b) Comparación de contenido de Información Incremental:
Contenido de información (X,Y) ≥ Contenido de información (Y)?
Contenido de información (X,Y) ≥ Contenido de información (X)?

La asociación incremental mide si la información contenida en X e Y juntas es mayor que de manera individual y la asociación relativa mide si el contenido informativo de X en lo individual es mayor, igual o menor que el contenido de información de la variable Y, también en lo individual. Cuando el contenido de información incremental de X va más allá de Y en comparación con el contenido de información incremental de Y con respecto a X, entonces X presenta el mayor contenido de información relativa que Y. Lo anterior hace que se requiera diferentes pruebas estadísticas para calcular la asociación incremental y relativa entre X e Y considerando que la asociación relativa refleja los cambios en la asociación incremental.

Para obtener el análisis del grado de asociación relativa e incremental que pudieran tener las variables independientes con la variable dependiente, se aplicó la metodología de Biddle, Seow y Siegel (1995), donde establecen un proceso estándar para evaluar el contenido informativo que consiste en examinar estadísticamente la significancia del coeficiente de la pendiente en una regresión ordinaria de mínimos cuadrados:

$$D_t = b_0 + b_t FE_{xt}/P_{t-1} + \varepsilon_{it}$$

donde D_t es la variable dependiente, b_0 es la constante, FE_{xt}/P_{t-1} es el pronóstico de error de una medida contable *X* deflactada por el valor de mercado al inicio del periodo y ε son los errores aleatorios. El supuesto donde se sustenta la regresión es en el entendimiento que el comportamiento anormal de la variable dependiente se ve afectada solamente por la información inesperada contenida en el medidor contable, y el término FE_{xt}/P_{t-1} refleja la información inesperada que no se observa de manera directa. Para la estimación del modelo, es necesario contar con un proxy de las expectativas del mercado, y para ello, se utilizan dos metodologías: a) proyecciones financieras y b) mediante un modelo autorregresivo integrado de media móvil, también conocido como modelo ARIMA, el cual utiliza las variaciones de datos históricos con el propósito de encontrar patrones para predecir el futuro. Sin embargo, ambos acercamientos presentan sesgos importantes. Biddle *et al*. (1995) sugieren que para evitar los problemas asociados en la estimación de las expectativas de mercado, proponen utilizar un enfoque en donde la estimación de las expectativas de mercado se realiza en conjunto con coeficientes donde el error estimado se calcule como la diferencia entre el valor realizado de la medida contable (X) y la expectativa de mercado: $FE = X_{xt} - E(X_t)$, asumiendo que las expectativas de mercado se comportan como un proceso estocástico lineal discreto expresado de la siguiente manera: $E(X_t) = \delta + \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \ldots,$ donde δ es una constante y $\emptyset$ son los parámetros autorregresivos. Sustituyendo $E(X_t)$ en la fórmula $D_t = b_0 + b_t FE_{xt}/P_{t-1} + \varepsilon_{it}$, se obtiene:

$$D_t = b_0 + b_1(X_1 - (\delta + \emptyset_1 X_{t-1} + \emptyset_2 X_{t-2} + \ldots))/P_{t-1} + \varepsilon_{it}$$

Para el presente estudio se considera un solo periodo de retardo para evitar problemas estructurales, criterio que obliga a modificar la anterior fórmula, quedando como sigue:

$$D_t = b_0 + b_1 X_1/P_{t-1} + b_2 X_{t-1}/P_{t-1} + \varepsilon_{it} \qquad (1)$$

El contenido informativo relativo puede determinarse a través de la comparación de los coeficientes de determinación ajustados (R^2-ajustado) que se obtienen de la ecuación (1) para cada variable explicativa con respecto a cada una de las variables dependientes. El coeficiente de determinación ajustado permite mayores grados de libertad y no presenta los problemas de escala

que el coeficiente de determinación (R^2) tiene y que usualmente aumentan con la inclusión de nuevos regresores, incluso cuando no existe relación de casualidad, provocando lo que se denomina correlación espuria. Las variables explicativas con mayor R^2-ajustado serán consideradas como de mayor contenido informativo relativo.

La asociación incremental se evalúa examinando la significancia de la pendiente de los coeficientes de dos o más regresores utilizando la siguiente fórmula:

$$D_t = b_0 + b_1 X_1/P_{t-1} + b_2 X_{t-1}/P_{t-1} + b_3 Y_1/P_{t-1} + b_4 Y_{t-1}/P_{t-1} + \varepsilon_{it} \qquad (2)$$

El contenido informativo incremental de una variable sobre otra puede ser estimado como la diferencia de los coeficientes de determinación ajustados resultantes de la ecuación (2) que combina dos variables independientes (X_1 y Y_1) con el modelo de regresión individual de una de ellas (X_1 o Y_1), según la variable independiente objeto de estudio (Easton, 1985 y Biddle *et al*., 1995).

Para complementar el análisis del grado de asociación incremental que pudieran tener las variables objeto de estudio, se aplicó el estadístico F para rechazar o aceptar la siguiente hipótesis nula (restricción):

$$H_{0X}: \beta_1 = \beta_2$$
$$H_{0Y}: \beta_3 = \beta_4$$

Para lo anterior, se utilizó el método estadístico denominado análisis de datos panel donde la característica fundamental es que los datos combinan una dimensión temporal (*t*) con una transversal (*n*).

El análisis de datos panel permite contar con un número mayor de observaciones, incrementando los grados de libertad y reduciendo la colinealidad entre las variables independientes, aportando valiosa información que no se podría obtener con análisis individuales agrupando los datos en cortes transversales o en series de tiempos temporales (Hsiao 2003), adicionalmente, permite

controlar las variables que no se pueden observar o medir (e.g. factores culturales), así como también las variables que cambian con el tiempo, pero no a través de las entidades, destacando el valor de la heterogeneidad individual no observable.

La expresión general cuando se refiere a un modelo de datos panel es la siguiente:

$$y_{it} = \alpha_{it} + \sum_{k=1}^{k} X_{kit}\beta_k + \mu_{it} \qquad (3)$$

donde i=1,…..N y t = 1,….T; considerando i como la unidad de estudio (corte transversal) y t a la dimensión del tiempo, α es un vector de interceptos de n parámetros (donde n = it), β es un vector de K parámetros (donde son las variables independientes que se utilizan para contrastar las hipótesis) y X_{it} es la i-ésima observación al momento t para las variables independientes y μ_{it} es el término de error que se descompone de la siguiente manera:

$$\mu_{it} = \nu_i + \delta_t + \varepsilon_{it}$$

donde ν_i representa los efectos no observables que difieren entre las unidades pero no el tiempo (efectos individuales específicos), δ_t identifica los efectos no cuantificables que varían en el tiempo pero no entre las unidades (efectos temporales) y ε_{it} es el término de error aleatorio.

4.1 Descripción de la muestra

La investigación empírica se realizó con 43 (n = 43) empresas de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) que cotizaron durante el período 1996 a 2010 (t = 15 años), excluyendo empresas financieras. La fuente donde se obtuvo la información en su totalidad proviene del *Economática*, que es una base de datos que exclusivamente contiene la información financiera de las empresas públicas de Estados Unidos de Norteamérica, México, Perú, Colombia, Venezuela, Brasil, Chile y Argentina.

La tabla 1 muestra la descripción de las variables destacando el promedio de EVA que es negativo, infiriendo que las empresas no generaron valor a los accionistas durante el periodo de análisis, sin embargo, no es un resultado concluyente debido que el promedio es muy sensible a los valores extremos, aunado que considera el valor económico agregado total en partes iguales entre cada observación, haciendo que el resultado que muestra no sea representativo de la

población. El promedio de TSR y MVA son positivos indicando que las empresas han superado las expectativas de los inversionistas en el tiempo. La variable FLE es positiva reflejando que las empresas tienen capacidad de endeudamiento, situación que se refleja en la razón de apalancamiento financiero (D/C) al mostrar un promedio de 0.846, interpretándose que a cada unidad monetaria de los inversionistas en la empresa, se tienen 0.846 proveniente de deuda con costo.

Tabla 1

Descripción de las variables

Variable	Promedio	Desviación Estándar	Mínimo	Máximo
TSR*	0.228	0.588	- 0.892	4.394
MVA~	0.417	1.902	-28.379	24.094
ROE*	0.018	0.230	-1.946	2.563
EVA~	- 0.029	0.267	-3.225	2.715
FLE~	0.110	0.470	-5.274	4.193
D/C	0.846	1.889	0.000	20.442
Tamaño	7.181	0.610	5.418	8.784

*términos reales

~se deflactaron utilizando el valor de mercado al 31 de diciembre del año *t-1* para mitigar posibles problemas de escala y heterocedasticidad (Eaton, 1998; Chen y Dood, 2001).

La tabla 2 muestra la correlación de Pearson de manera matricial entre las variables objeto del presente estudio, donde la variable EVA presenta un coeficiente de correlación de 0.4253 con MVA y de 0.2040 con TSR, indicando que la variable EVA presenta un mayor grado de asociación con MVA en comparación con el que presenta con TSR. La métrica financiera ROE presenta una relación positiva significativa con TSR de 0.1648, mientras que con MVA solo es de .0086. FLE presenta un mínimo grado de asociación con TSR, siendo diferente con MVA, al presentar un coeficiente de correlación negativo de -0.4815 indicando que presenta una relación inversa con el valor económico agregado. D/C presenta un mayor nivel de relación con TSR en comparación con MVA, destacando un coeficiente negativo de correlación para ambos. La

variable Tamaño presenta una relación lineal positiva con TSR y MVA, sin embargo, ambos coeficientes de correlación tienden a cero indicando que existe una débil relación con ambos medidores.

Tabla 2

Matriz de Correlación de Pearson (R)

	TSR	MVA	ROE	EVA	FLE	D/C	Tamaño
TSR	1						
MVA	0.2157	1					
ROE	0.1648	0.0086	1				
EVA	0.2040	0.4253	0.1632	1			
FLE	0.0246	-0.4815	-0.1164	-0.2284	1		
D/C	-0.1565	-0.0947	-0.3546	-0.1276	0.2817	1	
Tamaño	0.0182	0.0597	0.1489	0.0993	-0.0257	-0.0243	1

En términos de capitalización bursátil, el valor total de la muestra de las 43 empresas analizadas fue de 537 miles de millones de pesos y 4,897 miles de millones de pesos para 1996 y 2010 respectivamente, mostrando un incremento del 811.9%. Bajo una perspectiva de mercado, los resultados presentados por las empresas han sido premiados por los inversionistas a través de la oferta y demanda de las acciones, mecanismo con el cual se realiza la asignación de valor en los mercados.

5. Resultados Empíricos

a) *Pruebas de contenido de Información Relativa*

Se evaluó el contenido de información relativa comparando el R^2-ajustado de las regresiones ordinarias individuales de cada variable independiente utilizando la ecuación 1. La tabla 3 muestra los resultados obtenidos ordenando de mayor a menor, de izquierda a derecha, el R^2-ajustado de cada una de las variables independientes. La significancia estadística medida por el valor p se muestra de manera centrada para cada una de las tres combinaciones posibles entre las variables independientes que se obtienen de la ecuación 2.

Tabla 3

Prueba de información relativa de EVA, ROE y FLE

Panel a: Prueba relativa para la hipótesis 1 (H_1)

De mayor a menor por R^2-ajustado		(1)		(2)		(3)
	Obs.	ROE	>	EVA	>	FLE
R^2-ajustado	546	0.0438		0.0380		0.0084
valor p[a]			(0.000)*		(0.000)*	
				(0.000)*		

Panel b: Prueba relativa para la hipótesis 2 (H_2)

De mayor a menor por R^2-ajustado		(1)		(2)		(3)
	Obs.	FLE	>	EVA	>	ROE
R^2-ajustado	546	0.2324		0.1880		-0.0034
valor p[a]			(0.000)*		(0.000)*	
				(0.000)*		

***significativo al 10%; ** significativo al 5%; *significativo al 1%

El valor *p* en paréntesis representa la prueba estadística de dos colas de la hipótesis nula de no diferencias entre las variables independientes combinadas en pares. La primera fila representa el valor *p* entre la variable independiente con mayor R^2-ajustado con la segunda, posteriormente la segunda con la tercera, y en la siguiente fila se muestra el valor *p* de la primera con la tercera.

En el *panel a* de la tabla 3 presenta los resultados de la prueba relativa para la hipótesis 1 donde ROE es la que presenta el mayor R^2-ajustado en comparación con EVA, que se ubica en el segundo lugar, y FLE como la tercera. Lo anterior sugiere que el ROE es la medida financiera que mayor capacidad de explicación tiene con TSR en comparación con las otras dos, destacando la mínima capacidad de explicación que muestra FLE al presentar un R^2-ajustado de 0.0084. Los resultados obtenidos para la hipótesis 2 se muestran en el *panel b* de la tabla 3, donde FLE es la que mayor capacidad tiene al explicar los cambios en MVA, en comparación con EVA y ROE.

En base a los resultados obtenidos de la prueba de información relativa para ambas hipótesis, no hay evidencia para sustentar que el valor económico agregado sea el medidor interno de creación

de valor que mayor capacidad tiene para explicar TSR y MVA. A pesar de que el EVA tiene un R^2-ajustado significativo en ambas pruebas, su capacidad para explicar las variables dependientes no sobrepasa a la capacidad de explicación de ROE y FLE, por lo tanto no podemos afirmar que EVA es el medidor que mejor explica los cambios en los precios de las acciones en México.

b) ***Pruebas de contenido de Información Incremental***

La tabla 4 muestra los resultados del análisis de información incremental para cada una de las hipótesis utilizando el modelo de regresión descrito en la ecuación 1 y 2. En el *panel a* de la tabla 4 presenta los resultados para la hipótesis 1 destacando la combinación ROE - EVA con el mayor R^2-ajustado, donde ROE es la variable que más agrega información en comparación con EVA y FLE. Con respecto a las pruebas efectuadas para la hipótesis 2, la combinación EVA -FLE presenta un R^2-ajustado significativo de 0.3397 donde FLE es la que mayor información aporta en comparación con EVA. Lo anterior confirma que EVA no es el mejor medidor financiero de creación de valor, en comparación con ROE y FLE, al momento de explicar la creación de valor medido por TSR o MVA.

Tabla 4

Prueba de información incremental de EVA, ROE y FLE

Panel a: Prueba incremental para la hipótesis 1 (H_1)

Combinaciones	Obs.	ROE- EVA	EVA-FLE	ROE-FLE
R^2-ajustado	546	0.0824	0.0605	0.0517
Valor Incremental de[a]*:*				
ROE		0.0444		0.0433
EVA		0.0386	0.0521	
FLE			0.0225	0.0079
Panel b: Prueba incremental para la hipótesis 2 (H_2)				
R^2-ajustado	546	0.1891	0.3397	0.2342
Valor Incremental de[a]*:*				
ROE		0.0011		0.0018
EVA		0.1925	0.1073	
FLE			0.1517	0.2376

[a]El valor incremental se obtiene de la diferencia de R^2-ajustado obtenido de manera individual de cada una de las variables independientes aplicando la ecuación 1 con el R^2-ajustado de las posibles combinaciones entre ellas utilizando la ecuación 2.

Para complementar el estudio de asociación incremental, se formularon los siguientes modelos de regresión datos panel para cada una de las hipótesis utilizando la ecuación 3:

$$H_1: TRS_{it} = ROE_{it} + ROE_{it-1} + EVA_{it} + EVA_{it-1} + FLE_{it} + FLE_{it-1} + D/C_{it} + Tamaño_{it} + \varepsilon_{it} \quad (4)$$

$$H_2: MVA_{it} = ROE_{it} + ROE_{it-1} + EVA_{it} + EVA_{it-1} + FLE_{it} + FLE_{it-1} + D/C_{it} + Tamaño_{it} + \varepsilon_{it} \quad (5)$$

Para determinar la regresión datos panel que mejor aplica para encontrar dicha asociación, se realizó la prueba de Hausman en ambas regresiones. Para H_1 se obtuvo una Prob > $chi^2 = 0.6018$, considerando un nivel de significancia del 95%, se concluye que los errores únicos no están correlacionados con los regresores, indicando que las características individuales de las empresas que forman parte de la muestra no influyen en la variable TSR, por lo tanto, el modelo de datos de efectos aleatorios es el adecuado. Con respecto a H_2, la prueba de Hausman arrojo una Prob > $chi^2 = 0.000$, tomando un nivel de confianza del 95%, se rechaza la hipótesis nula que establece que los errores únicos no están correlacionados con los regresores, indicando que las características individuales de las empresas que forman parte de la muestra si influyen en la variable MVA, por lo tanto, el modelo datos panel de efectos fijos es el adecuado para evaluar el nivel de asociación de las variables independientes con la variable dependiente. Con el propósito de obtener una mejor significancia de los regresores, y disminuir los problemas de heterocedasticidad, autocorrelación y correlación contemporánea, se ajustaron los errores estándar de los coeficientes utilizando la matriz de covarianza no paramétrica de Driscoll y Kraay (1998), con el propósito de generar errores estándar consistentes y robustos tantos transversales y longitudinales.

Para encontrar el nivel de asociación incremental de cada una de las variables independientes, se realizó una prueba de significancia utilizando el estadístico F para cada uno de los modelos de regresión. El panel a de la tabla 5 muestra los resultados del modelo de regresión expresado en la

ecuación (4) donde el estimador ROE_{it} y ROE_{it-1} presentan el mayor estadístico F con respecto a los demás con un valor p significativo al 1%, observándose que, en términos relativos, ROE es la variable que mayor aporta información al explicar los cambios en TSR, caso contrario al momento de explicar los cambios en MVA, ya que presenta un estadístico F de 0.03, siendo la variable que menor información incremental tiene con respecto al valor económico agregado y el flujo libre de efectivo. El panel b de la tabla 5 presenta los resultados del modelo de regresión expresado en la ecuación 5 donde EVA y FLE son las variables que presentan el mayor estadístico F de 19.46 y 18.66, respectivamente, en comparación con ROE. En base a lo anterior, se rechaza la hipótesis 1 ya que el ROE explica mejor los movimientos en TSR que EVA, sin embargo, EVA y FLE presentan un nivel de significancia similar para explicar los cambios en MVA. Al no existir una diferenciación importante entre EVA y FLE, se concluye que el poder explicativo del valor económico agregado sobrepasa a ROE pero es similar al mostrado por FLE, por lo que se rechaza la hipótesis 2.

Tabla 5

Prueba de información incremental de EVA, ROE y FLE

Panel a: Prueba incremental para la hipótesis 1 (H_1)

Modelo datos panel: efectos aleatorios: $R^2 = 12.96\%$

	Const.	ROE_{it}	ROE_{it-1}	EVA_{it}	EVA_{it-1}	FLE_{it}	FLE_{it-1}	D/C	Tamaño
Coeficiente	0.1925	0.30503	-0.5189	0.44177	0.17788	0.13738	0.17098	-0.0469	0.00865
estadístico *t*	0.400	2.480	-4.270	2.900	2.490	1.540	4.780	-1.830	0.140
estadístico *F*		19.24		2.64		0.13			
valor *p*[a]		(.000)*		(.128)		(.724)			

Panel b: Prueba incremental para la hipótesis 2 (H_2)

Modelo datos panel: efectos fijos: $R^2 = 29.71\%$

Coeficiente	5.3247	-0.4660	0.6422	2.37437	0.22853	-1.5173	0.30563	0.0240	-0.6537
estadístico *t*	0.970	-0.660	-1.060	4.040	1.240	-4.390	1.750	0.520	-0.830
estadístico *F*		0.03		19.46		18.66			
valor *p*[a]		(.865)		(.000)*		(.000)*			

***significativo al 10%; ** significativo al 5%; *significativo al 1%

[a]El valor *p* en paréntesis representa la prueba estadística de dos colas de la hipótesis nula de no contenido de información incremental, Ho: $\beta_k = \beta_{kt-1} = 0$.

El MVA sobresale como el mejor medidor externo de creación de valor al presentar una R^2 de 29.71% en comparación con TSR que registra un R^2 de 12.96%, aunado a que MVA presenta una relación significativa con dos medidores internos, que por su metodología de cálculo se consideran medidores robustos que se basan en la generación de utilidades de la operación exclusivamente, no así con ROE ya que se basa en la utilidad neta.

6. Conclusiones

La globalización ha afectado de sobremanera el funcionamiento de las empresas en todos los países, generando una feroz competencia para la obtención del dinero de los accionistas, donde las empresas ganadoras son aquellas que demuestran que son proyectos viables y que pueden cumplir con las expectativas de los inversionistas. Para lograr lo anterior, la gerencia debe implementar objetivos que permitan alcanzar en el tiempo el éxito empresarial y que los mercados premien dicho esfuerzo. No solo basta contar con una estrategia orientada a la creación de valor, está debe de ir acompañada de un sistema de medición adecuado con el propósito de saber sí se está logrando el objetivo en el entendido de que no se puede controlar lo que no se puede medir.

El valor agregado de mercado es el medidor externo que mejor cuantifica la creación de valor por el gran público inversionista, ya que presenta una conexión robusta, en mayor medida, con el flujo libre de efectivo, y en menor medida, con el valor económico agregado. Ambos medidores se basan en la generación exclusiva de la utilidad que proviene de la operación de las empresas, es decir, la capacidad de creación de valor de las empresas depende de las ventas, costos y gastos, haciendo a un lado las utilidades que provienen del manejo financiero. La relación negativa que presenta MVA con FLE, indica que las empresas con mayores gastos de capital generan expectativas de crecimiento futuros, viéndose reflejado en la apreciación del precio de la acción por parte del gran público inversionista.

El valor económico agregado no presenta una relación con los movimientos de los precios acciones que le permita ser denominada como la medida definitiva en términos de cuantificación de riqueza, sin embargo, es una medida interna que puede ayudar a las empresas a identificar las

áreas que generan o destruyen valor, haciendo de esta una herramienta de planeación estratégica más que un medidor pretensioso para explicar los movimientos de los precios de las acciones.

El trabajo de investigación que se presenta contribuye al entendimiento de la generación de valor de las empresas mexicanas, además de proporcionar información valiosa que los administradores pueden considerar al momento de formular las estrategias de negocio que marcan las acciones futuras de las empresas y contar con métricas que les permitan saber si están logrando el objetivo fundamental que persigue las finanzas corporativas que es el de maximizar el valor de los accionistas.

Bibliografía

Adam, J.A. (2005). Los métodos de valuación de empresas y su relación con la capacidad de las organizaciones para generar valor. *Revista de Contaduría y Administración*, 217(3), 11-47.

Baltagi, H.B. (2005). *Econometric Analysis of Panel Data* (3ra ed). New York: John Wiley & Sons.

Barth, M.E. (1994). Fair value accounting: Evidence from investment securities and the market valuation of banks. *Accounting Review*, 69, 1-25.

Bao, B.H. y Bao, D.H. (1998). Usefulness of value Added and Abnormal Economic Earnings: An Empirical examination, *Journal of Business Finance and Accounting*, 25(1-2), 251-265.

Biddle, G.C., Seow, G. S. y Seigel, F. (1995), Relative versus Incremental Information Content. *Contemporary Accounting Research*, 12, 1-23.

Biddle, G.C., Bowen, M.R. y Wallace, J.S. (1997). Does EVA beat Earnings? – Evidence on Associations with Stock Returns and Firm Values, *Journal of Accounting and Economics*, 24(3), 301-336.

Biddle, G.C. (1998). Economic Value Added: Some Empirical EVAdence, *Managerial Finance*, 24, 60-70.

Black Andrew, Philip Wright y John E. Bachman (1998). *In Search of Shareholder Value: Managing The Drivers of Performance* (1ra ed). London: Financial Times Management.

Chen, S. and Dodd, J.L. (1997). Economic Value Added (EVA): An Empirical Examination of a New Corporate Performance Measure. *Journal of Managerial Issues*. 9(3), 318-333.

Chong, A., Guillen, J. y Lopez-de-Silanes, F. (2009). Corporate governance reform and firm in Mexico: an empirical assessment. *Journal of Economic Policy Reform*, 12(3), 163-188.

Collins, D.W., Maydew, E.L. y Weiss, I.S. (1997). Changes in the value-relevance of earnings and book values over the past forty years. *Journal of Accounting and Economics*, 24(1), 39-67.

Copeland, Thomas; Koller, Tim; y Murrin, Jack, (1995). *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies* (2da ed). New York: John Wiley & Sons.

Dechow, P.M. (1994). Accounting earnings and cash flows as measures of firm performance: The role of accounting accruals. *Journal of Accounting and Economics*, 18, 3 - 42.

Driscoll, J. C., y Kraay, A.C. (1998). Consistent Covariance Matrix Estimation with Spatially Dependent Panel Data. *Review of Economics and Statistics*, 80, 549–560.

Durán, R., Lorenzo, A. y Valencia, H. (2007), Value Relevance of the Ohlson Model with Mexican Data. *Revista de Contaduría y Administración*, 223(3), 33-52.

Dhrymes, P., Friend, I. y Gultekin, B. (1984). A Critical Reexamination of the Empirical Evidence on the Arbitrage Pricing Theory. *Journal of Finance*, 6, 323-346.

Easton, P. D., y Harris, T. S. (1991). Earnings as an Explanatory Variable for Returns. *Journal of Accounting Research*, (Spring), 19-36.

Ehrbar, A. (1998). *EVA: The Real Key to Creating Wealth* (1ra ed). New York: John Wiley & Sons.

Fernandez, P. (2002). EVA, *Economic Profit and Cash Value Added Do not measure Sharholder Value*. *Research* (artículo No. 453). España: IESE - University of Navarra.

Feltham, G., G, Isaac, C. Mbagwn, y G. Vaidyanathan, (2004). Perhaps EVA Does Beat Earnings - Revisiting Previous Evidence. *Journal of Applied Corporate Finance*, 16(1), 83-88.

Grant, L. J. (2003). *Foundations of Economic Value Added* (1ra ed). New York: John Wiley & Sons, The Frank J. Fabozzi Series.

Hsiao, Cheng (2003). *Analysis of panel data* (1ra ed). UK: Cambridge University Press.

Holthausen, W., Watts, R. y Ross, L. (2001). The relevance of the value-relevance literature for financial accounting standard setting. *Journal of Accounting and Economics*, 31, 3-75.

Ismail, A. (2006). Is EVA associated with stock return than accounting earnings? The UK evidence. *International Journal of Managerial Finance*, 2(4), 343-353.

Lehn, K. y Makhija, A.K. (1997). EVA, Accounting profits, and CEO turnover: an empirical examination 1985-1994. *Journal of Applied Corporate Finance*, 10(2), 90-96.

Machuga, S., Pfeiffer, J y Verma, K. (2002), Economic Value Added, Future Accounting Earnings, and Financial Analysts' Earnings Per Share Forecasts, *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 18, 59-73.

Mayorga, M. Mauricio y Muñoz, S. E. (2000). *La técnica de datos de panel, una guía para su uso e interpretación*. Costa Rica: Banco Central.

Milunovich, S. y A. Tsuei (1996). Eva in the Computer Industry. *Journal of Applied Corporate Finance*, 9(2), 104-115.

O'Byrne, S.F. (1996). EVA and Market Value. *Journal of Applied Corporate Finance*, 9(1), 116-125.

Ohlson, J. and Penman, S.H. (1992). Disaggregated Accounting Data as Explanatory Variables of Retuns. *Journal of Accounting, Auditing and Finance*, 7, 553-573.

Saavedra, M.L. (2004). La valuación de empresas en México Aplicación del Modelo de Valor Económico Agregado: 1991-2000, *Revista de Contaduría y Administración*, 214(3), 1-23.

Sharma, A.K. y Kumar, S. (2010). Economic Value Added (EVA) - Literature review and relevant issues. *International Journal of Economics and Finance*, 2, 200-220.

Stewart, G. Benett (1991). *The Quest for Value* (1ra ed). New York: Harper Collins.

Stewart, G. Benett (1995, 1 de Mayo). *EVA Works But Not if you Make These Common Mistakes*. En Fortune, 117-118.

Smith, Adam (1790). *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nation* (1ra ed). Estados Unidos: Public Domain.

Uyemura, D.G., C.C. Kantor y J.M. Petit (1996). EVA for Banks: Value Creation, Risk Management and Profitability Measurement. *Journal of Applied Corporate Finance*, 9(2), 94-111.

Worthington, A.C. y T. West, (2004). Australian Evidence Concerning the information Content of Economic Value Added. *Australian Journal of Management*. 29(2)2, 201-223.

CAPÍTULO VII
Modelo para determinar calificaciones de riesgo sectorial ajustadas con criterios macroprudenciales.

Ricardo Cristhian Morales Pelagio
Universidad Nacional Autónoma de México

Arquímedes Pérez Herrera
Universidad Nacional Autónoma de México

Francisco López-Herrera
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

El entorno ampliamente competitivo que distingue al sector financiero en un contexto global cada vez más complejo, así como el incremento del riesgo a raíz de la crisis del 2008, exige a las instituciones financieras herramientas para detectar mejores oportunidades de negocio y esquemas para mitigar los riesgos asociados a estas. En este sentido, el objetivo del presente trabajo es el de desarrollar una metodología de calificación de riesgo sectorial basado en el análisis del riesgo económico, riesgo de portafolio y riesgo financiero, ajustado con los criterios macroprudenciales que anticipan la fase del ciclo económico y permiten determinar a priori un criterio de colocación de crédito (Asset allocation). La metodología desarrollada en el presente trabajo permitirá obtener la calificación de riesgo de cada uno de los sectores para apoyar a los comités de crédito y a las unidades de negocio en la toma de decisiones de otorgamiento de crédito de manera que permita detectar las oportunidades de negocio y los riesgos asociados de la 71 ramas que resumen a los 1,066 grupos de actividad económica en México.

1. Introducción

El entorno ampliamente competitivo que distingue al sector financiero en un contexto global cada vez más complejo, requiere que los profesionales que trabajan en las instituciones financieras aporten soluciones para detectar mejores oportunidades de negocio y esquemas para mitigar los riesgos asociados a esas soluciones. En este tenor, surge la motivación por desarrollar un modelo que permita detectar las oportunidades de negocio y los riesgos asociados de 71 ramas que resumen a los 1,066 grupos de actividad económica en México. El modelo permite obtener la

calificación de riesgo de cada uno de los sectores en una escala del uno al ocho, donde la primera implica menor riesgo y la segunda el mayor riesgo. Las calificaciones de riesgo sectorial que arroja el modelo sirven para apoyar a los comités de crédito y a las unidades de negocio en la toma de decisiones de otorgamiento de crédito mayorista, que está orientado a empresas grandes y medianas. A su vez, la calificación de riesgo sectorial, también sirve como elemento ponderador de los algoritmos de la calificación de riesgo que la institución financiera otorga a cada cliente.

Es preciso destacar que el cálculo de la calificación de riesgo sectorial que motiva el presente trabajo, está basado en el análisis de información procedente de dos tipos de fuente. Por un lado, tenemos la información financiera que se obtiene de los clientes de una institución financiera de banca múltiple donde se aplica este modelo y que por razones de discreción no mencionaremos su nombre, y en lo sucesivo cuando queramos hacer referencia a esta organización, solo nos referiremos a la institución financiera. Por otro lado, está la información pública que se obtiene de las Bases de Datos del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) y del Banco de México (Banxico). Entre ambas fuentes de información, podemos construir bases de datos para generar insumos cuantitativos que nos permitan determinar los componentes que ponderados, nos lleven a obtener la calificación de riesgo sectorial para cada uno de los 71 sectores que se abordan en el presente trabajo. Los componentes son: el riesgo económico, el riesgo de portafolio y el riesgo financiero. Así, mediante la calificación de riesgo sectorial se puede establecer una política de portafolio de acuerdo con el mayor o menor riesgo que se detecta en cada uno de los 71 sectores. No obstante, la calificación de riesgo sectorial que se obtenga mediante el uso del algoritmo que se expondrá en el presente trabajo deberá ajustarse o calibrarse con los criterios macroprudenciales.

En síntesis, el criterio macro prudencial anticipa la fase del ciclo económico para cada uno de los 71 sectores y permite determinar *a priori* un criterio de colocación de crédito (*Asset allocation*), independientemente de la calificación de riesgo calculada. Entonces, la política de portafolio obtenida con la calificación de riesgo sectorial, junto con el criterio macroprudencial, supone la determinación de la colocación del crédito con base en cuatro criterios: crecer alto, crecer, bajo, moderado reducir alto, reducir bajo. La Comisión Nacional Bancaria y de Valores (institución

reguladora del sistema bancario en México), mediante la Circular 1480, faculta a las instituciones financieras respecto al desarrollo de su propia metodología para calcular los riesgos de la industria o sectoriales. Este argumento nos da la justificación para construir un modelo que permita obtener la calificación de riesgo sectorial. Con base en la flexibilidad que nos otorga el regulador para desarrollar un modelo de cálculo de riesgos sectoriales y como preámbulo de los criterios macroprudenciales de control crediticio que empieza a proponer el Banco Internacional de Pagos, basados en las fases del ciclo económico de cada sector; se desarrolla el presente trabajo. Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo, es el de desarrollar un modelo que pondere las variables anteriormente descritas para determinar una calificación de riesgo sectorial para 147 grupos de actividad económica, actividades que abarcan a todos los sectores de la economía.

2. El análisis del crédito y la calificación del riesgo sectorial

El otorgamiento de crédito es la esencia del negocio bancario. Debido a este fenómeno, en la historia reciente del sector financiero a nivel global, la mitigación del riesgo asociado a las operaciones de crédito ha adquirido una importancia cada vez más relevante en el negocio de la intermediación financiera. En estricto sentido, el riesgo de crédito se define como la pérdida potencial producto del incumplimiento de la contraparte en una operación que incluye un compromiso de pago.[1] El proceso de administración de riesgos de crédito puede resumirse en dos grandes temas de estudio: análisis de crédito paramétrico y análisis de crédito no paramétrico.

El análisis de crédito paramétrico implica el uso de metodologías basadas en técnicas estadísticas que determinan la probabilidad de incumplimiento o de impago. Este tipo de análisis se utiliza para el análisis de riesgo en créditos al consumo, como tarjetas de crédito y créditos hipotecarios. El volumen de las operaciones de crédito al consumo es de amplias dimensiones, motivo por el cual sería muy costoso tener un grupo de profesionales y analistas financieros expertos que

[1] De Lara Haro, A. (2011). Medición y control de riesgos financieros. México: Limusa.

analizaran de forma detallada y homogénea cada una de las operaciones, he ahí la importancia del uso de estas técnicas para medir los riesgos en este segmento del negocio crediticio.

También tenemos al análisis de crédito no paramétrico, mismo que describiremos a continuación para identificar puntualmente donde está ubicado exactamente el problema que se resolverá en el presente trabajo. Por lo tanto, el resultado de la aplicación que se desarrollará servirá como elemento de juicio para tomar decisiones en un esquema de análisis de crédito no paramétrico.

El análisis de crédito no paramétrico se refiere al análisis tradicional, donde para medir la exposición al riesgo los bancos han elaborado un procedimiento homogéneo, que se conoce como las cinco *Ces* del solicitante:

a) Conocimiento del cliente
b) Capacidad de pago
c) Capital del cliente
d) Colateral
e) Condiciones cíclicas (mejor conocidas como sectoriales)

En el negocio bancario a cada una de las cinco *Ces*, se le otorga una calificación que a su vez permite ponderar una calificación de riesgo final a cada uno de los clientes. El problema que se plantea, es el de calificar el riesgo de la última *Ce* del procedimiento para medir la exposición al riesgo de los clientes. La quinta *Ce* es mejor conocida como condiciones cíclicas, o como condiciones económicas del sector en el que opera el cliente. Se refiere a un elemento importante para determinar la exposición al riesgo de crédito, ya que algunas industrias son altamente dependientes de un ciclo económico. En general, las firmas que fabrican bienes duraderos tienden a ser más dependientes de ciclos económicos que aquellas con bienes no duraderos. Así mismo, firmas que tienen una posición competitiva internacional son más sensibles a los ciclos económicos.

Las primeras cuatro *Ces*, se analizan con la documentación financiera dictaminada de cada cliente, mientras que la quinta *Ce* está en función de variables como: PIB, exportaciones,

importaciones, niveles de precios y morosidad de la cartera de crédito otorgada por el sistema financiero a una determinada actividad económica. El problema consiste en que en una determinada fase del ciclo económico de un sector puede estar creciendo de forma atípica, experimentando un posible sobre calentamiento del sector, incrementándose por tanto los riesgos de otorgamiento de crédito hacia ese sector en específico. La ausencia en la pronta detección de estos patrones ha llegado a generar grandes expectativas de colocación de crédito que después resultan en quebrantos, debido a que se generaron burbujas especulativas que no fueron detectadas a tiempo para disminuir la colocación de crédito en esos sectores. De cierta forma, controlar el crecimiento excesivo de crédito en un sector que se está expandiendo de manera atípica puede coadyuvar a mitigar riesgos en caso de que se genere una burbuja especulativa evitando que se llegue a una catástrofe. Un control de este tipo pudo haber amortiguado la crisis de crédito observada en Estados Unidos durante 2008 y 2009 en el sector inmobiliario.

Para las instituciones financieras y estabilidad del sistema financiero en general, la determinación de la calificación para otorgar crédito permite anticipar riesgos en los sectores donde se planea colocar crédito para llevar a cabo acciones mitigantes y permite detectar oportunidades de negocio en los sectores que han mejorado su posición en una escala de medición.

La medición de riesgos orientados a la toma de decisiones en el otorgamiento de crédito se basa en análisis de información financiera y económica que fluye cada vez con mayor celeridad. Ante este escenario, surge la necesidad de procesar grandes volúmenes de información para obtener información sistematizada que nos permita tomar decisiones para mitigar riesgos y detectar oportunidades de negocio. Por lo tanto, la fusión de la información financiera de las empresas con variables económicas representa una necesidad y reto que requiere de un análisis integral y experiencia para poder generar un modelo de cálculo útil que permita aportar información sectorial de primera mano a las áreas de negocio y a los comités que sancionan operaciones de crédito. Así, la calificación de riesgo sectorial se convierte en un elemento que permite calibrar la calificación de riesgo de cada cliente de crédito mayorista en función a su respectivo grupo de actividad económica, o sector. En primer lugar permite detectar oportunidades de negocio cuando el ciclo de un determinado sector está a la alza. En segundo lugar permite mitigar riesgos de

colocación al pronosticar de forma anticipada la desaceleración del ciclo económico del sector que se esté analizando.

Tras la crisis de crédito observada en Estados Unidos durante 2008, el Banco Internacional de pagos (Comúnmente conocido como Banco de Basilea) ha empezado a tomar en cuenta criterios macroprudenciales para mitigar riesgos, que pueden abordarse desde un punto de vista sectorial. En México, la normativa que promueve el cálculo de riesgos sectoriales es la circular 1480 de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores. En dicho documento se faculta desde el año 2000 a los Bancos para qué elijan de forma interna sus propias métricas para medir los riesgos sectoriales.

De los criterios macroprudenciales que se exponen en algunos trabajos recientes del Banco Internacional de Pagos se desprende que existe la posibilidad de que el marco regulatorio que faculta a las instituciones para generar su propia calificación de riesgo sectorial llegue a revisarse. La libertad que hasta el momento se tiene en México para calcular la calificación de riesgo sectorial y la expectativa de que este tema llegue a complementarse con los criterios macroprudenciales, motivan el presente trabajo.

3. Aspectos de la regulación

3.1. Regulación Internacional, marco de Basilea III

a) Política macroprudencial y prociclicidad

El establecimiento de esquemas macroprudenciales resulta esencial para dotar de unos cimientos más sólidos al sistema financiero. La crisis financiera de 2008-2009 aceleró los esfuerzos para desarrollar estos esquemas y las autoridades están adquiriendo experiencia en la utilización de instrumentos prudenciales para alcanzar objetivos sistémicos.[2] El objetivo general de la política macroprudencial es limitar el riesgo sistémico, es decir, el riesgo de que las turbulencias en el

[2] Enhancing sound regulation and strengthening transparency, marzo de 2009; y M. Brunnermeier, A. Crockett, C. Goodhart, A. Persaud y H. S. Shin, «The fundamental principles of financial regulation», Geneva Reports on the World Economy, nº 11, julio de 2009.

sistema financiero puedan desestabilizar la macroeconomía.[3] Para implantar la política macroprudencial, los instrumentos habitualmente empleados en la regulación y supervisión prudencial de las instituciones financieras individuales se adaptan con el fin de limitar los riesgos en el sistema financiero en su conjunto.

De acuerdo con el Banco Internacional de pagos, el término macroprudencial ha adquirido tanta popularidad desde la crisis de 2008-2009 que su uso se ha generalizado para calificar un buen número de políticas cuyos objetivos primarios no se ciñen al dominio específico de la estabilidad financiera.[4] Con esta extensión indiscriminada se corre el riesgo de complicar y obstaculizar el desarrollo de las políticas y, con ello, de socavar el respaldo público a la política macroprudencial.

Numerosas políticas — incluidas la monetaria, fiscal y cambiaria— pueden fomentar la estabilidad financiera de una forma u otra, y a menudo lo hacen. Sin embargo, los instrumentos que se emplean con el objetivo primario explícito de promover la estabilidad del sistema financiero en su conjunto, y que inciden de forma más directa y fiable sobre la estabilidad financiera, deben considerarse estrictamente macroprudenciales.

Dichas herramientas poseen una índole prudencial. En esencia, la política macroprudencial amplía la perspectiva de la política prudencial tradicional, cuyas herramientas fomentan las mejores prácticas y limitan la asunción de riesgo en el ámbito de las instituciones e instrumentos financieros concretos. La definición de instrumento macroprudencial presenta sin duda cierta ambigüedad, y la idoneidad de las herramientas puede cambiar al hacerlo la estructura de la economía y del sistema financiero. Por ejemplo, en las economías de mercado emergentes se hace un uso cada vez más frecuente de los requerimientos de reservas con fines de estabilidad financiera, algo que podría considerarse macroprudencial en la medida en que dichos requerimientos limitan el riesgo de liquidez. Entender los principales instrumentos macroprudenciales como herramientas que se superponen a la configuración actual de los

[3] J. Caruana, *Systemic risk: how to deal with it?*, BPI, 12 de febrerode 2010, www.bis.org/publ/othp08.htm.
[4] Banco Internacional de Pagos, *80° Informe Anual*, 1 de abril de 2009-31 de marzo de 2010. Basilea, 28 de junio de 2010.

instrumentos prudenciales, o como ajustes de ésta, tienen la ventaja de que permite distinguir con claridad entre medidas macroprudenciales y configuración microprudencial de los instrumentos. Esta implementación en forma de superposición pone de relieve la independencia de la función macroprudencial y la diferencia entre las perspectivas macroprudencial y microprudencial.[5]

La política macroprudencial limita el riesgo sistémico encarando las dos principales externalidades del sistema financiero. La primera es la quiebra en cadena de entidades provocada por sus vínculos y exposiciones comunes. La segunda externalidad es la prociclicidad y esta consiste en la amplificación de las interacciones en el seno del propio sistema financiero y entre éste y la macroeconomía. Como ha podido comprobarse recientemente, la prociclicidad puede fomentar la formación de burbujas insostenibles que, al estallar, pueden amplificar las turbulencias y provocar una profunda recesión económica. La lucha contra la prociclicidad está estrechamente ligada a la política macroeconómica anticíclica tradicional, por lo que el desarrollo de un marco eficaz para abordar este fenómeno plantea cuestiones propias del diseño de las políticas fiscal y monetaria. [6]

El objetivo macroprudencial no debe prometer más de lo que las autoridades pueden cumplir. En concreto, el objetivo no debería definirse en términos de gestión del ciclo económico, ni debería intentar eliminar los ciclos de crédito o controlar el precio de los activos *per se*. El objetivo más realista es mejorar la capacidad de reacción del sistema financiero frente a eventuales tensiones financieras. Este objetivo puede alcanzarse con el apoyo del cálculo de la calificación de riesgo del sector, calificación que es caso de estudio de este trabajo.

A su vez, los instrumentos empleados para mejorar la capacidad de respuesta, como la calificación de riesgo sectorial, deben calibrarse en la medida de lo posible utilizando reglas y directrices sencillas, como por ejemplo límites máximos de asunción de riesgo y vínculos a indicadores claros de riesgo sistémico.[7] Según el Banco Internacional de Pagos, es importante

---

[5] P. Clement, *Origen y evolución del término macroprudencial,* Informe Trimestral del BPI, marzo de 2010, pp. 59–67.
[6] Banco Internacional de Pagos, *80° Informe Anual*, 1 de abril de 2009-31 de marzo de 2010. Basilea, 28 de junio de 2010.
[7] Ídem.

advertir cuatro aspectos sobre el tema de los criterios macroprudenciales y la prociclicidad. Uno, no se dispone de una varita mágica que pueda acabar con la inestabilidad del sistema financiero. Dos, los marcos que se establezcan tendrán que reflejar las circunstancias específicas de cada país. Tres, la mejora de la capacidad de reacción del sistema financiero no evitará que se produzcan recesiones económicas. Y, por último, la política monetaria deberá desempeñar un papel importante en la promoción de la estabilidad financiera.

La forma más eficiente de crear reservas anticíclicas, es acumularlas durante las fases expansivas del ciclo, fenómeno que puede calcularse con la calificación de riesgo sectorial que se formula a lo largo del presente trabajo. Aun cuando este planteamiento se halla todavía en sus etapas iniciales y no suele aplicarse en el contexto de un objetivo macroprudencial explícito, se ha hecho más habitual desde la crisis y en estos momentos se analizan nuevas propuestas en esta línea.[8]

La evidencia empírica reciente indica que usar instrumentos prudenciales tradicionales con fines macroprudenciales contribuye a mejorar la capacidad de reacción del sistema financiero.[9] En concreto, la aplicación bastante generalizada de ese tipo de medidas en varias economías asiáticas durante la pasada década con el fin de reforzar la solidez de los bancos de la región podría explicar en parte por qué estas instituciones resultaron menos afectadas por la euforia de los mercados inmobiliarios.

La moderación de las dos fases del ciclo crediticio y de precios de los activos reporta ventajas a largo plazo que, sin duda alguna, merece la pena estudiar. Si se conocieran mejor las relaciones entre la configuración de los instrumentos macroprudenciales y las fluctuaciones financieras y económicas, podría desarrollarse un enfoque dirigido a contener activamente los excesos de los mercados de activos y de crédito en las fases expansivas. Moderar significativamente los ciclos del crédito y de precios de los activos permitiría potenciar las ventajas que aporta la política macroprudencial a la estabilización macroeconómica, amplificando al máximo su función de respaldo de la política monetaria. Sin embargo, hasta el momento la experiencia parece indicar

[8] Foro sobre la Estabilidad Financiera, Report of the Financial Stability Forum on addressing procyclicality in the financial system, abril de 2009.
[9] Comité sobre el Sistema Financiero Global, «Macroprudential instruments and frameworks: a stocktaking of issues and experiences», CGFS Papers, nº 38, mayo de 2010.

que un objetivo macroprudencial ambicioso en esos términos puede deparar consecuencias imprevistas, por lo que debe evitarse en el momento actual.[10]

La mejor forma de limitar los excesos en el crédito y en el precio de los activos sería combinar las políticas macroprudencial y monetaria a fin de contener la acumulación de desequilibrios, ya que, por separado, no lo conseguirían. El uso de cocientes fijos, o de límites absolutos, ha sido bastante habitual en fases alcistas. Se han aplicado a las condiciones de los préstamos (por ejemplo, la relación entre importe del préstamo y valor del activo (LTV), o entre el servicio de la deuda y el nivel de ingresos, y límites a los márgenes de garantía)[11], a los descalces de monedas[12] y, con menor frecuencia, a la dotación de provisiones para préstamos incobrables en función de la evolución histórica del promedio de pérdidas sobre préstamos dudosos (provisiones through the cycle o bien dinámicas).[13]

De forma similar, el Comité sobre el Sistema Financiero Global ha recomendado estudiar la implantación de requerimientos de márgenes de garantía basados en valoraciones que reflejen la peor situación esperada a lo largo del ciclo (through the cycle) de los activos de garantía, lo que disminuiría la sensibilidad procíclica de dichos márgenes a las condiciones económicas y financieras.[14] En lo que respecta al capital de los bancos, pueden establecerse reservas fijas superiores a los mínimos reguladores que, en caso de que el banco incurra en pérdidas, puedan liberarse o al menos utilizarse gradualmente.

---

[10] Banco Internacional de Pagos, *80° Informe Anual*, 1 de abril de 2009-31 de marzo de 2010. Basilea, 28 de junio de 2010.

[11] S. Gerlach y W. Peng, *Bank lending and property prices in Hong Kong*, Journal of Banking and Finance, vol. 29, nº 2, febrero de 2005, pp. 461–81; Banco Central de Malasia, Financial stability and payment systems report 2009, marzo de 2010; y Banco de la Reserva de la India, Report on trend and progress of banking in India 2008–09, octubre de 2009.

[12] *Bank lending and property prices in Hong Kong*, Journal of Banking and Finance, vol. 29, nº 2, febrero de 2005, pp. 461–81; Banco Central de Malasia, Financial stability and payment systems report 2009, marzo de 2010; y Banco de la Reserva de la India, Report on trend and progress of banking in India 2008–09, octubre de 2009.

[13] J. Saurina, *Loan loss provisions in Spain*. A working macroprudential tool», Banco de España, Revista de Estabilidad Financiera, vol. 17, noviembre de 2009, pp. 11–26

[14] Comité sobre el Sistema Financiero Global, «The role of margin requirements and haircuts in procyclicality», CGFS Papers, nº 36, marzo de 2010.

Ante el escenario descrito, el cálculo de la calificación de riesgo sectorial es fundamental para tener un orden de magnitud que permita calificar los riesgos de los sectores económicos y coadyuvar con ello a alimentar algoritmos que sirvan para la estimación de requerimiento de márgenes y al cálculo de reservas. Así como hemos visto fases del ciclo crediticio y de precios de los activos que son importantes, también la relación entre crédito y PIB funciona bien para la fase de acumulación, pero suele avisar con retraso de la aparición de tensiones, por lo que activa tarde la liberación de reservas. Por lo tanto, este efecto puede mitigarse con la Calificación de Riesgo Sectorial que permite adelantar la fase del ciclo para tomar decisiones.

b) Especificidad del riesgo sectorial

Con base en la regulación internacional que promueve las políticas macroprudenciales que hemos descrito en este marco referencial y con base en los criterios de la circular 1480 emitida por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), las instituciones financieras pueden aplicar el cálculo de calificación de riesgo sectorial que se describe en el presente trabajo, para 71 grupos de actividad económica. Los focos de riesgo localizables justificarán la adopción de un enfoque sectorial específico. A su vez, el diseño de requerimientos de capital anticíclicos, basados en la Calificación de Riesgo Sectorial, debe ejemplificar los problemas de intervención en sectores específicos. Por ejemplo, vinculando el incremento de las reservas a un aumento del crédito bancario a un determinado sector, se garantizaría que las reservas realmente reflejen los riesgos sistémicos que origina dicho sector.

Sin embargo, no se tendrían en cuenta las exposiciones indirectas por la transmisión de problemas de este sector al sistema financiero y a la economía en general. Además, los bancos podrían reaccionar a la imposición de medidas dirigidas a sectores concretos relajando las condiciones del crédito en otras áreas para sostener el crecimiento de su inversión crediticia total. Así pues, sería difícil resistirse a la tentación de aplicar medidas ad hoc a cada vez más instrumentos crediticios y sectores.

En suma, para preservar la estabilidad financiera y macroeconómica a largo plazo es necesario implementar marcos macroprudenciales cuidadosamente diseñados y ajustar los marcos de

política monetaria vigentes. El consenso actual en materia de política brinda una oportunidad única para acometer esas tareas. El reto para la política macroprudencial reside en establecer un marco que sea eficaz y que goce del apoyo continuo de la sociedad. Obviamente, esta política no es la panacea económica ni debería presentarse como tal, pues seguirán produciéndose recesiones incluso en circunstancias de estabilidad financiera. Es preciso que las expectativas de la sociedad sobre los marcos macroprudenciales correspondan con lo que éstos pueden ofrecer.

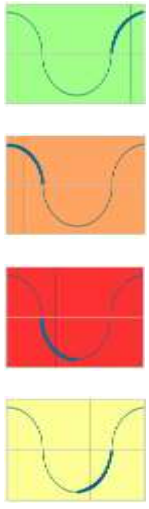
Considerando la evidencia disponible sobre las metas que pueden alcanzarse, el objetivo de la política macroprudencial en este momento debería hacer hincapié en reforzar la capacidad de reacción del sistema financiero. Lograr este objetivo también ayudaría a evitar el exceso de crecimiento del crédito y una dinámica insostenible de los precios de los activos. Con el tiempo, según se amplíe nuestro conocimiento, podrá ampliarse el marco en la misma medida para conceder más importancia a la moderación de los ciclos del crédito y del precio de los activos. La capacidad de reacción del sistema financiero puede reforzarse aplicando sencillas herramientas macroprudenciales. Pueden implantarse con relativa facilidad límites fijos, estabilizadores automáticos y ajustes generales de los parámetros de los instrumentos; es decir, ajustes que se correspondan con la fiabilidad de los indicadores disponibles de riesgo sistémico.

La atención puede centrarse en sectores concretos, como el inmobiliario, cuando esté claro que constituyen un foco habitual de problemas que afectan a todo el sistema. Sin embargo, en general, la política macroprudencial debería cuidarse de centrarse demasiado en sectores económicos específicos, ya que esa actuación puede confundirse con políticas de asignación de crédito y además debe consolidarse firmemente el carácter sistémico de la política macroprudencial. Quienes tengan competencias en materia de política macroprudencial han de diseñar los mecanismos de gobernanza necesarios para garantizar que su aplicación descansa en cimientos firmes. Es esencial que estas políticas cuenten con cierto grado de independencia operativa, pero más allá de estas consideraciones generales, los mecanismos de gobernanza habrán de reflejar las circunstancias particulares de cada país. Una política macroprudencial eficaz respaldará a la política monetaria. No obstante, la articulación de la política monetaria deberá adaptarse al desarrollo y aplicación de los marcos macroprudenciales. Además, con el fin de potenciar al máximo su aportación a la estabilidad tanto financiera como macroeconómica, la política

monetaria tendrá que ampliar sus miras más allá de la inflación a corto plazo, para que así las autoridades monetarias tengan más en cuenta la estabilidad financiera. De este modo, promoverían de hecho la estabilidad de precios de una forma más eficaz a más largo plazo.

Como hemos podido apreciar, el marco teórico de los criterios macro prudenciales es muy amplio y abarca desde temas de información económica hasta el cálculo de límites para generar las reservas, este último por lo general se hace a nivel de cliente. Por lo tanto, se pretende demostrar la utilidad de los criterios macroprudenciales para calibrar un modelo de calificación de riesgo para 71 sectores económicos, solamente nos vamos a enfocar en la información económica y en las fases del ciclo económico, como se presentan en la figura 1

Figura 1. Fases del ciclo económico



Fase de Expansión. Cuando el componente cíclico del indicador en cuestión se encuentra por arriba de la tendencia de largo plazo del indicador (representada por la línea de 100) y está creciendo.

Fase de Desaceleración. Cuando el componente cíclico del indicador se encuentra por arriba de su tendencia de largo plazo y está decreciendo.

Fase de Recesión, cuando el componente cíclico del indicador se encuentra por debajo de su tendencia de largo plazo y está decreciendo.

Fase de Recuperación, cuando el componente cíclico del indicador se encuentra por debajo de su tendencia de largo plazo y está creciendo.

Fuente: elaboración propia

3.2 Regulación nacional, Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV)

De acuerdo con el marco referencial que se plantea a nivel global, los criterios macro prudenciales pueden adaptarse para ser aplicados a cada uno de los sectores o industrias que se abordan en el presente trabajo con el objeto de poder cuantificar la magnitud de los riesgos asociados a la colocación de crédito en una industria determinada. En el caso de México aún no se utilizan estos criterios para limitar el crecimiento excesivo del crédito en la fase expansiva del ciclo; más bien este concepto es una aportación teórica del Banco Internacional de Pagos con miras a evitar crisis de crédito como la observada en 2008-2009. Fue a partir de entonces que

muchas ideas nuevas sobre el tema de riesgo sectorial asociadas al otorgamiento de crédito han surgido. No obstante, se espera que este tema sea tomado en cuenta y requerido por la autoridad regulatoria del sistema financiero mexicano en un futuro cercano. En nuestro país el marco referencial oficial que motiva la creación y desarrollo de la aplicación para determinar las calificaciones de riesgo sectorial que se describe en este trabajo profesional tiene su origen en la fracción cuarta, inciso III de la Circular 1480 publicada por la CNBV. La CNBV emitió el 29 de septiembre de 2000 la Circular número 1480, sobre la metodología para calificar la cartera crediticia.[15] Es preciso destacar que la circular tiene fundamento en las siguientes leyes:

Ley de Instituciones de Crédito: En los artículos 76, 97, 99 y 102.
Ley de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores: En el Artículo cuatro, fracciones III, IV y V. En el Artículo 16, fracciones I y 19.

El apartado cuarto de la Circular 1480 enuncia que las instituciones, evaluarán la calidad crediticia del deudor de acuerdo con el resultado que se obtenga de calificar de forma específica e independiente, en el orden que se señala, los siguientes aspectos:

I. Riesgo país.
II. Riesgo financiero.
III. Riesgo industria.
IV. Experiencia de pago.

El primer aspecto a describir en el apartado cuarto fracción I de la Circular 1480 es el riesgo país, que sólo deberá considerarse tratándose de créditos otorgados a deudores cuyo domicilio se ubique en el extranjero. El segundo aspecto que se aborda en el riesgo financiero, que según la Circular deberá analizarse con base en los criterios señalados en los Anexos 1-A y 1-B de la Circular en cuestión o por aquellos aprobados en la institución. A su vez, se dictamina en la Circular que la experiencia de pago, implica que las instituciones consideren cuando menos, un periodo que comprenderá los doce meses inmediatos anteriores a la fecha de calificación de la

[15] Comisión Nacional Bancaria y de Valores, "Circular número 1480", México D.F., a 29 de septiembre de 2000

cartera crediticia. También se enuncia que sin perjuicio de lo anterior, las instituciones deberán contar con un reporte del historial crediticio del deudor, con una antigüedad no mayor a un año, proporcionado por alguna sociedad de información crediticia.

Ahora bien, como comentábamos líneas arriba, la Circular 1480 no especifica en el apartado cuarto fracción III, algún lineamiento sobre cómo debe de calcularse el riesgo sectorial, en el que se encuentra catalogado cada cliente. La ausencia de algún criterio específico en la normativa otorga la libertad para plantear y desarrollar un método de cálculo propio para determinar la calificación de riesgo sectorial, o de la industria.

Por otro lado, solo se debe de tener presente el apartado quinto, fracción III de la circular 1480. En este apartado se señala que el resultado de la calificación del riesgo sectorial permitirá, en su caso, disminuir hasta con un grado el riesgo de la calificación acumulada determinada por la calificación del riesgo financiero. Es decir, si la calificación que se obtiene al medir el riesgo financiero es mayor a la calificación del riesgo de la industria hasta por un grado de riesgo, entonces la calificación acumulada del sector se puede revisar a la baja hasta con un grado de riesgo. Una vez tomado en cuenta el contenido del apartado quinto fracción III, se dispone de absoluta libertad para desarrollar e implementar un método que permita obtener la calificación de riesgo sectorial.

4. Metodología de análisis

Para desarrollar el algoritmo que calculará la calificación de riesgo sectorial se utiliza un método deductivo que se puede dividir en tres partes que deben irse desarrollando en orden cronológico. Esto se debe a que en la parte inicial se obtienen todos los insumos que alimentarán a los modelos, tanto al de pronóstico como al que calcula la calificación; con el objeto de llegar al producto final, que será la calificación de riesgo sectorial. Por lo tanto, estamos hablando de un método que parte de lo general para llegar a lo particular; es decir, el método deductivo que ya hemos comentado.

La primera parte implica la obtención de la información en diversas fuentes, así como la captura y manejo de la misma. La segunda parte consiste en la aplicación de modelos de pronóstico que permitan detectar tendencias. Por último, la tercera parte, denominada producto final, es donde se desarrolla el algoritmo de cálculo de la calificación de riesgo sectorial. En esta tercera fase el cálculo se realiza con base en la información de las dos partes anteriores y mediante un proceso que se describe más adelante.

En la fase de pronóstico nos apoyamos en el paquete estadístico Minitab y en su método de descomposición, que sirve para separar las series de tiempo en componentes de tendencia lineal y estacional, así como de error, y proporcionar los pronósticos. A su vez, se puede elegir si el componente estacional es aditivo o multiplicativo con la tendencia. Es oportuno utilizar el procedimiento de descomposición para pronosticar cuándo hay un componente estacional para la serie o si desea simplemente examinar la naturaleza de los componentes integrales.[16] Las series de tiempo que se utilizan en el presente trabajo si tienen un componente estacional debido a que son series de información económica y este tipo de información por naturaleza evolucionan con ciertos patrones estacionales de movimiento.

4.1 Tipos de modelo

Modelo descomposición multiplicativa: Se utiliza cuando el tamaño del patrón de estación depende del nivel de los datos. Este modelo asume que a medida que aumenten los datos, también lo hará el patrón de estación. Cabe mencionar que en la mayoría de las gráficas de series de tiempo usadas en los 71 sectores se puede observar este patrón. El efecto estacional aumenta con el tiempo: la estacionalidad es creciente. Pero se supone que es constante como porcentaje de la media.

$$y_t = TR_t \times SN_t \times CL_t \times IR_t$$

Donde:

16 S. Makridakis, S.C. Wheelwright y R. J. Hyndman (1998). Forecasting: Methods and Applications. Wiley.

y_t = valor observado en el periodo t

TR_t = factor de la tendencia en el periodo t

SN_t = factor estacional en el periodo t

CL_t = factor cíclico en el periodo t

IR_t = factor irregular en el periodo t

El método de descomposición multiplicativa calcula lo siguiente:

1. medias móviles y medias móviles centradas
2. factor estacional
3. observaciones compensadas respecto a la variación estacional
4. estimación de la tendencia usando las observaciones compensadas
5. factor cíclico
6. estimación de los errores

Modelo aditivo: Se utiliza para que los efectos de factores individuales sean diferenciados y agregados de manera conjunta para modelar los datos. Supone una variación estacional constante. El modelo de descomposición aditiva es el siguiente:

$$y_t = TR_t + SN_t + CL_t + IR_t$$

El método de descomposición aditiva calcula lo siguiente:

1. Medias móviles y medias móviles centradas para eliminar los efectos estacionales. Por lo tanto, se calcula la media a lo largo de un año.
2. Factor estacional.
3. Factor de normalización
4. Cálculo de observaciones compensadas respecto a la variación estacional.
5. Estimación de la tendencia usando las observaciones compensadas.
6. Cálculo del factor cíclico
7. Estimación de los errores

4.2 Metodología para la calificación sectorial ajustado por criterios macroprudenciales

La presente metodología tiene como objeto determinar la política de portafolio de una institución financiera, agrupando a los sectores económicos en cuatro categorías: muy recomendable, recomendable, recomendable con precaución y no recomendable. A su vez, los sectores agrupados por categoría son agrupados en un orden. La idea es jerarquizar de menor a mayor riesgo los sectores agrupados en un mismo grupo de recomendación. Para lograrlo, utilizamos las siguientes tres variables discriminantes: riesgo económico, riesgo de portafolio y riesgo financiero Cabe mencionar que las tres variables que se utilizaron para jerarquizar son una salida producida por el modelo de calificación de riesgo sectorial, conocido como CRS. Las variables utilizadas en el modelo nos permitieron hacer un ordenamiento adicional para jerarquizar los sectores. Así, mediante el ordenamiento o ranking, obtenido a través del modelo de riesgo sectorial se tiene un insumo que permite reforzar la toma de decisiones en el otorgamiento. Además de servir como un elemento adicional para alimentar modelos de rating a nivel corporativo La calificación de riesgo sectorial se obtiene mediante un conjunto de procedimientos que permiten evaluar el nivel de riesgo de una actividad económica determinada. Se utiliza una escala de ocho niveles, totalmente compatibles con los rangos establecidos para la Calificación de Riesgo de la Institución en donde se utiliza el modelo. Los niveles de calificación se pueden observar en la figura 2.

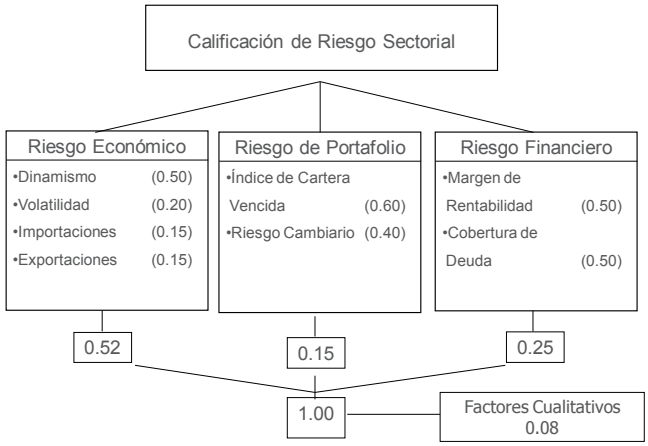
Figura 2. Niveles de calificación

Calificación	
Cuantitativa	Cualitativa
8	Muy Mala
7	Mala
6	Deficiente
5	Regular
4	Aceptable
3	Bueno
2	Muy Buena
1	Excelente

Fuente: elaboración propia

Así, la calificación de riesgo asignada a un sector determinado es el resultado de la suma ponderada de los tres tipos de riesgo mencionados, tal y como se observa en la figura 3.

Figura 3.Esquema de calificación de riesgo sectorial



Fuente: elaboración propia

4.2.1 Calificación del riesgo económico

Es el asociado con el comportamiento observado y esperado de las variables de mercado del sector. La calificación final de riesgo económico es una ponderación de los siguientes cuatro factores:

a) Dinamismo Esperado del Sector.

Las empresas en sectores de lento crecimiento o maduros enfrentan mayores riesgos que las ubicadas en ramas de crecimiento dinámico. Se utiliza el crecimiento promedio del sector en los últimos dos años y el crecimiento promedio esperado para los próximos dos años, comparándose con el promedio de crecimiento de la economía total.

Figura 4. Escala de calificación de dinamismo económico

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
-100.000	-3.000	8	Muy Mala
-3.000	-1.000	7	Mala
-1.000	0.000	6	Deficiente
0.000	0.500	5	Regular
0.500	1.000	4	Aceptable
1.000	2.000	3	Bueno
2.000	4.000	2	Muy Buena
4.000	100.000	1	Excelente

Fuente: elaboración propia

b) Volatilidad.

Las empresas en sectores cuyo comportamiento es volátil tienden a ser más riesgosas, debido a que se pueden generar problemas de exceso de capacidad instalada, bajas de precios y caída de márgenes de operación. Se calcula dividiendo la desviación estándar del crecimiento del sector entre la del PIB total.

Figura5. Escala de calificación de volatilidad económica

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.249	1	Excelente
0.250	0.499	2	Muy Buena
0.500	0.999	3	Bueno
1.000	1.999	4	Aceptable
2.000	3.999	5	Regular
4.000	5.999	6	Deficiente
6.000	8.999	7	Mala
8.000	100.000	8	Muy Mala

Fuente: elaboración propia

c) Penetración de Importaciones.

Los sectores en los que la penetración de importaciones es mayor son más riesgosos que aquellos en las que no sucede. Se calcula como el cociente de la penetración de importaciones de la rama

(Importaciones/PIB), respecto a la de la economía en su conjunto. Sólo se aplica a los sectores que producen bienes comerciables con el exterior. Es decir, se excluyen las actividades de la industria de la construcción y las del Sector Servicios en su totalidad.

Figura6. Escala de calificación de volatilidad económica

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.250	1	Excelente
0.250	0.500	2	Muy Buena
0.500	0.900	3	Bueno
0.900	1.200	4	Aceptable
1.210	2.200	5	Regular
2.210	5.000	6	Deficiente
5.000	10.000	7	Mala
10.000	100.000	8	Muy Mala

Fuente: elaboración propia

d) Competitividad de Exportaciones.

Las empresas exportadoras son menos riesgosas, debido a que sus mercados están más diversificados y no dependen exclusivamente del comportamiento del mercado interno. Este indicador (Exportaciones/PIB) se calcula tomando los últimos ocho trimestres de información disponible. Sólo se aplica a los sectores que producen bienes comerciables, es decir, se excluyen las actividades de la industria de la construcción y las del Sector Servicios en su totalidad.

Figura 7. Escala de calificación de competitividad de exportaciones

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.100	8	Muy Mala
0.100	0.200	7	Mala
0.200	0.500	6	Deficiente
0.500	0.900	5	Regular
0.900	2.000	4	Aceptable
2.000	4.000	3	Bueno
4.000	6.000	2	Muy Buena
6.000	100.000	1	Excelente

Fuente: elaboración propia

4.2.2 Calificación del riesgo de portafolio

Es un promedio ponderado del riesgo basado en el índice de cartera vencida y el cambiario.

a) Índice de Morosidad.

Una cartera vencida elevada implica un mayor riesgo en el otorgamiento de crédito que se destina a una empresa o sector. Se calcula dividiendo el saldo de la cartera vencida entre el saldo de la cartera total. Se considera el promedio de cartera vencida de los últimos ocho trimestres.

Figura 8. Escala de calificación de índice de morosidad

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.250	1	Excelente
0.250	0.550	2	Muy Buena
0.550	0.899	3	Bueno
0.900	1.249	4	Aceptable
1.250	1.749	5	Regular
1.750	2.499	6	Deficiente
2.500	3.249	7	Mala
3.250	10.000	8	Muy Mala

Fuente: elaboración propia

b) Riesgo Cambiario.

Cuando la deuda de una empresa o sector está denominada en mayor medida en moneda extranjera, su riesgo cambiario es mayor, especialmente en sectores que carecen de una cobertura natural, generada por los ingresos en divisas por concepto de exportación. Se considera el promedio de los últimos ocho trimestres de la diferencia entre la participación de exportaciones respecto al PIB y el porcentaje de deuda denominada en moneda extranjera.

Figura 9. Escala de calificación de riesgo cambiario

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
-19.999	-10.000	8	Muy Mala
-9.999	-7.000	7	Mala
-6.999	-5.000	6	Deficiente
-4.999	-1.500	5	Regular
-1.499	4.000	4	Aceptable
4.001	8.000	3	Bueno
8.001	13.000	2	Muy Buena
13.001	250.000	1	Excelente

Fuente: elaboración propia

4.2.3 Calificación del riesgo financiero

Esta calificación conjunta tanto la capacidad del sector para mantener sus márgenes de rentabilidad como la cobertura del servicio de su deuda. Su cálculo es un promedio ponderado los factores que se describen a continuación.

a) Capacidad para mantener márgenes.

Dada una estructura de costos de producción rígida en el corto plazo, los niveles de los márgenes brutos de las empresas dependerán en gran medida de la evolución de los precios relativos de sus productos respecto a los precios de las materias primas consumidas. En la medida en que un sector pueda transferir las presiones de costos (mantener sus márgenes) o incrementar la brecha respecto a los costos de sus materias primas, dicho sector o empresa mejorará su posición financiera. Se calcula dividiendo el índice de precios al productor de la rama entre el índice de precios de sus materias primas. Se considera el promedio de los últimos ocho periodos trimestrales.

Figura 10. Escala de calificación de margen de precios

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.600	8	Muy Mala
0.600	0.750	7	Mala
0.750	0.850	6	Deficiente
0.850	0.960	5	Regular
0.960	1.049	4	Aceptable
1.050	1.089	3	Bueno
1.090	1.149	2	Muy Buena
1.150	2.000	1	Excelente

Fuente: elaboración propia

b) Nivel de Cobertura de Deuda.

Mide las veces en que el margen bruto del sector es capaz de cubrir el servicio de su deuda. El margen bruto sectorial se construye considerando el valor residual entre el valor bruto de la producción (ventas) y el valor de los insumos consumidos más los pagos de salarios (costos variables). El servicio de la deuda se estima multiplicando el saldo de la cartera crediticia total por la tasa de interés líder de mercado (Cetes a 28 días). En la medida en que el sector tenga la capacidad para cubrir más veces el servicio de su deuda, será más atractivo para el financiamiento. Se calcula tomando en cuenta el promedio de la cobertura sectorial de los últimos ocho trimestres.

Figura 11. Escala de calificación de cobertura de deuda

Rangos		Calificación	
De:	A:	Cuantitativa	Cualitativa
0.000	0.249	8	Muy Mala
0.250	0.499	7	Mala
0.500	0.799	6	Deficiente
0.800	1.090	5	Regular
1.100	1.599	4	Aceptable
1.600	1.990	3	Bueno
2.000	2.499	2	Muy Buena
2.500	2000.000	1	Excelente

Fuente: elaboración propia

Con lo anterior, se espera contrastar el resultado de la calificación de riesgo sectorial con criterios macro prudenciales de largo plazo, como se verá en el marco conceptual del presente trabajo en el apartado número cuatro, para poder tomar una decisión anticipada de colocación de crédito (*asset allocation*) en función del ciclo económico esperado y de la calificación de riesgo sectorial obtenida para cada uno de los 71 sectores que se describirán más adelante.

Mediante el contraste de la calificación de riesgo sectorial se pretende calibrar a dicha calificación con los criterios macro prudenciales con el objeto de que el *asset allocation,* independientemente de la calificación de crédito que se haya obtenido en un periodo determinado, nos permita generar cinco escenarios anticipados de colocación de crédito. Lo anterior, se realizará mediante el pronóstico una fase del ciclo económico esperado de forma adelantada, a esto es a lo que llamaremos criterio macro prudencial en el presente trabajo profesional escrito. Este criterio será el que nos permitirá calibrar la calificación de riesgo sectorial para poder determinar la colocación de crédito (*asset allocation*) en función de la fase del ciclo económico esperado de acuerdo a cinco criterios:

a) Colocar alto: En la fase ascendente del ciclo antes de llegar al punto de inflexión, donde el sector empieza a desacelerarse.
b) Colocar bajo: Cuando la fase del sector empieza a recuperarse.
c) Mantener: Cuando la fase del sector permanece en el cuadrante positivo, a pesar de que el crecimiento sea moderado.
d) Reducir bajo: Cuando la fase del sector empieza a desacelerarse.
e) Reducir alto: Cuando la fase del sector entra en recesión.

5. Análisis de los resultados

Agrupamos los datos mensuales en trimestres y calculamos la tasa de crecimiento anual para cada una de ellas. Con estas tasas utilizamos medias móviles de cuatro periodos para obtener una suavización de la serie que permita recoger de forma anticipada y con mayor notoriedad los ciclos económicos de las 71 series de tiempo. Para calificar cada uno de los sectores en una escala del 1 al 8 (1 lo mejor, 8 lo peor), utilizamos el promedio anual de 2014 para cada una de las 71 series.

Se detectó el crecimiento máximo y el mínimo, para obtener límites inferiores y superiores; así como un valor k para determinar la amplitud de cada uno de los 8 intervalos. Así, ubicamos cada tasa de crecimiento económico esperado en el intervalo de clase que le corresponde, asociándole su respectiva calificación numérica. De forma adicional, proporcionamos una recomendación de largo plazo; donde sugerimos las siguientes acciones para orientar la colocación de crédito por sector (*Asset Allocation*): crecer alto, crecer bajo, mantener, reducir bajo, reducir alto. Para lograr un manejo óptimo de la base de datos de la cartera de crédito con 71 sectores y sus 14 campos asociados a cada uno de ellos, hemos utilizado el criterio de Pareto (regla del 80-20) de para explicar de forma resumida y simple el 80.4% de la cartera de crédito total en saldos nominales a diciembre de 2013, misma que está concentrada en 23 actividades de la cartera de crédito mayorista. A continuación, se analizarán los principales resultados que se obtuvieron tras el cálculo de la calificación de riesgo para una el 80% más significativo de los 71 sectores que se abordan en el presente trabajo profesional escrito; es decir, 23 sectores.

Cuadro 1. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector obra pública, servicios profesionales, alquiler de inmuebles y electricidad

Actividad	Obra pública y edificación no residencial	Servicios profesionales	Alquiler de inmuebles	Electricidad
Volátilidad	3	1	1	2
Dinamismo	4	4	4	4
Riesgo Económico	4	3	3	3
Riesgo Portafolio	3	3	3	2
Riesgo Financiero	6	4	2	3
Calificación Total de riesgo sectorial	4	3	3	3
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	235,007.8	114,117.5	86,217.8	64,925.4
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	23,563.9	4,467.9	432.7	0.0
Índice de cartera vencida	10.0%	3.9%	0.5%	0.0%
Participación en la cartera total	17.0%	8.3%	6.3%	4.7%
Participación acumulada	17.0%	25.3%	31.6%	36.3%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	No recomendable	Recomendable con precaución	Muy recomendable	Muy recomendable
Criterio macroprudencial de largo plazo	Reducir Bajo	Reducir Bajo	Crecer Alto	Mantener

Fuente: elaboración propia

En el cuadro 1, podemos observar el primer bloque de sectores que concentran la mayor parte de la participación en la cartera total del sistema financiero mexicano, son cuatro sectores y juntos abarcan 36.3% de la cartera.

1. Obra pública y edificación no residencial

En este sector existe un riesgo financiero por arriba del promedio debido a que es un sector que tiende a apalancarse fuertemente, con crédito bancario de forma cíclica. El índice de cartera vencida es alto y superior al promedio lo que provoca que el cálculo de la calificación arroje una política de riesgo "no recomendable". Sin embargo, utilizando los cálculos obtenidos mediante los criterios macroprudenciales proyectados obtenemos el resultado "reducir bajo", lo que significa que es prudente colocar menos crédito pero de forma paulatina. En el caso particular de este sector estratégico, si las métricas de riesgo nos arrojan que reduzcamos de forma paulatina, debemos de poner atención al contexto económico y político que se vive, dado que si vienen en el mediano plazo inversiones fuertes por parte del gobierno federal para ejercer gasto programable o para construir obras de infraestructura que pudieran tener un impacto político-electoral, habría que matizar el criterio de colocación con elementos de coyuntura para revisar a la alza la colocación en el sector.

2. Servicios Profesionales

Tiene una participación de 8.3% en la cartera total del sistema financiero tiene una calificación de riesgo sectorial aceptable y un índice de cartera vencida poco aceptable, dado que es superior al índice de cartera vencida promedio del sector financiero que es de 1.4%. Sin embargo, tiene poca volatilidad y tanto el riesgo económico como el de portafolio, permiten que el sector tenga una calificación de riesgo sectorial aceptable. Esto se traduce en una política de portafolio que indica que este sector es "recomendable con precaución". Sin embargo, utilizando los criterios macroprudenciales proyectados podemos ajustar la política de portafolio a la baja, dado que el algoritmo nos arroja un criterio de "Reducir bajo". La mitigación observada por el criterio macroprudencial se debe a que la proyección prevé una desaceleración en el ciclo económico proyectado, como puede observarse en el anexo cero de la presente publicación.

3. Alquiler de inmuebles

Representa 6.3% de la cartera total del sistema financiero y tiene indicadores de riesgo muy aceptables, incluso mejor que la media, el índice de cartera vencida es inferior al promedio observado en el sector financiero y la calificación de riesgo sectorial es mejor que la media. Por su parte, el resultado del cálculo de la política de portafolio es "muy recomendable" y la conclusión del criterio macroprudencial basado en la tendencia y ciclo esperados del sector nos arrojan un resultado "crecer alto". Por lo tanto, este es un extraordinario sector para hacer negocio. Si nos fijamos un poco en el contexto económico del sector que se vive en el primer semestre de 2014, podemos observar una especie de *boom* inmobiliario, particularmente orientado a edificar oficinas corporativas, inmuebles comerciales y a esquemas de financiamiento como las Fibras (fideicomisos de inversión inmobiliaria), cuya actividad consiste en la construcción o adquisición de bienes inmuebles para destinarlos a su enajenación o a la concesión de uso o goce, así como el derecho para percibir ingresos para otorgar ese uso o goce.

4. Electricidad

Tiene una participación de 4.7% en la cartera total del sistema financiero y que los indicadores de riesgo tienen una calificación aceptable que permite arrojar una calificación de riesgo sectorial mejor que la del promedio. El índice de cartera vencida es inexistente, debido a que se trata de una empresa que es propiedad del gobierno federal y que por naturaleza opera como un monopolio. Por lo tanto, el cálculo de la política de portafolio nos indica que el sector es "muy recomendable". No obstante, la conclusión del criterio macroprudencial basado en la tendencia y ciclo esperados del sector nos arroja un resultado de "mantener". El resultado del criterio macroprudencial hace alusión a temas de coyuntura económica que se ven reflejados en el pronóstico y en el caso de este sector aunque es recomendable por ser una entidad paraestatal, aún no se ha ejercido gasto público en obras y edificaciones para el sector eléctrico.

Cuadro 2. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector comercio, transporte, otros servicios y desarrolladores de vivienda

Actividad	Comercio de artículos diversos	Transporte	Otros servicios	Desarrolladores de vivienda
Volátilidad	5	2	1	1
Dinamismo	5	3	3	3
Riesgo Económico	5	3	2	2
Riesgo Portafolio	3	5	3	4
Riesgo Financiero	2	2	3	6
Calificación Total de riesgo sectorial	4	3	3	5
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	57,945.8	43,619.5	42,975.0	42,918.0
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	1,573.8	250.3	413.7	6,695.4
Índice de cartera vencida	2.7%	0.6%	1.0%	15.6%
Participación en la cartera total	4.2%	3.2%	3.1%	3.1%
Participación acumulada	40.5%	43.6%	46.8%	49.9%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	Recomendable	Recomendable	Recomendable	No recomendable
Criterio macroprudencial de largo plazo	Reducir Bajo	Mantener	Mantener	Reducir Bajo

Fuente: elaboración propia

En el cuadro 2, se muestra al siguiente bloque de las actividades más representativas de la cartera del sistema financiero de acuerdo a la regla del 80-20 que describimos líneas arriba (Regla de Pareto).

5. Comercio de artículos diversos

Tiene una participación de 4.2% en la cartera total del sistema financiero. Los indicadores de riesgo económico, volatilidad y dinamismo tienen una calificación poco favorable, mientras que los indicadores de riesgo de portafolio y financiero compensan la situación, propiciando que la calificación de riesgo sectorial sea igual al promedio del sector financiero. El índice de cartera vencida del sector es más alto que el del promedio nacional. No obstante, el cálculo de políticas de portafolio nos arroja un resultado "recomendable" de colocación. Por su parte, el criterio macroprudencial nos sugiere "reducir bajo". Por lo tanto, a pesar de que las métricas de riesgo sugieren que el sector es recomendable el pronóstico económico del sector que construye el criterio macro prudencial vaticina una desaceleración esperada debido a la contracción que se está observando en el mercado interno, situación que persistirá por algunos trimestres más. Esto se

debe a la cautela que está guardando el consumidor ante el incremento en precios propiciado por la reforma fiscal, lo que se ha traducido en una mayor inflación a la esperada.

6. Transporte

En el cuadro 2, también se muestran los resultados del sector transporte que tiene una participación de 3.2% en la cartera total del sector, la calificación de riesgo sectorial es mejor que el promedio, y la política de portafolio es "recomendable". Por todo lo anterior, y con base en la proyección del criterio macroprudencial se obtuvo un resultado de "mantener" la colocación de crédito en el sector como se ha venido haciendo.

7. Otros servicios

Con una participación de 3.1% en la cartera total del sistema financiero, también podemos observar una volatilidad aceptable y una calificación de riesgo sectorial mejor a la media. El cálculo arroja una política de portafolio "recomendable", mientras que el criterio macroprudencial nos emite una señal de "mantener". La coyuntura económica del momento nos indica que este sector tiene un gran número de actividades asociadas y algunas de ellas presentan un comportamiento mixto, por lo tanto lo más recomendable es guardar prudencia, aunque el sector tenga una política de portafolio recomendable.

8. Desarrolladores de vivienda

El sector tiene una participación de 3.1% en la cartera total del sistema financiero. El índice de cartera vencida once veces por arriba del promedio observado a nivel nacional, situación que no es nada favorable para el sector. A su vez, el riesgo financiero está por arriba del promedio, lo que arroja una calificación de riesgo sectorial poco favorable. Por lo tanto, el resultado de política de portafolio es "no favorable" y el criterio macroprudencial sugiere "reducir bajo". En este caso la coyuntura económica que está detrás de la ciclicidad y la tendencia que respaldan al pronóstico del ciclo de este sector, sugieren que hay que reducir la colocación paulatinamente mientras se ajusta el mercado de la vivienda en México. Primero se debe de terminar el inventario de vivienda construida, porque en este momento hay un poco de sobre oferta, sobre todo en el mercado de interés social. Posteriormente se volverá a ver una fase ascendente del ciclo

económico en este sector y entonces se podrá volver a "colocar alto" Mientras tanto, lo más conveniente es desacelerar la colocación pero con prudencia.

Cuadro 3. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector comercio de alimentos, restaurantes, comercio de materias y extracción de petróleo

Actividad	Comercio de Alimentos, bebidas y tabaco	Restaurantes y hoteles	Comercio de materias primas, materiales y auxiliares	Extracción de petróleo
Volátilidad	1	1	8	1
Dinamismo	3	3	5	6
Riesgo Económico	2	3	6	4
Riesgo Portafolio	5	4	3	2
Riesgo Financiero	4	5	2	3
Calificación Total de riesgo sectorial	4	4	4	3
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	42,273.4	40,762.3	34,588.3	33,798.5
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	1,295.0	393.0	4616	19
Índice de cartera vencida	3.1%	1.0%	1.3%	0.0%
Participación en la cartera total	3.1%	3.0%	2.5%	2.5%
Participación acumulada	52.9%	55.9%	58.4%	60.9%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	Muy recomendable	Recomendable	Recomendable	Recomendable
Criterio macroprudencial de largo plazo	Reducir Bajo	Mantener	Reducir Bajo	Mantener

Fuente: elaboración propia

En el cuadro 3, mostramos el siguiente bloque de sectores:

9. Comercio de alimentos, bebidas y tabaco

Se puede observar que este sector tiene una participación de 3.1% en la cartera total del sector financiero y tiene una calificación de riesgo sectorial similar a la media a pesar de que el riesgo de portafolio es ligeramente poco favorable. Ante este escenario, los cálculos indican que la política de portafolio de este sector debe es "muy recomendable". No obstante, al calibrar con el criterio de política macro prudencial el cálculo nos alerta que sería prudente "reducir bajo". Aunque este sector se puede definir como maduro y cuyo crecimiento va acorde al crecimiento de la población, la coyuntura económica que respalda la postura macroprudencial de "reducir bajo" debido a que el pronóstico vaticina una ligera desaceleración a futuro que puede tener fundamento en la baja confianza del consumidor y en una tasa de inflación superior a esperada por el Banco de México.

10. Restaurantes y hoteles

Podemos observar en el cuadro 3, que este sector tiene una participación de 3% en la cartera total del sistema financiero. A su vez, la calificación de riesgo del sector es equivalente a la media y el resultado del modelo nos arroja una política de portafolio "recomendable". Por su parte, el criterio macroprudencial de largo plazo nos arroja una recomendación de "mantener". Por lo tanto, la acción a llevar a cabo es seguir colocando crédito con el mismo dinamismo que se ha venido manejando.

11. Comercio de materias primas, materiales y auxiliares

Este sector tiene una participación de 2.5% en la cartera total del sector y una calificación de riesgo sectorial igual a la media. El modelo estimó una política de portafolio "recomendable" y el criterio macroprudencial de largo plazo nos arroja una recomendación de "reducir bajo". Sin duda, la tendencia del ciclo económico proyectada del sector espera cierta desaceleración en el futuro reciente, lo cual tiene sentido ante los indicadores precarios de consumo que estamos viendo hoy en día. Por lo tanto, a pesar de que los indicadores de riesgo que se ponderan para obtener la calificación de riesgo del sector son favorables no se debe de aumentar la colocación, más bien se debe de asumir una postura de cautela y reducir un poco la colocación. Hacer esto implica que busquemos colocar la diferencia en sectores con riesgos estables y con políticas macroprudenciales muy favorables que llevan implícita una fase de ciclo económico expansiva.

12. Extracción de petróleo

También en el cuadro 3, observamos los indicadores principales de este sector y se puede apreciar que tiene una participación de 2.5% en la cartera total del sistema financiero y tiene una calificación de riesgo sectorial mejor que el promedio, a pesar de que el dinamismo del sector no anda muy boyante. Por su parte, el modelo nos arroja una política de portafolio "recomendable" y el criterio macro prudencial nos indica con base en la tendencia del ciclo económico proyectado que debemos de "mantener" la colocación de crédito en el sector, como se ha venido haciendo en el pasado reciente.

Cuadro 4. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector comercio de prendas de vestir, tienda de autoservicios, servicio de esparcimiento y agricultura

Actividad	Comercio de prendas de vestir y artículos de uso personal	Tiendas de autoservicio y artículos especiales	Servicios de esparcimiento	Agricultura
Volátilidad	6	2	2	4
Dinamismo	6	3	4	4
Riesgo Económico	5	3	3	4
Riesgo Portafolio	3	2	2	5
Riesgo Financiero	3	4	6	3
Calificación Total de riesgo sectorial	3	3	3	4
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	33,149.2	32,935.1	28,598.2	27,488.1
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	404.9	40.5	82.8	1,366.9
Índice de cartera vencida	1.2%	0.1%	0.3%	5.0%
Participación en la cartera total	2.4%	2.4%	2.1%	2.0%
Participación acumulada	63.3%	65.6%	67.7%	69.7%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	Recomendable con precaución	Muy recomendable	Recomendable con precaución	No recomendable
Criterio macroprudencial de largo plazo	Mantener	Mantener	Mantener	Mantener

Fuente: elaboración propia

En el cuadro 4, podemos observar el siguiente bloque de sectores

13. Comercio de prendas de vestir y artículos de uso personal

En el cuadro 4, podemos observar que este sector tiene una participación de 2.4% en la cartera total del sistema financiero y el cálculo de la calificación de riesgo sectorial nos arroja una calificación mejor que el promedio, independientemente de que es un sector volátil y cuyo dinamismo ha perdido celeridad. El índice de cartera vencida del sector es mejor que el promediado para todo el sistema financiero. Por lo tanto, el modelo nos arroja la política de portafolio "recomendable con precaución" y el criterio macroprudencial de largo plazo nos sugiere una postura de "mantener"

14. Tiendas de autoservicio y artículos especiales

Tiene una participación de 2.4% en la cartera total del sector y presenta una calificación de riesgo sectorial mejor al promedio. A su vez, el índice de cartera vencida es mejor al promedio. Por lo tanto, el cálculo nos arroja una política de portafolio "Muy recomendable" y el criterio

macroprudencial de largo plazo basado en el comportamiento proyectado del ciclo económico nos sugiere "Mantener".

15. Servicios de esparcimiento

Con una participación de 2.1% en la cartera total del sector financiero, tiene un índice de cartera vencida mejor que el promedio y tiene una calificación de riesgo sectorial mejor que el promedio, a pesar de que el riesgo financiero tiene un indicador poco halagüeño. Ante estos resultados, el cálculo de política macroprudencial nos sugiere que la colocación en este sector es "Recomendable con precaución". Cuando calibramos el resultado con el criterio macroprudencial de largo plazo, lo que obtenemos es una recomendación de "Mantener". Esto se debe a patrones esperados que se espera en el ciclo y tendencia del sector, como puede apreciarse con mayor claridad en las gráficas que se incluyen en los anexos del presente trabajo profesional escrito.

16. Agricultura

La calificación de riesgo sectorial de este sector corresponde con el promedio observado a nivel nacional, independientemente de que el riesgo de portafolio tiende a ser un poco pero que el promedio. A du vez, el índice de cartera vencida es peor que el observado a nivel nacional. Por lo tanto los cálculos del modelo nos sugieren una política de portafolio "No recomendable". Al calibrar el resultado, con el criterio macroprudencial de corto plazo podemos obtener una recomendación de "mantener" que está en función del ciclo y tendencia esperados para este sector.

A continuación seguiremos con el siguiente bloque de sectores que nos permiten describir el 20% de los casos que explican el 80% del comportamiento de nuestra muestra de 71 sectores.

Cuadro 5. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector industrias básicas, distribuidoras de autotransporte, ganadería, caza y pesca, y cemento

Actividad	Industrias básicas de hierro y acero	Distribuidoras de auto transportes, refacciones y accesorios	Ganadería, caza y pesca	Cemento
Volátilidad	3	1	2	1
Dinamismo	4	3	5	4
Riesgo Económico	4	2	5	3
Riesgo Portafolio	2	2	5	3
Riesgo Financiero	4	2	4	5
Calificación Total de riesgo sectorial	4	3	4	4
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	27,474.0	24,816.8	24,201.8	21,859.5
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	226.2	209.8	579.1	12.5
Índice de cartera vencida	0.8%	0.8%	2.4%	0.1%
Participación en la cartera total	2.0%	1.8%	1.8%	1.6%
Participación acumulada	71.7%	73.5%	75.3%	76.8%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	Recomendable con precaución	Recomendable con precaución	Recomendable con precaución	Recomendable con precaución
Criterio macroprudencial de largo plazo	Mantener	Mantener	Mantener	Reducir Bajo

Fuente: elaboración propia

17. Industrias básicas de hierro y acero

La calificación de riesgo sectorial del sector se encuentra en un nivel similar al promedio nacional, a su vez el resto de los indicadores de riesgo muestran un comportamiento muy favorable. Este sector tiene una participación de 2% en la cartera total del sistema financiero del país. A su vez, el índice de cartera vencida es mejor que el observado a nivel nacional. Por lo tanto, el cálculo de nuestro modelo nos sugiere que la política de portafolio para colocar crédito en el sector es "Recomendable con precaución". Al calibrar nuestro resultado con el criterio macroprudencial de largo plazo, lo que observamos es la recomendación de "mantener" la colocación del crédito en niveles similares a los que se ha venido haciendo.

18. Distribuidoras de autotransportes, refacciones y accesorios

La calificación de riesgo de este sector es aceptable y mejor a la media observada a nivel nacional. A su vez, los indicadores de riesgo también muestran un nivel mejor al observado en el promedio del país. Por otro lado, el índice de cartera vencida del sector también es mejor al promedio nacional. Este sector tiene una participación de 1.8% en la cartera total del sistema

financiero del país. Por todo lo anterior el cálculo de nuestro modelo nos arroja una política de portafolio "Recomendable con precaución" para colocar crédito en este sector. Sin embargo, cuando calibramos el resultado con el criterio macroprudencial de corto plazo, obtenemos una recomendación de "mantener" la colocación de crédito en niveles similares a los observados.

19. Ganadería, caza y pesca

La participación de este sector en la cartera total del sistema financiero del país es de 1.8% y que la calificación de riesgo sectorial se encuentra ubicada en un nivel similar a la media nacional a pesar de que el indicador de riesgo económico se encuentra ligeramente peor que los estándares para el promedio del país. A su vez, el índice de cartera vencida es ligeramente peor al observado a nivel nacional. Por lo tanto, el resultado de nuestro modelo arroja que la política de portafolio es "recomendable con precaución" para colocar crédito en el sector. No obstante, al calibrar el resultado de nuestro algoritmo con el criterio macroprudencial de corto plazo obtenemos una recomendación de "mantener" la colocación en niveles similares a los que se ha venido observando.

20. Cemento

Este sector tiene una participación de 1.6% en la cartera total del sistema financiero y que la calificación de riesgo del sector es similar al promedio, a pesar de que el riesgo financiero del sector cemento está ligeramente deteriorado respecto a la media. Por su parte, el índice de cartera vencida del sector es inferior al promedio observado a nivel nacional. Por lo tanto, los cálculos de nuestro modelo nos arrojan una política de portafolio "recomendable con precaución" para colocar crédito en este sector. Sin embargo, cuando contrastamos el resultado con nuestro criterio macroprudencial de corto plazo, lo que obtenemos es una recomendación de "reducir bajo" resultado que está en función de la tendencia y ciclo esperados del sector en un futuro posible. En el caso particular del cemento, la postura de reducir bajo era de esperarse en virtud de que se está viviendo una crisis en la construcción de vivienda y se vaticina un escenario poco halagüeño a corto plazo.

A continuación describiremos el último bloque de actividades que describen el 80% de la cartera total del sistema en el cuadro 6.

Cuadro 6. Resultados del análisis del riesgo sectorial con criterios macroprudenciales en el sector comercio de gas, comercio de maquinaria y equipo, y productos de plástico.

Actividad	Comercio de, gas, combustibles y lubricantes	Comercio de maquinaria, equipo y herramienta	Productos de plástico
Volátilidad	3	1	2
Dinamismo	6	3	4
Riesgo Económico	5	2	4
Riesgo Portafolio	2	3	2
Riesgo Financiero	2	2	5
Calificación Total de riesgo sectorial	4	3	3
Cartera Total (Mdp, diciembre 2013)	20,500.7	14,821.6	14,276.8
Cartera vencida (Mdp, diciembre 2013)	166.5	205.8	60.4
Índice de cartera vencida	0.8%	1.4%	0.4%
Participación en la cartera total	1.5%	1.1%	1.0%
Participación acumulada	78.3%	79.4%	80.4%
Política de portafolio de acuerdo a métricas de riesgo sectorial	Recomendable	Recomendable	Recomendable
Criterio macroprudencial de largo plazo	Mantener	Mantener	Mantener

Fuente: elaboración propia

21. Comercio de gas, combustibles y lubricantes

En el cuadro 6, podemos observar que este sector tiene una participación de 1.5% en la cartera total del sistema financiero y la calificación de riesgo sectorial que se calculó esta en niveles que empatan con la media del sistema financiero y el índice de cartera vencida es mejor que el promedio. Por lo tanto, nuestro modelo nos arroja una política de portafolio "recomendable". No obstante, la calibración con el criterio macroprudencial de largo plazo nos arroja una postura de "mantener" la colocación del crédito en niveles similares a observados en periodos recientes. Esta postura está en función de la proyección de la tendencia y el ciclo económico del sector que detectan una desaceleración en este grupo de actividad económica, asociado a la desaceleración esperada en el consumo interno y a tasas de inflación superiores a las esperadas. Este patrón también se observa para los siguientes dos sectores que se describirán líneas abajo; uno es el referente a comercio de maquinaria, equipo y herramienta; y el otro al de productos de plástico.

22. Comercio de maquinaria, equipo y herramienta

El sector tiene una participación de 1.1% en la cartera total del sistema financiero y un índice de cartera vencida similar al promedio observado a nivel nacional. A su vez, la calificación de riesgo del sector es mejor al promedio y los cálculos de nuestro modelo nos arrojan una política de portafolio "recomendable" para colocar crédito en el sector. Sin embargo, al contrastar el resultado obtenido con el criterio macroprudencial de largo plazo nos arroja una postura de "mantener" la colocación del crédito en niveles similares a observados en periodos recientes.

23. Productos de plástico

Con una participación de 1% en la cartera total del sistema financiero, su índice da cartera vencida es mejor que el promedio. La calificación de riesgo sectorial también es mejor que la media observada a nivel nacional. Por lo tanto, el modelo nos arroja una política de portafolio "recomendable" para colocar crédito en el sector. Sin embargo, al contrastar el resultado obtenido con el criterio macroprudencial de largo plazo el modelo nos arroja una postura de "mantener" la colocación del crédito en niveles similares a observados en periodos recientes. Como hemos comentado en los dos casos anteriores, a pesar de que las métricas de riesgo recomiendan al sector, los parámetros obtenidos con los criterios macroprudenciales que anticipan tendencia y ciclo económico nos sugieren que prudencialmente lo más conveniente es "mantener" la colocación en niveles similares a los observados en el pasado reciente, para evitar exposiciones innecesarias ante una desaceleración esperada del ciclo económico de este sector.

En el cuadro 7 agregamos información adicional relevante que nos arroja la métrica de nuestro modelo y que no se ha abordado hasta el momento. Esta información adicional es el índice de cartera vencida asociado a una escala de rating. (para ver cómo está integrada la escala de rating, sus límites máximos y mínimos, se puede dar un vistazo al anexo de este trabajo profesional escrito). La idea general de obtener un rating para cada sector como se muestra en el cuadro 7, es única y exclusivamente para que sirva como referente y permita comparar el rating de cada cliente (empresa) con el del sector y poder tener un orden de magnitud en escalas equivalentes. Esto no significa que si un determinado sector tiene una calificación de crédito poco favorable, como en el caso de desarrolladores de vivienda, con un rating de CCC, no se le deba de otorgar crédito a ninguna de las empresas que pertenezcan a ese sector.

Cuadro 7. Índice de cartera vencida asociado a rating en escala maestra

N	Actividad	Participación en la cartera total	Índice de cartera vencida	Índice de cartera vencida asociado al rating en escala maestra larga
1	Obra pública y edificación no residencial	17.04%	10.03%	B-3
2	Servicios profesionales	8.28%	3.92%	B1
3	Alquiler de inmuebles	6.25%	0.50%	BB+2
4	Electricidad	4.71%	0.00%	AAA
5	Comercio de artículos diversos	4.20%	2.72%	B+2
6	Transporte	3.16%	0.57%	BB+2
7	Otros servicios	3.12%	0.96%	BB2
8	Desarrolladores de vivienda	3.11%	15.60%	CCC
9	Comercio de Alimentos, bebidas y tabaco	3.07%	3.06%	B+3
10	Restaurantes y hoteles	2.96%	0.96%	BB2
11	Comercio de materias primas, materiales y	2.51%	1.33%	BB-1
12	Extracción de petróleo	2.45%	0.01%	AAA
13	Comercio de prendas de vestir y artículos de	2.40%	1.22%	BB-1
14	Tiendas de autoservicio y artículos especiales	2.39%	0.12%	BBB+1
15	Servicios de esparcimiento	2.07%	0.29%	BBB-1
16	Agricultura	1.99%	4.97%	B3
17	Industrias básicas de hierro y acero	1.99%	0.82%	BB1
18	Distribuidoras de auto transportes, refacciones	1.80%	0.85%	BB1
19	Ganadería, caza y pesca	1.76%	2.39%	B+2
20	Cemento	1.59%	0.06%	A
21	Comercio de, gas, combustibles y lubricantes	1.49%	0.81%	BB1
22	Comercio de maquinaria, equipo y	1.07%	1.39%	BB-1
23	Productos de plástico	1.04%	0.42%	AA-
24	Otros productos alimenticios	1.02%	0.75%	BB1
25	Refrescos y bebidas embotelladas	1.00%	0.14%	BBB+2
26	Otros productos metálicos	0.90%	0.84%	BB1
27	Servicios de educación	0.86%	1.91%	BB-2
28	Productos farmacéuticos	0.79%	0.14%	BBB+2
29	Vehículos y automóviles	0.75%	0.00%	AAA
30	Servicios médicos	0.74%	1.31%	BB-1
31	Carrocerías y partes automotrices	0.71%	0.64%	BB+2
32	Comercio de artículos para el hogar	0.69%	2.20%	B+1
33	Molienda de trigo y sus productos	0.65%	0.11%	BBB+1
34	Papel y cartón	0.61%	4.12%	B2
35	Productos metálicos	0.59%	1.66%	BB-2
36	Maquinaria y equipos no eléctricos	0.59%	1.02%	BB2
37	Equipo y aparatos eléctricos	0.59%	0.06%	A
38	Otras industrias químicas	0.54%	0.33%	BBB-2
39	Productos cárnicos y lácteos	0.53%	1.89%	BB-2
40	Prendas de vestir	0.51%	1.71%	BB-2
41	Otros productos de minerales no metálicos	0.50%	0.30%	BBB-2
42	Molienda de nixtamal y sus productos	0.50%	0.06%	A
43	Aceites y grasas vegetales comestibles	0.47%	0.03%	AA
44	Hilados y tejidos fibras blandas	0.43%	1.13%	BB2
45	Industrias básicas de metales no ferrosos	0.42%	0.16%	BBB+2
46	Otras industrias manufactureras	0.39%	2.05%	B+1
47	Envasado de frutas y legumbres	0.35%	0.78%	A
48	Equipos y aparatos electrónicos	0.35%	0.04%	AA-
49	Abonos y fertilizantes	0.32%	0.23%	BBB2
50	Alimentos para animales	0.32%	0.33%	BBB-2
51	Imprentas y editoriales	0.30%	2.95%	B+3
52	Cuero y sus productos	0.28%	2.43%	B+2
53	Banca múltiple	0.28%	0.00%	AAA
54	Química básica	0.27%	0.31%	BBB-2
55	Jabones, detergentes, perfumes y cosméticos	0.25%	0.13%	BBB+1
56	Comunicaciones	0.24%	2.47%	B+2
57	Maquinaria y aparatos eléctricos	0.23%	0.09%	A-
58	Aparatos electrodomésticos	0.23%	0.16%	BBB+2
59	Azúcar y sus derivados	0.22%	0.00%	AAA
60	Bebidas alcohólicas	0.19%	0.85%	BB1
61	Otras industrias textiles	0.14%	2.19%	B+1
62	Vidrio y sus productos	0.14%	0.59%	BB+2
63	Minerales metálicos no ferrosos	0.12%	0.19%	BBB1
64	Minerales no metálicos	0.12%	0.12%	BBB+1
65	Muebles y accesorios metálicos	0.11%	1.47%	BB-1
66	Productos de hule	0.08%	5.56%	B3
67	Otros equipos y materiales de transporte	0.07%	0.99%	BB2
68	Refinación de petróleo	0.06%	1.42%	BB-1
69	Mineral de hierro	0.05%	0.15%	BBB+2
70	Aserraderos incluso triplay	0.04%	1.92%	BB-2
71	Resinas sintéticas, plástico y fibras	0.04%	0.14%	BBB+2

Fuente: elaboración propi

Conclusiones

Con la información manejada hasta el momento podemos concluir que el cálculo de una calificación de riesgo sectorial que sirve como elemento de juicio para la toma de decisiones en el otorgamiento de crédito debe de ser reforzada con criterios macroprudenciales que anticipen ciclos económicos. Este contraste lo hacemos válido, dado que la calificación de riesgo sectorial por si sola evalúa en un periodo determinado el nivel de riesgo del sector, hasta donde la información observada está disponible. Por lo tanto, la información observada no recoge información anticipada que permita detectar patrones para tomar decisiones antes de que los eventos sucedan. Ante este escenario, tenemos que construir los pronósticos que nos permitan anticipar tendencias y ciclos, con los métodos empleados que comentamos en la presentación de este trabajo.

La información observada para cada una de las 71 series de tiempo llega hasta el mes de diciembre de 2013 y se pronosticaron mensualmente todos los datos para 2014. En total se pronosticaron 12 meses para cada una de las 71 series de tiempo con el afán de poder construir los ciclos macroprudenciales que se requieren para el contraste en cuestión. Es necesario utilizar criterios macroprudenciales, como la proyección anual del ciclo económico de los 71 sectores para contrastar la calificación de riesgo del sector y poder detectar oportunidades de colocación donde se espera una fase creciente del ciclo económico y mitigantes de riesgo mediante una colocación más prudencial (o menos agresiva) cuando se pronostica una fase del ciclo económico de contracción o recesión.

Los criterios macroprudenciales son necesarios con el afán de anticipar dos escenarios básicos. El primero, una colocación excesiva de crédito en etapas de crecimiento atípico que dan origen a burbujas especulativas y que pudieran traer consecuencias negativas a futuro; a pesar de que la calificación de riesgo del sector hubiera sido favorable *a priori*. El segundo, una baja colocación de crédito debido a que la calificación de riesgo del sector está muy castigada; pudiendo ser mayor si se tomara en cuenta que se tiene proyectada una fase expansiva del ciclo económico.

Recapitulando, la calificación de riesgo sectorial es una buena métrica de riesgo, dado que en su cálculo se consideran muchos insumos, parámetros y variables para cada uno de los 71 sectores; pero es una métrica que resume la situación de un determinado sector en el tiempo presente, mas no permite tomar una decisión anticipada a un evento esperado *per se*. Por lo tanto, contrastar la calificación de riesgo sectorial con el criterio macroprudencial (ciclo tendencia proyectada) da

una panorámica más certera de los prospectos de colocación en cada sector dado que implica el pronóstico con un horizonte de un año, tanto del ciclo económico como de la tendencia de cada uno de los 71 sectores. De hecho, el criterio macroprudencial permite calibrar el método de la calificación de riesgo sectorial, permitiendo tomar decisiones asertivas de forma anticipada y con mayor precisión. En suma, con nuestro modelo pudimos aportar métricas de riesgo que permiten obtener la calificación de riesgo para cada uno de los 71 sectores económicos y con base en estos cálculos pudimos construir una política de portafolio para cada caso, que a su vez fue contrastada por nuestro criterio macroprudencial de largo plazo, en función de la tendencia y ciclo esperados para cada uno de los sectores.

6. Bibliografía

De Lara Haro, A. (2011). *Medición y control de riesgos financieros*. México: Limusa.

International Federation of Accountants (2009) . *Enhancing sound regulation and strengthening transparency*. The Group of Twenty (G-20) Finance Ministers and Central Bank Governors, marzo. Recuperado de:www.ifac.org/system/files/publications/files/IFAC_G20_Letter_Wkgp_1.pdf

Brunnermeier M. , Crockett A., Goodhart C. , Persaud A. y Shin H. S. (2009). *The fundamental principles of financial regulation*. International Center for Monetary and Banking Studies, Geneva Reports on the World Economy, (11) , julio.

Caruana, J. (2010). *Systemic risk: how to deal with it?*. Bank For International Settlements, Febrero . Recuperado de www.bis.org/publ/othp08.htm.

Banco Internacional de Pagos, 80° Informe Anual, 1 de abril de 2009-31 de marzo de 2010. Basilea, 28 de junio de 2010.

Clement, P. (2010). *Origen y evolución del término macroprudencial*, Informe Trimestral del Banco de Pagos Internacional, marzo, pp. 59–67.

Financial Stability Forum (2009). *Report of the Financial Stability Forum on addressing procyclicality in the financial system*, abril . Recuperado de http://www.financialstabilityboard.org/wp-content/uploads/r_0904a.pdf

Committee on the Global Financial System (2010). *Macroprudential instruments and frameworks: a stocktaking of issues and experiences*. Bank For International Settlements, CGFS Papers, nº 38, mayo. Recuperado de http://www.bis.org/publ/cgfs38.pdf

Gerlach S. y Peng W. (2005). *Bank lending and property prices in Hong Kong*. Journal of Banking and Finance, vol. 29, (2), febrero, pp. 461–81.

Central Bank of Malasya (2010). *Financial stability and payment systems report 2009*. Marzo. Recuperado de http://www.bnm.gov.my/files/publication/fsps/en/2009/fs2009_book.pdf

Reserve Bank of India (2009). *Report on trend and progress of banking in India 2008–09*. Octubre. Recuperado de https://rbidocs.rbi.org.in/rdocs/Publications/PDFs/RTP0809PRD_Full.pdf.

Gerlach S. y Peng W. (2005). *Bank lending and property prices in Hong Kong*. Journal of Banking and Finance, vol. 29, nº 2, febrero, pp. 461–81.

Saurina J. (2009). *Loan loss provisions in Spain. A working macroprudential tool*. Banco de España, Revista de Estabilidad Financiera, vol. 17, noviembre de 2009, pp. 11–26

Committee on the Global Financial System (2010). *The role of margin requirements and haircuts in procyclicality*. Bank For International Settlements, CGFS Papers, nº 36, marzo. Recuperado de http://www.bis.org/publ/cgfs36.pdf

Comisión Nacional Bancaria y de Valores, "Circular número 1480", México D.F., a 29 de septiembre de 2000

Makridakis S., Wheelwright S.C. y Hyndman R.J. (1998). Forecasting: Methods and Applications. Wiley.

CAPÍTULO VIII

Accione para generar Valor Económico Agregado en pequeñas empresas.

Milka Elena Escalera Chávez

Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media. UASLP

Carlos Trejo Pech

Universidad Panamericana, Campus Guadalajara.

Resumen

El valor económico agregado (EVA) es un modelo que permite medir el desempeño organizacional a través de la creación o destrucción de valor. La literatura actual de EVA es muy activa en el estudio de empresas públicas, principalmente en países desarrollados. Sin embargo, en empresas privadas, principalmente en PYMEs, la creación de valor pocas veces se estudia por falta de información. El objetivo de este trabajo fue examinar la percepción de los dueños y/o administradores de las pequeñas y medianas empresas con respecto a las acciones significativas que permiten crear valor económico, siguiendo metodologías documentadas en la literatura para analizar las variables latentes que afectan EVA. Se utilizó una muestra de 110 gestores de PYMEs de San Luis Potosí, a quienes que se aplicó un cuestionario con 14 preguntas encaminadas a identificar las acciones que realizan cotidianamente para generar valor. A los datos obtenidos se aplicó análisis factorial. Los resultados dejan ver que sí existe una serie de prácticas encaminadas a crear valor económico agregado, las cuales se agrupan en cuatro dimensiones: mercado, costos, financiamiento, e inversiones.

Palabras clave: EVA, análisis factorial, PYMEs.

1. Introducción

En este capítulo presentamos un trabajo empírico sobre el Valor Económico Agregado (EVA) en empresas pequeñas y medianas (PYMEs). Aplicamos análisis factorial a los resultados de una

encuesta a gestores de PYMEs en San Luis Potosí. En vez de medir EVA y relacionar sus componentes con algunas características selectas de las empresas –como es común en la literatura–, en nuestro estudio tratamos de identificar si las acciones que los gestores detectan como claves en el éxito de las PYMEs son consistentes con el modelo EVA o no. En ese sentido el alcance de nuestro trabajo es modesto; sin embargo, lo consideramos de importancia en el contexto de las PYMEs, en las que generalmente se carece de información para realizar estimaciones de indicadores financieros

Se ha estimado que tan sólo una de cada tres PYMEs logra permanecer en el mercado después de seis años de su creación y que entre las causas más importantes de su desaparición están los factores económico – financieros (Timmons, 1999). Ello exigiría de los gestores de las PYMEs ser innovadores y examinar constantemente sus procesos y prácticas con el fin de aumentar su probabilidad de permanencia. Sin embargo, este sector se caracteriza por tener recursos limitados y falta de experiencia administrativa (Espinoza, 2011, por ejemplo, ha cuestionado que las actividades que realizan éstas empresas estén encaminadas a potenciar el valor de sus negocios). Además, entre el grupo de PYMEs, el tamaño del negocio también tiene una consecuencia en su persistencia, las PYMEs de menor tamaño son las más inseguras y con mayor probabilidad de fracasar. Más aún, aquellas PYMEs que apenas transitan de la informalidad a la formalidad, podrían tener riesgos mayores.[1]

Este contexto es el que podría hacer relevante la detección de acciones gerenciales, en las PYMEs, que conduzcan hacia la generación de valor. Determinar y reforzar estos conceptos entre

[1] La economía informal en México, definida como el conjunto de "empleados, trabajadores por su cuenta, empleadores y trabajadores familiares no remunerados trabajando en empresas no incorporadas de tamaño pequeño" OIT (2013,8), estaba integrada en el 2013 por el 59 % de la población económicamente activa y contribuía con 24.8% al crecimiento económico del país, de acuerdo a datos del INEGI (2013).INEGI La productividad en el sector informal era menor que en el sector formal; según INEGI la productivas del sector formal fue 3.3 veces mayor que en el informal. Actualmente el gobierno mexicano se ha enfocado en reducir la tasa de informalidad mediante el establecimiento de un nuevo régimen fiscal para este sector, dicho régimen proporciona beneficios en seguridad social, valor agregado e impuestos especiales durante la primera década de su formalización. Con este incentivo, hay posibilidad de un aumento en el tránsito hacia la formalidad. A este programa o régimen se han integrado 4.3 millones de empresas (Nieto, 2015).

gerentes de PYMEs podría contribuir a sus tareas de gestión. Brem, Kreusel y Neusser (2008) han señalado que existe poca investigación sobre la introducción de los sistemas de medición del desempeño en PYMEs. Ortega y Villegas (2004) han definido acciones que afectan la creación de valor con el propósito de inferir si las PYMEs realmente generan dicho valor; del mismo modo Bahri, St-Pierre y Sakka (2010) investigaron sobre la relación entre las prácticas empresariales y el valor económico agregado como medida de desempeño. En general, a pesar de la extensa literatura sobre EVA son pocos autores que han abordado el tema para las PYMEs. Para delimitar, el objetivo de esta investigación es examinar la percepción de los gestores de las PYMEs sobre acciones significativas que agregan valor económico.

2. EVA como modelo para crear valor en la empresa

Iniciamos discutiendo la forma en que una empresa crea valor. La rentabilidad económica se conceptualiza como la capacidad de generar utilidad a partir de los activos de la empresa o del capital invertido; esta rentabilidad debe al menos igual al costo de dicho capital. Bonilla (2010) menciona que crear valor en la empresa implica tener exceptivas sobre el fututo de la empresa; por ello las gestiones se deben planificar para que se puedan alcanzar. Para facilitar la verificación (seguimiento/control), éste autor recomienda que exista una estrecha relación entre empleados, proveedores, clientes, accionistas, entorno ecológico y otros stakeholders si existieran.

Otero (2011) enfatiza que un esfuerzo consciente de creación de valor implica un aprendizaje generativo, un aprendizaje al interior de las organizaciones que involucre innovación y desarrollo en todas y cada una de las áreas. La retroalimentación constante entre las estrategias y sus resultados, debe ser el mapa que guíe a las organizaciones a ser no solo rentables contablemente sino generadoras de desarrollo y progreso (valor). Para verificar que los objetivos de la empresa han sido alcanzados, se requiere contar con medidas sencillas y convincentes de desempeño financiero, como el EVA. Se elabora un poco más sobre el concepto en las secciones siguientes.

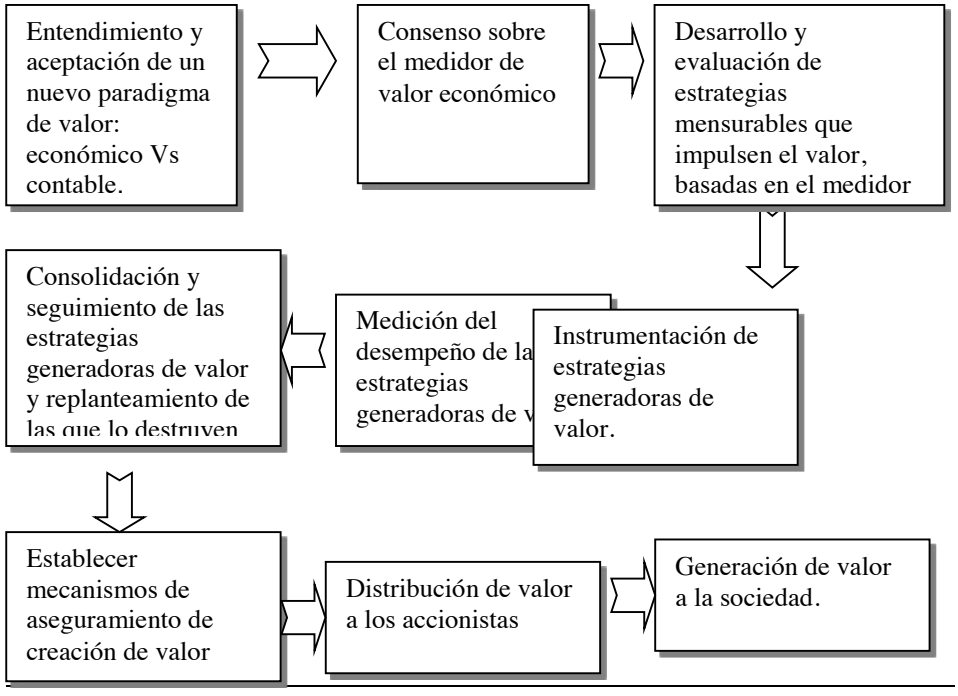
2.1 Principio fundamental del Valor Económico Agregado

Laniado (2002, p 20.) señala que "crear valor significa [realizar] una serie de actividades que conducen al dueño o accionista a obtener un retorno sobre la inversión que sea positivo y que sea superior a aquello que obtendría con otra alternativa comparable". De manera similar, el Instituto

Mexicano de Finanzas (IMEF, 2003) se refiere al valor como aquel "que se crea cuando el capital es invertido de manera diligente y que trabaja de tal forma que con la riqueza invertida se genere más riqueza". Un poco más específico, generar valor económico requiere tener flujo de efectivo libre, definido como flujo de efectivo operativo menos las inversiones en capital de trabajo y activos fijos, y que dicho flujo de efectivo libre sea suficiente para pagar el costo promedio ponderado de capital.

La Figura 1 puede ayudar a comprender el ciclo de creación de valor según ese autor.

Figura 1 Ciclo de creación de valor



Fuente: Laniado (2002).

Aun cuando los economistas teóricos han usado por más de cien años el concepto del beneficio económico, Stern y Shiely (2000) señalan que fue a partir de los años ochenta cuando se redescubre y populariza la implementación de este indicador financiero, conocido ahora como EVA. Está medida está orientada en calcular el valor creado o destruido por una empresa, unidad o departamento durante un periodo contable determinado.

Con la finalidad de crear riqueza para la empresa, los dueños deben de obtener de su inversión una ganancia mayor al costo de capital; éste fue el fundamento propuesto por Stewart (1990) y

proyectado por Stern Stewart y Co. para dar origen al valor económico agregado en respuesta a una inquietud y un interés por un modelo económico para la empresa. Las bases teóricas de este método han sido establecidas a partir de las explicaciones de Modigliani y Miller (1958, citado por Stern y Shiely, 2000, 17) "La renta económica es el origen de la creación del valor en la empresa y su tasa de rendimiento umbral (llamada costo de capital) se calcula a partir de la cantidad de riesgo que asume el inversionista". Estos autores, sin embargo, no establecieron ninguna medida para estimar la renta económica de una empresa (Stern y Shiely, 2000).

3. Marco conceptual

De acuerdo a Damodaran (2002), el objetivo de la toma de decisiones financieras en la empresa con fines de lucro es maximizar el valor de los accionistas. La estructura óptima de capital; es decir, las decisiones que se toman sobre la mezcla del financiamiento, es una de las elecciones financieras de relevancia en ese esfuerzo de maximización de valor (desde el modelo seminal de Modigliani y Miller (1958), quienes plantean la irrelevancia de la estructura de capital, el relajamiento de los supuestos de ese modelo –ajustándose a las fricciones de la realidad–, ha dado lugar a hipótesis alternas sobre los determinantes de la estructura óptima de capital). Además del financiamiento, las decisiones de operación y las de inversión inciden directamente en el valor que una empresa crea o destruye. El modelo EVA captura estas tres decisiones.

Las decisiones operativas impactan de forma directa en el estado de resultados; específicamente en la utilidad neta operativa después de impuestos –pero antes de gastos financieros– (UNODI). Las decisiones de inversión, tanto en capital de trabajo como en activos de largo plazo, impactan indirectamente a la utilidad y al costo del financiamiento (por ejemplo, por medio de las depreciaciones de los activos o por medio de la variación de financiamiento requerida cuando las inversiones cambian). Finalmente, las decisiones de financiamiento determinan el costo promedio ponderado de capital (CPPC), que es el rendimiento esperado de los que invierten en la empresa (mezcla de dueños y bancos, si existe deuda bancaria). EVA, o en términos económicos, el rendimiento residual, es precisamente la diferencia entre el rendimiento real y el rendimiento esperado; es decir, la UNODI menos el CPPC; ambos pueden expresarse en porcentaje anual tomando como base el monto total de la inversión en la empresa, o de manera similar expresarse en dinero. Esta definición es estándar en libros de textos en finanzas corporativas. Entre la extensa literatura, trabajos que elaboran en este concepto incluyen Stewart (1990), Stern y

Shieley (2000), Amat (2000) y Drucker (2000). Para una empresa con información financiera confiable disponible, la estimación de EVA es muy fácil; algunas empresas que implementan este indicador financiero realizan ajustes a las partidas contables, guiados por consultores especializados.

Empresas que carecen de información (i.e., PYMEs, enfoque del estudio) podrían enfocarse a acciones empresariales que impacten en el valor económico. Hall (2000), por ejemplo, analizó los elementos principales que han sido considerados indicadores de mayor impacto para optimizar el valor económico agregado y sugirió examinarlos con la intención de hacer conscientes y formales las decisiones de las personas que ayudan a la organización a conseguir las metas de los accionistas. Esto es importante al menos por dos razones: en primer lugar, no se puede actuar directamente en la generación de valor y en segundo lugar, a través de estos impulsores, la dirección de la empresa puede establecer estrategias que afecten de manera indirecta en la maximización del valor.

Copeland, Koller y Murrin (2000) han clasificado los componentes que generan valor en tres niveles: 1) valor genérico (inversiones de capital), 2) unidad de negocio (clientes, productividad) y 3) nivel de operación (capacidad utilizada, costo de cancelación de acreedores o deudores). Amat (2000) explica que se debe actuar sobre las variables que puedan tener influencia en la generación de valor y describe tres estrategias básicas para incrementar el valor económico agregado. Las acciones que explican o contribuyen a generar valor económico agregado, de acuerdo a éste autor son: a) incrementar las utilidades sin incrementar el capital, b) invertir en nuevos proyectos con un retorno excedente al costo del capital, y c) reducir el capital sin reducir las utilidades. Dichas acciones se desglosan en las Figuras 2, 3 y 4, que se explican por sí mismas.

La aplicación práctica de las acciones (variables) anteriores depende de características específicas de cada empresa. La persona que dirige la empresa puede observarlas, identificarlas y evaluarles de modo que se puedan mejorar las acciones que proporcionan valor. Las decisiones financieras que efectúa el directivo producen un efecto positivo o negativo sobre esos factores que con el tiempo afectan la riqueza de los accionistas o del dueño. Hemos usado acciones selectas para la implementación empírica de nuestro estudio; las variables se especifican en la siguiente sección

Figura 2 Estrategia para mejorar EVA – Operación (utilidades)

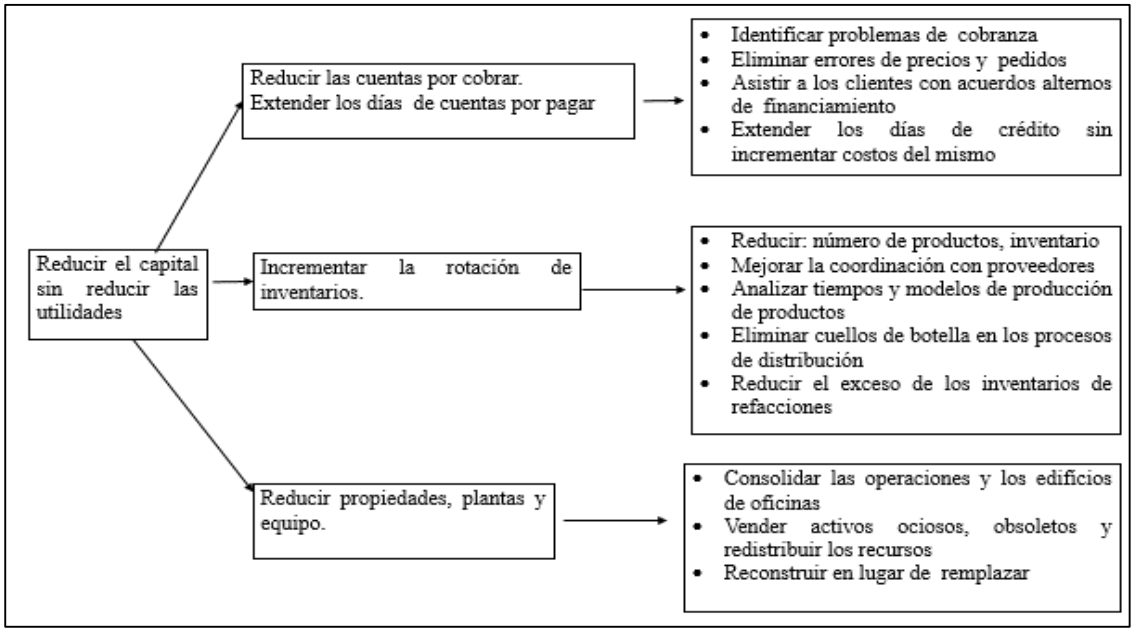


Figura 3 Estrategia para mejorar EVA - Inversión

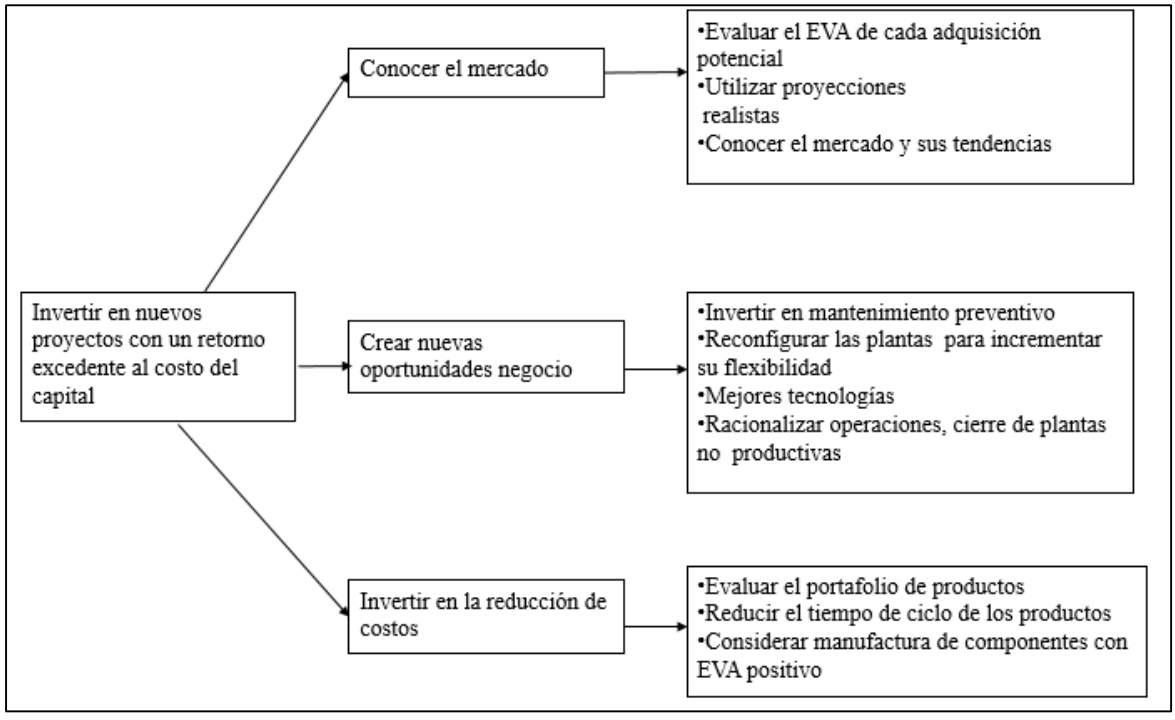
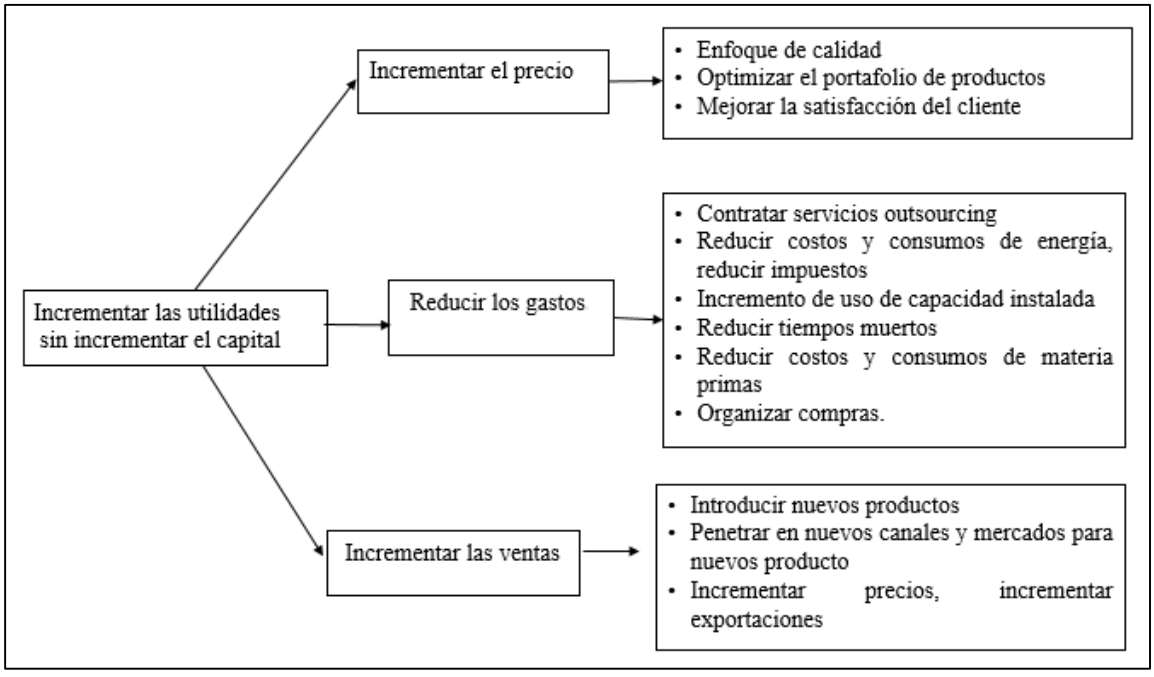


Figura 4. Estrategia para mejorar EVA- Financiamiento



4. Metodología

Este estudio es cuantitativo y sigue un método de razonamiento hipotético-deductivo. Al respecto, Popper (1994) ha expresado que este tipo de estudios están dirigidos a mostrar los aspectos falsos o equivocados de las teorías, y no a verificarlas o confirmarlas. Proponemos una hipótesis como solución tentativa al problema detectado: existe un conjunto de acciones que perciben los dueños y/o administradores de las pequeñas y medianas empresas con respecto a las acciones significativas que permiten crear valor económico.

Las acciones (o indicadores) que asumimos realizan los gestores en estas empresas para generar EVA siguen la propuesta de Amat (2000). Dichos indicadores, especificados en la Tabla 1, son parte de la encuesta aplicada para este estudio.

Tabla 1 Indicadores del EVA

Indicadores	Código
Reconstruir en lugar de reemplazar activos	X_1
Reducir costos materia prima	X_2
Organizar las compras	X_3
Mejorar la satisfacción del cliente	X_4
Conocer su mercado y sus tendencias	X_5
Identificar los problemas de cobranza	X_6
Realizar convenios alternos de financiamiento	X_7
Ampliar los días de crédito	X_8
Reducir sus inventarios	X_9
Mejorar la coordinación de los proveedores	X_{10}
Reducir tiempos muertos	X_{11}

Fuente: Amat, O. (2000)

El estudio es transeccional; entrevistamos a una muestra de 110 dueños y/o administradores (en lo subsiguiente, llamaremos gestores) de PYMEs del municipio de San Luís Potosí, de los sectores de servicio, comercio e industria. La muestra se limitó a empresas con al menos dos años de experiencia en el sector y con una fuerza laboral entre 10 y 250 trabajadores. Por las características de esta investigación –analizamos asociación entre variables, con datos obtenidos por medio de encuestas–, utilizamos un tipo de muestreo probabilístico aleatorio.

El cuestionario tiene una serie de preguntas encaminadas a identificar y medir las acciones que los gestores realizan y que están orientadas a generar valor económico agregado. Se utilizó la escala de Likert con un rango de 1 (nunca) a 5 (siempre), con la intención de capturar el nivel en el que los dueños o administradores perciben que las acciones que realizan cotidianamente agregan valor económico a la empresa. Cada pregunta incluida en el cuestionario descrito ha sido justificada en el marco teórico.

Para medir la confiabilidad del instrumento se calculó el Alfa de Cronbach. En particular, se tomó como base una muestra aleatoria de 30 casos y se aplicó el análisis de confiabilidad utilizando el paquete SPSS. El Alfa de Cronbach es de 0.712 para el conjunto de las variables

indicadas en la Tabla 1. Para el análisis estadístico, en el que implementamos análisis factorial de componentes principales, también se utilizó SPSS.

5. Resultados

Se presenta en primer lugar, un análisis descriptivo de las características demográficas de los gestores en la muestra objeto de estudio. Se observa que un porcentaje alto (89.1%) los responsables de las PYMEs de San Luis Potosí son casados. Respecto al género, la mayoría de quienes dirigen estas empresas son hombres (86.4%); entre las mujeres, el 7.3% son propietarias de una empresa y el 6.4% son administradoras (Tabla 2).

Tabla 2 Género y estado civil de los dirigentes de las PYMEs

	Género (%)		Estado Civil (%)		
	Masculino	Femenino	Soltero	Casado	Otros
Dueño	45.5	7.3	4.5	46.4	1.8
Administrador	40.9	6.4	3.6	42.7	0.9
Total gestores	86.4	13.7	8.2	89.1	2.7

Con respecto a la edad, la Tabla 3 muestra que el porcentaje más alto corresponde al rango ente 37 y 40 años, en los dueños el porcentaje es de 20.6 y en los administradores un 25.8.

Tabla 3. Edad de los dirigentes de las PYMEs

Edad	Dueño (%)	Administrador (%)
25-28	0	6.89
29-32	6.8	3.4
33-36	8.6	8.6
37-40	20.6	25.8
41-44	12.0	15.5
45-48	18.0	15.5
49-52	15.5	8.6
53-56	5.1	0.0
57-60	10.3	5.1
61- 64	1.7	0.0

5.1 Análisis Factorial

En primera instancia presentamos los parámetros que validan que el análisis factorial es factible de aplicarse en el conjunto de datos objeto de estudio. La Tabla 4 muestra las correlaciones entre las variables. A pesar de que las correlaciones son relativamente bajas, el valor de contraste de Barlett (234.272) es estadísticamente significativo (sig.0.00).

Tabla 4. Matriz de correlaciones

Variable	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	1.000	.452	.265	.146	.356		-.038	.170	.105	.309	.142	-.066
X_2		1.000	.366	.257	.371		-.002	.158	.150	.238	.329	.130
X_3			1.000	.351	.374		.294	.127	.057	.224	.392	.205
X_4				1.000	.476		.225	.142	.138	.037	.370	.035
X_5					1.000		.131	.246	.198	.076	.295	-.004
X_6							1.000	.008	-.019	-.067	.110	.140
X_7								1.000	.543	.295	.118	.006
X_8									1.000	.273	.256	.005
X_9										1.000	.292	.203
X_{10}											1.000	.177
X_{11}												1.000
	Medida de suficiencia de muestreo general: 0.718											
	Contraste de esfericidad de Bartlett: 243.272 Significancia: 0.000											

Otro contraste global, la medida de adecuación muestral general (MSA), es de 0.718, con un valor mayor de 0.5 para cada variable (Tabla 5). Ello implica que el conjunto de variables cumple los requisitos fundamentales para el análisis factorial.

Tabla 5 Medida de adecuación muestral de cada variable

Variable	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}
X_1	.672[a]	-.334	-.089	.041	-.224	.042	-.015	.046	-.264	.092	.178
X_2		.793[a]	-.153	-.049	-.129	.105	-.008	-.026	-.010	-.147	-.334
X_3			.793[a]	-.108	-.152	-.255	-.044	.118	-.106	-.204	-.089
X_4				.768[a]	-.330	-.135	-.032	-.008	.077	-.223	.041
X_5					.776[a]	-.017	-.128	-.058	.136	-.063	-.224
X_6						.613[a]	-.011	.010	.109	.004	.042
X_7							.635[a]	-.493	-.183	.131	-.015
X_8								.625[a]	-.111	-.202	.046
X_9									.676[a]	-.200	-.264
X_{10}										.758[a]	.092
X_{11}											.672[a]

a Valor de la medida de adecuación de cada variable

La Tabla 6 muestra el número de factores y su respectivo poder explicativo expresado en autovalores. Además de valorar la importancia de cada componente, los autovalores se emplean para seleccionar el número de factores. Si se aplica el criterio de raíz latente, se mantendrían los cuatro componentes, todos con un valor mayor de 1.0.

La Tabla 6 también muestra la contribución de cada valor, siendo los elementos del factor uno los que más contribuyen a generar valor económico para la empresa (28.26%) y los del cuarto factor son los que menos contribuyen (10.80%). En cuanto a los factores que componen cada factor, la Tabla 6 presenta también la matriz de componentes rotados y sus comunalidades.

Tabla 6 Matriz de componentes rotados, Comunalidades y varianza

Variable	Factores				
	1	2	3	4	Comunalidades
X_4	.754				.623
X_6	.650				.557
X_5	.609				.656
X_3	.587				.602
X_1		.828			.694
X_2		.726			.615
X_8			.869		.764
X_7			.838		.718
X_{11}				.821	.694
X_9				.554	.667
Autovalor	3.109	1.536	1.234	1.188	
% de Varianza	28.263	13.96	11.214	10.796	
Total de Varianza				64.233	

Se observa en la tabla 6 que el factor uno está integrado por las variables siguientes: Mejorar la satisfacción del cliente (X_4), identificar los problemas de cobranza (X_6), conocer el mercado y sus tendencias (X_5) y organizar las compras (X_3). El factor dos está compuesto por las variables: Reconstruir en lugar de reemplazar activos (X_1) y reducir costos de materia prima (X_2). Las variables del tercer factor son: ampliar los días de crédito (X_8) y realizar convenios alternos de financiamiento (X_7). Finalmente, el cuarto factor conjunta a las variables: reducir tiempos muertos (X_{11}) y reducir inventarios (X_9). Estos factores contribuyen principalmente en las acciones para reducir el capital sin reducir las utilidades e incrementar las utilidades sin incrementar el capital de acuerdo al modelo el EVA propuesto. En particular, el análisis factorial agrupa en el factor uno a acciones que están relacionadas con el mercado, tanto las ventas como las compras (clientes / proveedores); el segundo factor agrupa acciones relacionadas con reducción de costos; el tres con financiamiento, y el cuatro con inversiones

6. Conclusiones

Las conclusiones presentadas en este trabajo dan respuesta al objetivo planteado: identificar la percepción de los gestores de las pequeñas y medianas empresas sobre las acciones significativas que le permiten crear valor económico, de tal forma que puedan disponer de un panorama que le permita comprender cómo lograr un mejor desempeño económico. Los resultados dan evidencia que hay cuatro áreas integradas por diez acciones que los dirigentes perciben que generan valor económico agregado en las PYMEs.

El factor 1 contiene las acciones que más contribuyen a la generación de valor económico de acuerdo a la percepción de los dirigentes. Esto quiere decir que si el dirigente se enfoca al mercado, tanto a la relación con los clientes como con los proveedores, la empresa genera valor económico agregado sin tener que recurrir a ninguna inversión. Así mismo, los resultados dejan ver que realizar acciones en esta área influye de forma favorable en las otras áreas; por ejemplo una buena organización en las compras repercute en la reducción de costos de materias primas y en la reducción de inventarios.

Los resultados son consistentes con los presentados por Amat (2000), en el sentido que hay variables que indicen de forma directa en la generación de valor económico, y que reconocen los gestores. Amat (2000) agrupa dichas acciones en tres grupos: reducir el capital sin reducir utilidades, invertir en nuevos proyectos con un retorno excedente del costo y reducir el capital sin reducir utilidades. En este análisis detectamos cuatro factores, consistentes con la propuesta anterior; en particular, los factores son el mercado, los costos, el financiamiento y el cuatro con inversiones (capital de trabajo e inversiones de capital).

Aunque los resultados son modestos para aplicación potencial en corporativos y otras áreas de investigación, en PYMEs pueden ser relevantes principalmente porque indicadores como el EVA son difíciles de medir directamente. Detectarlos, tener un modelo conceptual de acción gerencial, podría guiar mejor a los gestores en estas organizaciones pequeñas.

Bibliografía

Amat, O. (2000). *EVA un nuevo enfoque para optimizar la gestión, motivar y crear valor,* España, Gestation, 4-60

Bahri, M., St-Pierre, J., & Sakka, O. (2011). Economic value added: a useful tool for SME performance management", *International Journal of Productivity and Performance Management,* 60 (6), 603-621.

Bonilla, F. (2010). El Valor Económico Agregado (EVA) en el valor del negocio. *Revista Nacional de Administración*, 1(1), 55-70.

Brem, A., Kreusel, N., &Neusser, C. (2008). Performance measurement in SMEs: literature review and results from a German case study. International Journal of Globalisation and Small Business, 2(4), 411-427.

Copeland, T., Koller, T. & Murrin, J. (2000**).** *Valuation: Measuring and Managing the Value of Companies*. New York, McKinsey and Company.

Damodaran, A. (2002). *Corporate Finance: Theory and Practice*. Nueva York. John Wiley & Sons.

Drucker, P. (2000). Managing Knowledge Means Managing Oneself. *Leader to Leader*, *16*. Recuperado el 25 de mayo de 2014 de: http://www.pfdf.org/leaderbooks/L2L/spring2000/drucker.html.

Espinoza, R. (2011). Manual para la promoción de las pymes mexicanas. Eumed.net Recuperado el 3 de Junio de 2015 de http://www.eumed.net/libros-gratis/2011e/1081/index.htm.

Hall, J. (2000). Dissecting Eva: the value drivers determining the shareholder value of industrial companies. *Social Science Research*, 4, 253-268.

IMEF (2003). *Valuación de empresas y creación de valor*. México. *PRICEWATERHOUSECOOPERS,*

INEGI (2013). *Medición de la Economía Informal*. Recuperado el 4 de Junio de 2015 de http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/cn/informal/

Laniado, D. (2002). Creación de valor en las empresas: El papel de las finanzas y la gestión. Comercio Exterior, 1-14.

Nieto, E. (2013). Plan de desarrollo 2013-2018. Gobierno de la Republica. Conusltado el 6 de Septiembre de 2015 de http://pnd.gob.mx/wp-content/uploads/2013/05/PND.pdf.

OIT (2013). La medición de la informalidad: Manual estadístico sobre el sector informal y el empleo informal. Recuperado el 4 de Junio de 2015 de: http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:GWP4u0ifSKUJ:www.ilo.org/global/publications/ilo-bookstore/order-online/books/WCMS_222986/lang--es/index.htm+&cd=1&hl=es-419&ct=clnk&gl=mx

Ortega, R. y Villegas, E. (2004)**.** Valuation of Small and Medium Enterprises (SMEs) in Mexico. Paper presented at the annual meeting of the SASE Annual Conference, Autonomous University of Madrid, Spain, Madrid, Spain,

Otero, L. (2011). El valor económico agregado EVA. *Pymes futuro*. Recuperado el 2 de Junio de 2015 de http://www.pymesfuturo.com/eva.html

Popper, K. (1994*). La lógica de la investigación científica*. México. Editorial Grijalbo.

Stern, J. & Shiely, J. (2000). El reto el EVA. España. Gestión 2000.

Tewart, B. (1990). *The Quest for Value*. USA: Harpwer Business.

Timmons, J. (1999). New venture creation. Boston. McGraw-H

CAPÍTULO IX

El proceso del desarrollo emprendedor: el paso de la informalidad a la formalidad. Un enfoque desde las competencias.

Emilio Zevallos V.

ULACIT – Costa Rica

Resumen

El proceso de desarrollo empresarial en América Latina atraviesa por un momento de redefiniciones estratégicas. Los gobiernos, la cooperación internacional, expertos y proveedores de servicios están reflexionando sobre cómo evoluciona un empresario que hace sostenible una empresa en el tiempo. Por ello, modelar la evolución de las competencias empresariales se convierte en un imperativo para entender el resultado de la empresa.

Reconociendo que las micro y pequeñas empresas son un conjunto heterogéneo (en términos de tamaño, sector, región, etc.), así como sus propietarios (en términos de su educación –formal e informal-, experiencia laboral, empresarial, madurez empresarial, red de contactos, etc.), es posible identificar algunos elementos comunes en los empresarios que hacen sostenibles a sus empresas. Por ello, modelar la evolución empresarial, se asocia a ciertos **hitos** que definen etapas en su desarrollo. El aspecto central del proceso es el paso de la informalidad a la formalidad, en la empresa en su proceso hacia la sostenibilidad.

JEL M21, Z13

Palabras clave: pyme, competencias, desarrollo empresarial

1. Antecedentes

El desarrollo del empresariado en América Latina atraviesa en la actualidad por un proceso de redefiniciones estratégicas. La visión de los gobiernos, agencias de cooperación, expertos, proveedores de servicios de desarrollo empresarial están orientándose hacia un cambio en la

forma de entender los procesos de enseñanza-aprendizaje hacia este grupo. En ese sentido, el enfoque por competencias[1] se hace cada vez más importante en el desarrollo de capacidades empresariales, ya que con frecuencia se considera que la toma de decisión de los empresarios (sobre todo los de empresas de menor tamaño), se encuentra exenta de error o mala información. La evidencia internacional respecto de la mortandad de las empresas permite al menos cuestionar lo anterior.

Adicionalmente, el tema de las competencias se ha centrado en el desarrollo de las llamadas "competencias laborales", es decir, las que buscan que los trabajadores puedan desarrollar las actividades para las que están contratados con suficiencia y eficiencia. En ese sentido poco se dice de las competencias empresariales, indispensables para liderar su negocio conduciéndolo hacia el desarrollo competitivo y la sostenibilidad en una economía cada vez más basada en el conocimiento y la innovación[2].

Dado que el enfoque del documento son las empresas de menor tamaño, es importante señalar al respecto que las micro y pequeñas (e incluso medianas) empresas son un conjunto heterogéneo de unidades económicas (en términos de tamaño, sector, región, tipo de producto / servicio desarrollado, etc.), además de las diferencias obvias entre los empresarios propietarios de las mismas (en términos de educación –formal e informal-, experiencia laboral y empresarial, nivel de contactos, grado de madurez o experiencia empresarial e involucramiento en el negocio, etc.), por lo que requieren de un adecuado entendimiento no solo desde las anteriores perspectivas, sino también desde su propia senda de aprendizaje.

Viendo a la empresa y el empresario de esa forma, el proceso de desarrollo empresarial también podría ser considerado como heterogéneo. Sin embargo, y a pesar de esa consideración, podemos

---

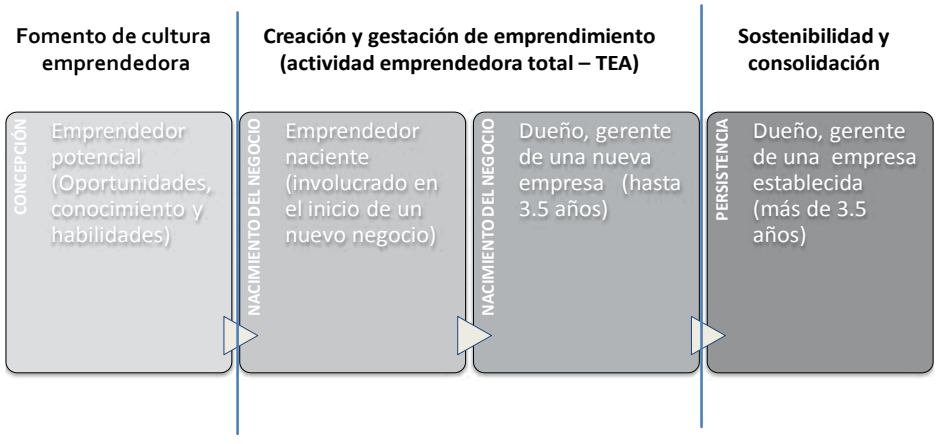
[1] Se entiende por **competencias**, *"... las aptitudes, conocimientos y destrezas necesarias para cumplir exitosamente las actividades que componen una función laboral, según estándares definidos por el sector productivo*". Esta definición fue tomada de Ley N° 20.267: Sistema Nacional de Certificación de Competencias Laborales de Chile.

[2] Entendida como una que supone nuevos y más complejos retos para los empresarios, en un contexto en que las nuevas tecnologías (de información y comunicación), se han convertido en herramientas clave para facilitar los negocios. Al mismo tiempo, lo anterior también supone una nueva cultura empresarial más consciente y comprometida con la realidad de su entorno.

aproximar esta senda de una manera semejante a como se da el proceso de crecimiento de los individuos; el cual atraviesa por ciertos **hitos** (nacimiento, infancia, niñez, adolescencia, adultez). Teniendo en cuenta tal consideración, el paso de la informalidad a la formalidad [3], es probablemente uno de los hitos centrales que permiten distinguir entre una empresa con perspectiva de sostenibilidad respecto de una de subsistencia. De esta forma, el empresario atraviesa por determinadas etapas que marcan su crecimiento y que son relativamente comunes a todas las empresas.

Al respecto, el Global Entrepreneurship Monitor (GEM) desarrolló un modelo para describir este proceso; el cual considera tres grandes etapas en el desarrollo de la empresa: (i) una de concepción, donde lo que se resalta es el paso de la idea de negocio a la realización del mismo; (ii) el nacimiento, que se orienta a la etapa en que la empresa surge y llega hasta sus primeros tres y medio años, que son momentos críticos para ver si es capaz de sobrevivir o no, y (iii) la persistencia, cuando la empresa ha superado los 42 meses, tiempo considerado por el GEM como suficiente para ver si la empresa es viable en el mediano –largo plazo. El gráfico 1 a continuación muestra el proceso.

Gráfico 1: Modelo del GEM

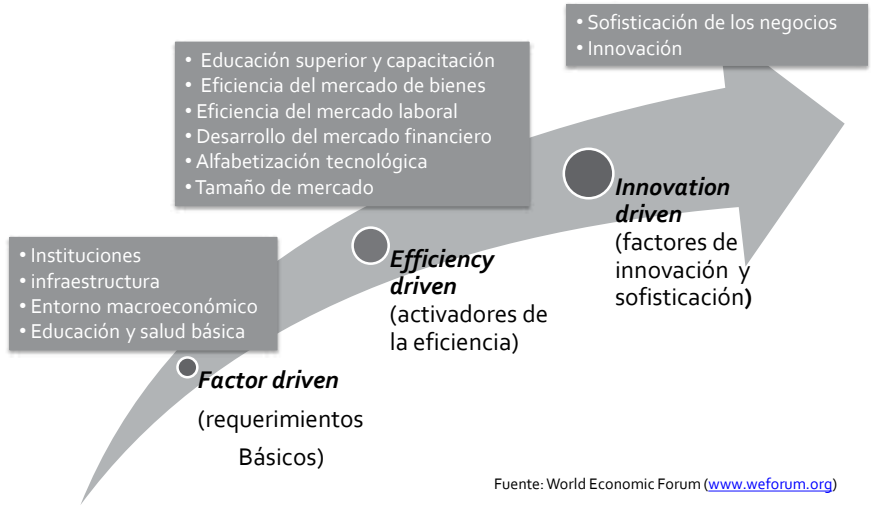


Fuente: Elaboración propia con base en Amorós , J. y otros (2008). GEM Reporte Nacional de Chile 2007

[3] Aunque ella es entendida de distintas formas de acuerdo a cada país, existen algunos elementos comunes a este proceso, tales como (i) el registro municipal (o patente), (ii) el registro ante tributación o Hacienda, (iii) el registro ante la Seguridad Social

En esa línea, es importante rescatar que el GEM vincula –a nivel macro[4]- el desarrollo empresarial con el nivel de desarrollo de los países. Esto supone que el entorno juega un rol importante en el desarrollo empresarial. Es difícil lograr un nivel alto de competitividad en un entorno que no brinda las facilidades para obtenerlo. Y así como las empresas atraviesan por esa senda de desarrollo, los países también lo hacen, de acuerdo al *World Economic Forum* (2014). Esta organización define la senda de desarrollo de los países en tres etapas (ver gráfico 2); de la más básica a la más sofisticada. Así, consideran una primera etapa, denominada de requerimientos básicos, una segunda de activadores de la eficiencia y una tercera de factores de innovación y sofisticación. La lógica de esa vinculación tiene que ver con cómo el entorno puede efectivamente ejercer influencia en el desarrollo empresarial, ya que el tipo de desarrollo empresarial así como su orientación sectorial depende en cierta medida de la etapa de desarrollo por la que esté atravesando el país, así como de los incentivos asociados a la misma. En cada etapa, la economía muestra mayor disposición a determinado tipo de inversión, lo cual juega el papel de incentivo para las empresas.

Gráfico 2: Etapas del desarrollo económico



Fuente: World Economic Forum (www.weforum.org)

[4] Cuando se hace referencia al nivel MACRO, se tiene en mente el modelo de competitividad sistémica que abarca cuatro niveles: META, MACRO, MESO y MICRO. Ver ESSER, K. y otros (1994). Competitividad Sistémica, competitividad internacional y políticas requeridas. Instituto Alemán de Desarrollo, Berlín.

Así como el entorno ejerce influencia en las distintas etapas del desarrollo empresarial -por la presencia o no de incentivos o desincentivos-, es el propio desempeño del emprendedor y la forma en que se involucra con el mercado, el Estado y otros actores institucionales, quien en mucho contribuye a determinar su senda de desarrollo. Es por ello que el presente modelo amplía y modifica el del GEM. Por un lado, agrega un nivel superior de desarrollo debido a que muchas veces, las empresas llegan a la etapa de consolidación y se quedan estancadas en una especie de "zona de confort" en la que el desarrollo, la innovación, etc., dejan de ser los elementos más importantes del negocio. Por el otro, le da un carácter más atemporal, es decir, no es posible identificar con precisión cuanto tiempo debe tardar en cada una de las etapas, pero sí en que momento puede pasar de una etapa a la otra.

La senda de un empresario que se consolida en el mercado

Aunque los empresarios que se consolidan en el mercado no son un grupo particularmente amplio, si tienen ciertas conductas que los diferencian del resto y que se centra en temas como su interés en aprender, en la innovación, y por tanto una constante búsqueda de información, el mantenerse siempre atento a lo que ocurre en su alrededor, es otro elemento asociado a este perfil empresarial. Además, esta mayor conciencia de la necesidad de seguirse educando (para generar innovaciones que lleven al negocio a mayores niveles de competitividad), también supone el establecer contactos y alianzas con quienes puedan contribuir a esta meta. Asimismo, su deseo de devolver de alguna forma lo que la sociedad le aporta a la empresa (o bien remediar en algo el daño que la actividad económica genera en el medio ambiente). Incluso en algunos casos esta perspectiva puede redefinir su actividad económica hacia una que no solo genera excedentes sino también que mejora las condiciones económicas y/o sociales de la comunidad donde ejerce su actividad.

Todo lo anterior en la práctica tiene consecuencias en las acciones empresariales; el uso de los recursos, la relación con el equipo de trabajo, pero sobre todo, la visión de los resultados del negocio más allá de los convencionales de ventas o ingresos.

De ahí que esta última etapa de **madurez** se caracteriza por un permanente sentido de la innovación, y la generación de nuevas oportunidades de negocio (bien en la propia empresa, o creando nuevos negocios). Es en esta etapa que dos competencias se hacen centrales para el empresario, el de aprendizaje permanente y la orientación a resultados. La razón es que ellas le permiten a una empresa de muchos años en el mercado seguirse viendo como innovadora (el modelo se ve en una sección más adelante). De ahí que el concepto de emprendimiento del GEM aplique perfectamente a esta perspectiva: "*El emprendimiento es un proceso dinámico, que incluye no solo a las ideas que se transforman en negocios, o las nuevas empresas, sino también a las que hacen cosas nuevas, aun teniendo muchos años en el mercado"*[5].

2. Un marco conceptual para el desarrollo emprendedor

Un elemento crítico del desarrollo emprendedor es la **innovación**. Sin ella, las empresas no pueden mejorar su posición competitiva, y en un mundo globalizado, ello las condena al estancamiento, la subsistencia o eventualmente su desaparición. Por esa razón es un tema de creciente interés en la agenda de los organismos públicos, la academia y la cooperación internacional. Sin embargo, y a pesar de lo anterior, en la práctica se ha visto poco de cómo promover innovaciones o implementar acciones en esa línea orientadas hacia las empresas de menor tamaño con diferentes niveles de desarrollo.

De ahí que uno de los grandes retos del desarrollo emprendedor se encuentre en la educación (emprendedora) y sus posibilidades de visibilizar al grueso de los empresarios la importancia de la innovación para el desarrollo de sus negocios. Parte de esta educación emprendedora supone el incorporar al ADN del emprendedor el concepto de "capacidad de absorción" (*absorptive capacity*[6]), entendido *como la habilidad que tienen las empresas* (o más bien los empresarios) *para reconocer el valor del nuevo conocimiento externo* (así como interno), *asimilarlo y aplicarlo con fines comerciales* (o su aplicación en los negocios como parte de la creación de

[5] GEM (2008). Reporte Nacional de Chile 2007. Universidad Adolfo Ibáñez y Universidad del Desarrollo, p.12

[6] En nuestro caso es fundamental diferenciar si la "capacidad de absorción" es una cualidad de los empresarios que van fortaleciendo con el tiempo, si es algo que traen al proceso emprendedor, o si más bien es algo que se construye a lo largo de la vida (desde cero).

valor)[7]. Pero no solo es la capacidad de reconocer el valor del conocimiento, sino también como se lleva a cabo el proceso de transformación de ese conocimiento, el cual se describe como la forma en que él se mueve de la fuente a su usuario potencial, y luego a como éste se aplica. Reconociendo además que un empresario con una mayor dotación de esa capacidad de absorción se espera que supere a empresarios competidores.

El concepto de capacidad de absorción nos ayuda también a señalar como el conocimiento y la innovación se entrelazan: la innovación se basa en la aplicación de nuevo conocimiento y al mismo tiempo la aplicación de este último lleva al cambio y la innovación. Por ello, las organizaciones y sus líderes requieren de absorber información de todo tipo de fuentes y en todo momento, sean internas o externas a la misma empresa.

Así, la interacción entre el empresario y el conocimiento se da tradicionalmente por medio de: (i) la propia búsqueda de información como antecedente de la investigación y desarrollo (I&D), (ii) las transferencias de conocimiento (p.e. entre pares), (iii) la formación (sea ésta formal o informal) y desarrollo de habilidades, (iv) la consultoría, (iv) c*lusters* (encadenamientos), (v) las actividades de capital de riesgo, (vi) *spin-off* (nueva empresa que se desprende de otra), etc. La anterior lista podría ser vista también como una secuencia de adquisición de competencias donde la búsqueda de información se entiende más desde una perspectiva de aprendizaje permanente (ya que ella es una actividad permanente que se debe materializar desde el inicio de la actividad del negocio).

Desde una perspectiva de etapas (o momentos en que la capacidad de absorción se divide), Zahra y George (2002) proponen cuatro dimensiones: (i) **adquisición**: identificar del universo externo de información, la que es relevante para la empresa; (ii) **asimilación**: el proceso que permite analizar, procesar, interpretar y comprender la información; (iii) **transformación**: la habilidad de modificar y adaptar el conocimiento y combinarlo con el existente (interno); y (iv) **explotación**: la habilidad de transformarla en una ventaja competitiva.

[7] Los agregados entre paréntesis son propios. Tomado de Cohen and Levinthal (1990), Absorptive Capacity: A new perspective on learning and innovation, Administrative science Quarterly. Ithaca: Vol. 35, Iss. 1; p.128. Tomado de Fogg, Helen. Tracing the links between absorptive capacity, university knowledge exchange and competitive advantage in SMEs. Lancaster University Management School. Institute for entrepreneurship and Enterprise Development.

A la vez, Bessant, Tsekouras y Rush (2009), señalan otra clasificación que bien podría también estar asociada a los diferentes momentos del desarrollo empresarial: (i) **Inconsciente / pasivo**: el empresario no reconoce la necesidad del cambio y que su empresa puede mejorar. Sugieren que en esta etapa el empresario requiere de apoyo para reconocer esta necesidad; (ii) **Reactiva**: reconocen la necesidad del cambio pero no están claros en cómo proceder de una forma efectiva, tienen pocos recursos y una red de contactos poco desarrollada. Requieren apoyo pero decreciente conforme desarrollan capacidad interna; (iii) **Estratégica**: tienen un bien desarrollado sentido de la necesidad del cambio y una adecuada capacidad de implementación; (iv) **Creativa**: tienen una estructura bien desarrollada para la innovación y recursos internos con capacidad para absorberla, así como redes que los mantienen al tanto de las oportunidades.

Asociando el tema de la capacidad de absorción al de competencias, encontramos que la literatura asociada al tema de competencias empresariales señala que ellas se aprenden de manera gradual. Al respecto, el Servicio Brasileño de Apoyo a las Micro y Pequeñas Empresas - SEBRAE (En Billorou; 2011) en presenta en esa línea, un modelo que hace referencia a niveles de dominio de las competencias: básico, intermedio y avanzado.

Asimismo, el Centro de Emprendimiento, la Pequeña y Mediana Empresa y el Desarrollo Local de la OCDE (2009)[8] propone una visión jerarquizada de cómo se entienden, organizan y aplican las competencias empresariales; la primera (elemental) se relaciona al desarrollo de actitudes (pensamiento emprendedor), una segunda de mayor complejidad (cuando la persona pasa de la idea al emprendimiento), donde el rasgo interesante es que estos contextos no están asociados necesariamente a instituciones educativas, es decir, existe un componente de conocimiento práctico (o basado en la experiencia). Finalmente presenta una tercera etapa de mayor madurez (pasada la etapa previa que es considerada como de "prueba y error"), donde el empresario avanza hacia su consolidación.

INSEAD (2009), propone también un modelo en tres etapas que combina niveles de competencias con su proceso de desarrollo. En el nivel básico establece los alfabetismos fundamentales para la integración social. En la segunda etapa (intermedia) señala las competencias relacionadas con necesidades laborales específicas, mientras que en la tercera etapa

[8] Ver más información en http://www.oecd.org/cfe/smes/#d.en.198094

(nivel avanzado o superior), se identifican las habilidades complejas que tienen la capacidad de generar innovaciones.

De acuerdo a las categorías antes señaladas, tiene sentido considerar la presencia de tres etapas en el proceso de aprendizaje de los empresarios, a saber: aprendiz, intermedio y avanzado. En el caso del **aprendiz**, se supone que la persona utiliza la competencia de una forma tímida y limitada, y que será la práctica la que ayudará a mejorar su desempeño en ella. En el caso **intermedio**, el empresario la ha explorado más y por tanto, puede sacarle más provecho. Finalmente, en el caso **avanzado**, supone que la conoce bien y sabe usar la competencia con un nivel de dominio en su negocio.

De otro lado y en cuanto al proceso de aprendizaje, Zhang & Hamilton (2010) señalan que las instituciones de educación superior (HEI por sus siglas en inglés), tradicionalmente responsables de la educación emprendedora, han sido inapropiadas para las necesidades de algunos propietarios de empresas. Ellos y otros autores consideran que la educación emprendedora por el contrario a la educación tradicional, debe ser específica, ubicada, y centrada en problemas. De ahí que un elemento en la literatura es que la capacitación "formal" no logra el impacto deseado en los empresarios. Por ello, existen componentes educativos que pueden ser de gran pertinencia por su orientación a la acción y la evidencia, y que corresponden a la educación no formal, tales como:

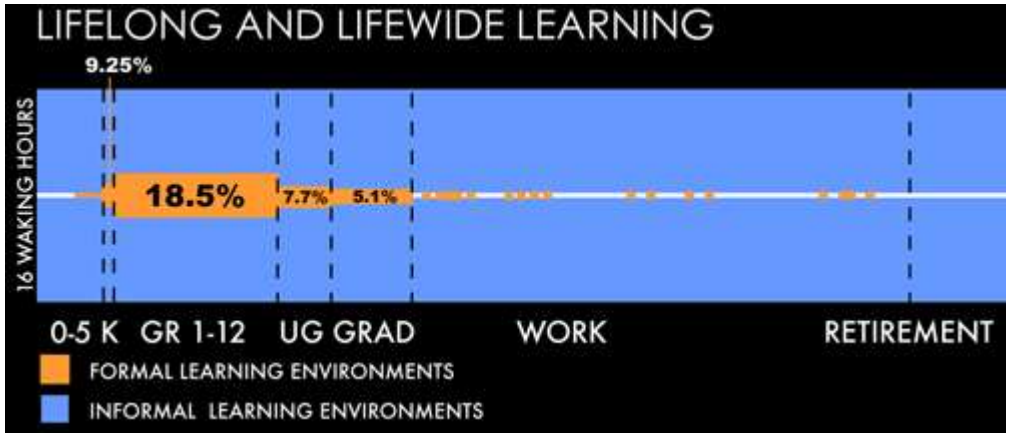
- La educación entre pares: comparten temas similares por su antecedente empresarial común, y donde el papel del facilitador es el de crear un espacio que genere la confianza y el respeto suficiente para promover el aprendizaje,
- El aprender haciendo: el desarrollo de actividades en el propio negocio que facilitan el aprendizaje sobre la marcha,
- El medio social: durante actividades de formación; los intermedios, almuerzos en los talleres, etc., son espacios de intercambio muy importantes entre los participantes de una actividad,
- Los procesos reflexivos: espacios de aprendizaje que cruzan el espacio de las intervenciones puntuales en una actividad, es más individual y de reflexión,
- El aprendizaje periférico: dado que para el emprendedor no existe una línea divisoria entre el trabajo y la empresa, con frecuencia, otros espacios de la vida cotidiana se vuelven también espacios de aprendizaje.

Diagrama 1: La capacidad de absorción y su proceso de aprendizaje

Fuente: Elaboración propia

De lo anterior surge la importancia de diferenciar el proceso de adquisición, asimilación y transformación de conocimiento (por lo general, a través de medios informales), del proceso de enseñanza – aprendizaje que se da, por ejemplo, en las universidades y las escuelas de negocios (mucho más formal y académico). Sobre ello, es además importante señalar el ambiente en el que se da el aprendizaje. Tal como señala el gráfico 5, los entornos formales de aprendizaje se dan en edades más tempranas y están asociadas a la educación básica, secundaria, técnica y/o universitaria. Posterior a ellas, el proceso de aprendizaje es fundamentalmente informal. Así, el mundo del trabajo es el ámbito de la vida donde los espacios de aprendizaje informal, son los más amplios, y por tanto, existe una gran oportunidad para el desarrollo de actividades educativas informales donde los procesos asociados a la capacidad de absorción son claramente visibles.

Gráfico 5: Aprendizaje Permanente



Tomado de LIFE: http://life-slc.org/about/about.html

3. ¿Cómo es posible modelar el proceso de aprendizaje del empresario?

La evidencia empírica internacional muestra que el proceso de aprendizaje de los empresarios está basado en el mundo del trabajo más que en otro ámbito. Así, el aprendizaje basado en problemas (*problem-based learning o PBL*), entendido como el proceso en el que los empresarios aprenden en el contexto de problemas reales y variados, es también un ámbito donde ellos desarrollan un conocimiento flexible, habilidades específicas para la resolución de problemas, y de aprendizaje autodirigido. Este aprendizaje no es necesariamente intencionado, sino que más bien podría decirse que es una consecuencia (*by product*), del proceso por medio del cual se resolvió un problema. Ello ocurre cuando el empresario busca información, mira la TV, viaja, lee, interactúa con otras personas (clientes, socios, amigos, etc.). Por supuesto, también se encuentran procesos de aprendizaje intencionados, es decir, con un fin empresarial en mente. De ahí que las herramientas antes señaladas, pueden ser de utilidad para el proceso de transferencia de conocimiento empresarial.

Considerando lo anterior, se observa tanto en países desarrollados como en desarrollo, que los métodos tradicionales de formación (la llamada "educación formal"), no es necesariamente la que ha generado más impacto en su aprendizaje. Sin embargo, ha sido (y es) la más utilizada en la región, sobre todo con las empresas de menor tamaño[9]. Sobre estas formas de aprendizaje, Obando y otros (2008), muestran -para el caso de microempresas en Centroamérica- las formas más frecuentes para las actividades de formación; el taller o seminario presencial es la modalidad de capacitación más frecuente (30%), seguida de los servicios de apoyo empresarial (SDE, 17%), los grupos de interaprendizaje (13%), los programas o diplomados (7%), la certificación profesional (6%), los cursos virtuales (6%), los cursos a distancia (3%). Modalidades más estructuradas, tales como un diplomado o certificación, muestran menor interés entre los empresarios, así como las actividades no presenciales. También señala este estudio la preferencia por facilitadores con experiencia real en empresa (en la medida de lo posible que sean también empresarios), lo cual se asocia a la modalidad de taller como la primera preferencia en razón de que ellos pueden ver los resultados concretos de la asistencia técnica en el negocio en plazos cortos.

[9] Es probable que la razón por la cual es la más señalada por los empresarios, es porque es la que más conocen y no porque sea la que les da mayor oportunidad de aprendizaje.

Por ello, es importante considerar el anterior escenario para pensar seriamente en la construcción de un "perfil de entrada" a los procesos de desarrollo de competencias que permita identificar a los empresarios con mayores posibilidades de migrar de su situación prevaleciente hacia niveles superiores de desarrollo empresarial.

4. La competitividad como el eje que permite el paso de la informalidad a la formalidad

El concepto subyacente al desarrollo empresarial es la competitividad. En la actualidad, este se ha convertido en un imperativo para las empresas de todo tipo y tamaño. Y aunque no es de fácil definición, lo importante para las empresas al final es lograr la mayor participación posible en el mercado.

Por un lado, los consumidores han cambiado sus conductas y tienen una mayor conciencia del impacto de sus acciones en el entorno: ahora se informan más, no solo de las características de los bienes y servicios que demandan, sino también de las prácticas empresariales de quienes los producen. Esa mayor responsabilidad con el entorno hace que favorezcan con sus compras a las empresas que se caracterizan por sus buenas prácticas en diferentes ámbitos (laborales, sociales, ambientales, etc.).

Esa mayor conciencia de los consumidores obliga a las empresas a repensar sus estrategias y hacerlas compatibles con esta visión de la sociedad más orientada tanto al respeto de los recursos naturales y el entorno, como a los derechos laborales y sociales. Es por ello que las empresas en general **deben ser** más conscientes de su responsabilidad en el desarrollo y el impacto de su actividad en el medio ambiente. Estas **buenas prácticas** en los ámbitos antes señalados son mucho menos frecuentes en la economía informal que en la formal.

A pesar de lo anterior, la economía informal se ha convertido en el soporte del empleo en muchos países, razón por la cual se introdujo el concepto de **"trabajo decente"**[10] como el marco que

[10] La primera definición de trabajo decente fue*: "trabajo productivo en condiciones de libertad, equidad, seguridad y dignidad, en el cual los derechos son protegidos y que cuenta con remuneración adecuada y protección social".* OIT, *Trabajo decente y protección para todos. Prioridad de las Américas*, Memoria del Director Regional a la 14ª Reunión Regional de los Estados miembros de la OIT en las Américas, Lima 1999, pág. ii. .

debe guiar a las empresas para garantizar un mínimo de condiciones laborales para una vida digna a sus trabajadores (entre ellas la cobertura de la legislación laboral y la seguridad social). Pero es claro también que el trabajo decente no es sostenible sin un conjunto de condiciones (tanto internas de las empresas como del entorno que las rodea) que brinden un escenario razonable para su creación y crecimiento de largo plazo; solo así ellas podrán contribuir a la creación de empleo decente y productivo. Este es el antecedente del concepto de **"empresas sostenibles"**[11]. De esta forma, los conceptos de empleo decente y empresas sostenibles, buscan la implementación de buenas prácticas empresariales y laborales, y sus objetivos se alinean con la sostenibilidad del desarrollo y las mejoras en la calidad de vida. De ahí que la economía informal, por sus características de precariedad laboral e incumplimiento de la legislación, es incompatible con estos conceptos. Es por ello que tanto el Estado como el sector privado deben esforzarse por crear entornos propicios para el desarrollo de empresas sostenibles, promover la iniciativa y el desarrollo empresarial, y vincular las mejoras en la productividad con reformas positivas en las condiciones de trabajo.

La evidencia internacional muestra que la economía informal en los países de menor desarrollo relativo se encuentra en su nivel más bajo en cuanto a organización empresarial y su consecuencia se da –entre otras variables- en la cantidad de empleo en la economía informal respecto de la formal, mientras que a niveles de desarrollo más altos, el sesgo de la economía informal se orienta a la calidad del empleo (informal) en el sector formal.

Si bien el sector privado es el mayor generador de empleos formales, la economía informal es la mayor generadora de empleos a todo nivel. Pero por sus características de empleo precario e

---

http://www.ilo.org/public//spanish/region/ampro/cinterfor/rct/35rct/doc_ref/doc1/i.htm#10- La visión subyacente al concepto es que todo el que trabaja (a tiempo completo o no), tiene derechos laborales, independientemente de donde trabaje (sea en el sector formal o no). OIT (2002). El Trabajo Decente y la Economía Informal. Suiza.

[11] El concepto se nutre de la necesidad de generar determinadas condiciones para que las empresas puedan generar su mayor potencial, lo cual supone contar con un entorno económico e institucional que promueva el desarrollo de los negocios, un contexto social que promueva el la formación continua, así como el emprendedurismo, la justicia social y una sana gestión ambiental. Tomado de OIT (2013). El Desafío de la Promoción de Empresas Sostenibles en América Latina y el Caribe. Un análisis regional comparativo. Oficina de Actividades para Empleadores ACT/EMP. Lima.

incumplimiento de las regulaciones violenta los conceptos de empleo decente y de empresas sostenibles, por lo que no puede ser alentada ni promovida.

A pesar de lo anterior, es necesario reconocer que todas las unidades económicas en su **proceso de desarrollo empresarial** atraviesan por una etapa de informalidad (o semi-formalidad), y que es posible acelerar esta etapa para incorporarlas como miembros plenos de la economía formal. Al mismo tiempo, también es importante reconocer que no todas las nuevas unidades económicas, crecerán y se desarrollarán logrando en algún momento su plena formalización. Existen investigaciones para la OECD y México que señalan que del 100% de las microempresas, solo el 25% logrará superar la subsistencia y pasará a niveles superiores de desarrollo. Si bien el objetivo siempre será lograr que todas las empresas se formalicen, esta información nos obliga a pensar en acciones más efectivas orientadas a ese 75% que no parece tener perspectiva de crecimiento.

5. El modelo de desarrollo empresarial y la caracterización de sus etapas.

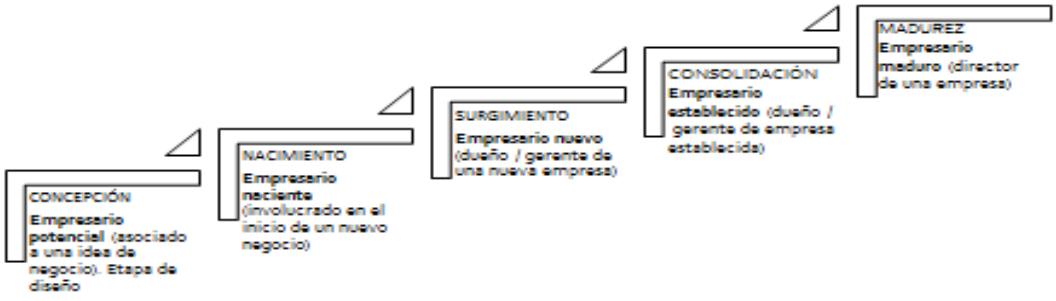
La presente investigación propone que los empresarios que se consolidan en el mercado[12] pasan por un proceso de evolución de sus competencias y donde en cada etapa del proceso, desde la concepción de la idea de negocio hasta la implementación y el desarrollo de la misma, supone que sus competencias van evolucionando, en algunos momentos unas se vuelven más críticas que otras, de forma que existe un proceso de innovación permanente que les permite mantenerse (a la vanguardia) en el mercado. En este punto es importante establecer que es lo que identifica a cada una de las etapas de desarrollo desde la perspectiva del empresario. Y aunque se ha reconocido que una de las características del empresariado –sobre todo de la micro y pequeña empresa (mipe)- es su heterogeneidad, se establece un conjunto de acciones comunes a la etapa, y en las que el desarrollo de sus competencias hacia la formación del empresario, su experiencia laboral y/o empresarial, y su propio proceso de aprendizaje juegan un rol preponderante.

[12] Se entiende por ello a una empresa que es gobernada por una senda de innovación y cambio, cuyos resultados suponen una creciente participación en el mercado, o bien a la inserción en nuevos mercados. Un empresario que se consolida puede hacerlo en un sector tradicional o moderno, ya que ello depende de sus competencias más que del sector o las oportunidades que encuentre en el mercado.

Para este punto es importante señalar que no se pretende establecer una temporalidad específica para cada una de las etapas ya que ello dependerá no solo de las propias competencias del empresario y/o sus habilidades de mejorarlas, de procesos de expansión de la empresa que son secuenciales, o incluso también de condiciones del entorno que pueden acelerar o retrasar procesos. Por ello, más importante que la temporalidad, es la secuencia de acciones que normalmente deberían desarrollar las empresas en tales etapas. Por ejemplo, sería difícil pensar en una empresa que exporte y que antes no se haya formalizado (para emitir facturas, conseguir permisos, etc.).

De esta forma, y bajo el concepto anterior de emprendimiento, este modelo de desarrollo empresarial adopta la siguiente forma:

Gráfico 3: El modelo de Desarrollo Empresarial



Fuente: Elaboración propia con base a al modelo GEM

De acuerdo a estas etapas (ver gráfico 3), se han identificado un conjunto de acciones desarrolladas por el empresario y que podrían representar –en promedio- las conductas más frecuentes a cada una de las etapas. Este no es un esquema rígido, sino más bien uno que intenta señalar algunas características identificables en las empresas (y/o sus propietarios), independientemente del sector en el que se ubican. En este punto es importante señalar que esta identificación es para un empresario "promedio", sin embargo ello también contribuirá a entender como es un empresario ubicado en sectores más dinámicos, o bien uno más dinámico.

Como parte de esta caracterización, se suele establecer una lista de las principales competencias con las que debe contar el empresario (lo cual no implica que las posea todas, o todas en el mismo nivel, ya que muchas de ellas las irá desarrollando a lo largo del tiempo; siendo algunas de ellas críticas al inicio pero menos importantes en el futuro (p.e. cuando tiene ya un equipo de trabajo establecido en el cual delegar funciones) y viceversa. Esta lista es fundamental ya que muchas de estas competencias las irá adquiriendo con el paso del tiempo si se mantiene en el ámbito empresarial.

- Adaptabilidad
- Capacidad de delegar
- Capacidad de persuasión
- Comunicación efectiva
- Confianza en sí mismo
- Conocimiento técnico
- Disciplina
- Entusiasmo
- Habilidad para el trabajo en equipo
- Habilidad para interrelacionarse
- Innovación y creatividad
- Liderazgo
- Organización
- Orientación a resultados
- Perseverancia
- Proactividad
- Responsabilidad
- Tolerancia a la frustración
- Tomador de riesgos (calculados)
- Visión de futuro

Lo anterior es el resultado tanto de una revisión bibliográfica como de un conjunto de grupos focales, así como entrevistas con empresarios y expertos. Es importante señalar también que el stock de características señalado por los diversos autores, expertos y empresarios entrevistados también depende de variables tales como: (i) antecedentes formativos de los empresarios (educación formal e informal), (ii) experiencias laborales previas, (iii) experiencias empresariales o emprendedoras previas, (iv) el nivel de desarrollo relativo del país y las condiciones del entorno de negocios, etc. A continuación se describe la caracterización de cada una de las etapas.

1) CONCEPCIÓN – empresario potencial[13] (antes de iniciar el negocio): En este momento de la vida del emprendedor, empieza a invertir su tiempo y recursos (probablemente en especie más

[13] Es importante reiterar que a diferencia del modelo GEM, en esta etapa tenemos ya personas que quieren y van a emprender una actividad económica independiente, es decir, ya superaron la

que efectivo), para convertir su idea en un negocio que pronto empezará a funcionar. Ella por lo general no es resultado de un momento de inspiración, sino más bien de un proceso que tiene un determinado tiempo de maduración y que se nutre de la experiencia del emprendedor, así como de otras personas con las que compartió la idea a lo largo del tiempo[14]. Por lo general la idea no se implementa de inmediato sino que ella toma un tiempo para madurar (quizás la abandonó en algún momento y luego, otro evento hizo que la retome). Generalmente, el emprendedor posee experiencia en el sector donde quiere poner su negocio, probablemente porque trabajó en él antes o lo conoce de otra forma–, lo cual le permite estar al tanto del proceso productivo y –en el mejor de los casos– también de cómo opera ese mercado. Sin embargo, la persona aún no es conocida como empresaria (tanto como colaborador).

Considerando que existen emprendimientos por necesidad y por oportunidad[15], y que en nuestra región latinoamericana la mayor parte de los emprendimientos surgen de la necesidad; el origen del emprendimiento en muchos casos puede ayudar a predecir su senda, en conjunto con las condiciones del entorno y la conducta empresaria hacia el aprendizaje y la innovación. Lo anterior es posible si el emprendedor solamente está tratando de generar recursos a la espera de una mejora en el mercado laboral que le permita volver a él como asalariado, vs. si encuentra en el desarrollo de una actividad independiente su vocación (que produce el paso de un emprendedor por necesidad a uno por oportunidad). Existen varios diagnósticos de potencial emprendedor que miden adecuadamente la orientación emprendedora de las personas. De esta forma, es posible caracterizar un emprendimiento de subsistencia (de corto plazo, solo para generar recursos adicionales, temporal, etc.) de uno con orientación al desarrollo (y eventualmente la innovación).

---

etapa de la sola idea y en este momento se encuentran trabajando (e invirtiendo, aunque no necesariamente dinero) para convertirla en el negocio que empezará a operar en la etapa 2.

[14] Una buena forma de analizar este proceso se encuentra en JOHNSON, Steven (2010). Where Good Ideas Come From. The natural history of innovation. Riverhead Books, Penguin Group, USA.

[15] **Emprendedor por necesidad**: Las crisis económicas recurrentes en la región llevan a las personas que no han encontrado empleo (o lo perdieron) a buscar una alternativa que les permita sobrevivir, generando una actividad económica independiente; mientras que un **emprendedor por oportunidad** es la persona que tiene una idea de negocio que lo lleva a invertir tiempo y recursos para convertirla en una realidad. El primer caso es muy frecuente en las economías de requerimientos básicos, mientras que el segundo lo es más en las economías basadas en la innovación.

Este momento es el punto de partida para definir los objetivos del negocio (lo que lo diferenciará de la competencia, como intentará posicionar su producto / servicio en el mercado, etc.), y plantear al menos inicialmente, una primera estructura, el primer equipo de trabajo, empezar a asignar los recursos, y cuál sería el posicionamiento del producto (más adelante del negocio) en los mercados. Para alcanzarla, debe establecer los objetivos estratégicos, e iniciar un proceso de planificación de largo plazo y las metas de corto plazo.

Al respecto, Kantis y Drucaroff (2011) se interesan en desarrollar algunas de las características de las empresas denominadas "innovadoras", que se diferencian de las de subsistencia en su capacidad y velocidad de crecimiento. En esa línea, señalan que en la primera etapa, cuando el emprendimiento aún no es más que una idea, "*... se requieren capacidades para conceptualizar el negocio, elaborar el proyecto, reunir recursos, atacar el mercado y resolver múltiples problemas para poner en marcha su emprendimiento".*[16] Así, la motivación y la comparación (con otros emprendedores que han logrado crear su empresa) le ayudan a identificar los rasgos comunes y las áreas de mejora; por ello es importante contar con ciertos antecedentes que pueden contribuir a identificar características de la siguiente.

Asociados a los rasgos distintivos de los emprendedores, se encuentran la superación personal, así como la contribución a la sociedad (más allá del dinero que pueda generar el negocio). Asimismo, el deseo de alcanzar logros en su vida, y la búsqueda de independencia hacen diferencia con otro tipo de emprendimientos más básicos. Otro elemento que marca una diferencia con los emprendimientos convencionales, es la profundidad del conocimiento (técnico) que marca diferencia entre emprendimientos más y menos innovadores. Finalmente, el antecedente familiar (empresarial) es importante, pero no determinante en el desarrollo de su proyección emprendedora.

[16] KANTIS, H. y DRUCANOFF, S. (2011). Corriendo fronteras para crear y potenciar empresas. Editorial GRANICA, Management. Argentina. P 17.

Algunas características señaladas por Kantis y Drucaroff (2011) son:

- Vision de largo plazo
- Identificación de ideas de negocio
- Conocimiento técnico
- Networking
- Resolución de problemas en forma creativa
- Proactividad
- Flexibilidad y adaptación
- Comercialización
- Negociación
- Trabajo en equipo
- Administración de recursos
- Elaboración y evaluación de proyectos
- Planificación: definir agendas estratégicas, metas prioritarias y recursos
- Trabajo duro
- Tolerancia al riesgo y la incertidumbre
- Aprendizaje de la experiencia
- Tolerancia ante las frustraciones
- Comunicación
- Ejecutividad
- Saber delegar

Fuente: Kantis y Drucaroff (2011)

De la lista de competencias señalada inicialmente, se observa que muchas de ellas son comunes a la lista que presenta Kantis, con algunas diferencias que si bien son importantes tanto en el proceso de creación del negocio, también lo son a lo largo de la vida de la empresa. De ahí la necesidad que el empresario cuente con ellas desde el inicio y que ellas vayan destacando en diferentes momentos de la vida empresarial. Para la primera etapa de esta senda se presentan las que son críticas en ella.

- Entusiasmo
- Visión de futuro
- Conocimiento técnico
- Confianza en sí mismo
- Liderazgo
-
- Responsabilidad
- Disciplina
- Perseverancia
- Adaptabilidad
- Proactividad
- Organización
- Toma de riesgos (calculados)
- Tolerancia a la frustración
- Orientación a la meta

De esta lista, es importante rescatar competencias transversales al desarrollo empresarial como el entusiasmo, la visión, la confianza, la tolerancia a la frustración, entre otras, en la medida que ellas le dan estabilidad al desarrollo empresarial.

2) NACIMIENTO – empresario naciente: En esta etapa, la idea de negocio se ha convertido en una empresa emergente porque el emprendedor decidió invertir en ella recursos y tiempo. Como se señaló antes, por lo general el producto/servicio está asociado a experiencia laboral previa. Por ello, es muy probable en el caso del empresario naciente cierto nivel de claridad sobre el proceso productivo e incluso sobre la operación empresarial, aunque no necesariamente sobre procesos y la gestión del mismo.

Durante esta etapa, el emprendedor le da forma al negocio, establece un plan de acción, empieza la búsqueda del primer equipo de trabajo (al que llamaremos, el primer círculo, si no es una empresa unipersonal). Con ellos se definirán los roles fundacionales de la empresa. Durante el proceso, el emprendedor asume tanto el rol estratégico como roles operativos; estos últimos los irá dejando conforme el negocio despegue y cuente con un equipo de trabajo más amplio. Por ello, más adelante se contratará personal para que cumpla roles más operativos y otras funciones delegadas por parte del equipo estratégico. Lo anterior supone que el empresario deberá desarrollar / mejorar la habilidad de identificar personal para complementar las habilidades con las que ya cuenta, ya que no solo será necesario ir incorporando nuevo personal sino que también, ellos irán tomando mayor control de la operación (delegación).

En términos financieros, analiza su disponibilidad de recursos (y la de sus otras posibles fuentes de financiamiento: las 3F - *family, friends and fools*), para financiar la primera etapa de operación del negocio. Generalmente su poca experiencia en el tema hace que subestime sus necesidades de recursos, o bien que el nacimiento de la empresa se dé en una escala subóptima. En el primer caso, esto causa dificultades que se arrastran de inicio y que podrían acabar con la empresa[17], cosa que no ocurre en el segundo caso. Dependiendo de su formación, tendrá clara conciencia del tiempo que requiere para que el negocio empiece a generar utilidades (es decir,

[17] Ello no debería implicar bajo ninguna circunstancia que la empresa no deba "dar el salto" hasta que todo esté en la escala óptima esperada, ya que esa es la razón más frecuente por la cual muchas ideas interesantes no se convierten en negocios: el esperar a tener todo listo.

sabe que tendrá un tiempo de solo pérdidas y probablemente –pero no siempre- también lo ha calculado). No discrimina adecuadamente entre los recursos familiares y los del negocio, por lo que el manejo financiero es aún una limitación significativa.

Hacia afuera del negocio, empieza a desarrollar su cartera de clientes, basado en la red de contactos que seguramente inició en su etapa previa de trabajador asalariado. El empresario construye y desarrolla lazos de su pequeña empresa con el entorno, sobre la base tanto de redes formales e informales de miembros de su familia, amigos y personas asociadas a sus actividades económicas previas. En ese momento, las redes sirven para recabar la información, soporte y los recursos imprescindibles para el inicio y funcionamiento de la empresa.

Dado que para ese momento, normalmente la empresa no tiene reputación (aunque a veces es probable que el empresario si la tenga y con ello, el tiempo de posicionamiento del producto puede bajar ostensiblemente), el empresario desarrolla algunas actividades para la visibilización del negocio y sus productos / servicios. Para ello, acude a eventos, ferias, etc., que le permitan visibilizar a sus potenciales clientes y ver las oportunidades de negocio; además del uso de redes sociales como un aliado clave para presentar en sociedad el negocio.

Focaliza los esfuerzos emprendedores antes de diversificar. Se concentra en lo que está haciendo (el desarrollo del producto, la identificación de mercados, clientes, etc.).

En términos de su relación con el Estado, es probable que haya iniciado algún proceso de registro básico (que puede ser ante Tributación o el Municipio, dependiendo de la necesidad).

También es posible -dependiendo de su nivel educativo-, que haya diseñado un primer borrador de plan de negocios, o al menos algún documento con ideas estratégicas de lo que quiere lograr con su negocio.

De ahí que en términos de las competencias claves, muchas de ellas se concentran tanto en lo estratégico como en lo organizacional.

- Orientación a resultados
- Confianza en sí mismo
- Conocimiento técnico
- Disciplina
- Entusiasmo
- Habilidad para el trabajo en equipo
- Innovación y creatividad
- Liderazgo
- Organización
- Perseverancia
- Proactividad
- Responsabilidad
- Tolerancia a la frustración

3) SURGIMIENTO – empresario nuevo: mantiene la actividad del negocio, desarrollando las fortalezas del producto / servicio a la vez que busca crecer. Ya cuenta con su primer equipo de trabajo (primer círculo), y está empezando un proceso de delegación de funciones (más operativas que estratégicas).

En este proceso de desarrollo aún existe confusión entre el presupuesto empresarial y familiar (aunque muy probablemente tenga al menos un libro de entradas y salidas / hoja de Excel donde lleva el control de los flujos de efectivo).

En el proceso de identificación del negocio, su presencia en eventos asociados al producto, así como el diseño de una imagen de marca, son elementos que en esta etapa le sirven para presentar al producto de buena forma en el mercado. La entrada previa en redes sociales se consolida (probablemente ahora con imagen de marca). Este es el momento del diseño de un primer sitio Web de carácter informativo (que pudo haberse gestado en la etapa anterior). El empresario empieza a consolidar una cartera de clientes, basado en las fortalezas del producto / servicio. La construcción de la reputación repercutirá en varios aspectos del negocio; desde los propiamente financieros hasta el fortalecimiento de la cartera de clientes.

El proceso de crecimiento del negocio también lleva al empresario a establecer relaciones más sólidas con proveedores y/o distribuidores, con el propósito de financiar parte de la operación a través de ellos (es decir, usa sus redes como soporte financiero). De esta forma, la necesidad de crecer y las limitaciones asociadas a su propio tamaño y espacio se vuelven un incentivo para buscar colaboración en el objetivo de desarrollar el negocio aliándose con otros en la búsqueda de complementariedades.

En esta etapa la experiencia le enseña a manejar mejor el inventario, de forma que los recursos invertidos en ellos empiezan a tener más relación con la operación del negocio. Lo anterior, ayuda a estabilizar los gastos y por tanto a mejorar la planeación financiera.

En cuanto a su nivel de formalidad, este es el momento crítico en el cual empieza el proceso de formalización plena (tributación e incluso seguridad social). De ahí la importancia de esta etapa en el desarrollo empresarial, así como la necesidad de contar con políticas que permitan –en esta etapa- facilitar el paso hacia la formalización.

El paso de la informalidad a la formalidad

Uno de los aspectos más representativo en el proceso de formalización empresarial se da cuando las unidades económicas logran el dinamismo que les permite empezar a desarrollar mayor volumen de negocios o una más sólida cartera de clientes. De acuerdo al modelo aquí planteado, esto se da en la segunda etapa de desarrollo empresarial y de ahí la importancia central de que en ese momento en que la decisión de formalizarse está tomada, las condiciones para lograrlo sean lo más simples y transparentes posible. En OIT (2014), se establece que para la transición a la economía formal se requiere de una estrategia de crecimiento y generación de empleo de calidad; a la vez que iniciativa empresarial y competencias profesionales.

Si bien en el modelo de la OIT se habla de un enfoque integrado que se compone de 4 ejes; el primero (productividad) está asociado a acciones orientadas a generar en las empresas condiciones para crecer y hacer sostenible ese crecimiento así como mejorar su capacidad para cumplir con los estándares existentes, mientras que las tres restantes buscan mejorar a capacidad de las economías de hacer cumplir tales estándares.

Si para la etapa anterior el empresario diseñó algún tipo de plan de negocios, probablemente ahora se empieza a convertir en una herramienta de trabajo. Todo ello lo ayuda a verse consolidado en el mercado.

Como parte de su evolución, mejora su equilibrio entre lo estratégico y lo operacional. De ahí que requiera el desarrollar / fortalecer competencias no solo para su trabajo sino para lograr el trabajo de otros.

- Adaptabilidad
- Capacidad de delegar
- Comunicación efectiva
- Confianza en sí mismo
- Disciplina
- Entusiasmo
- Liderazgo
- Perseverancia
- Habilidad para el trabajo en equipo
- Habilidad para interrelacionarse
- Innovación y creatividad
- Organización
- Orientación a resultados
- Proactividad
- Responsabilidad
- Tolerancia a la frustración
- Tomador de riesgos (calculados)
- Visión de futuro

4) CONSOLIDACIÓN – empresario establecido: como empresario ya establecido y en proceso de consolidación, busca el fortalecer su producto(s) en el mercado, mediante elementos que le brinden diferenciación. El empresario está interesado en mejorar la calidad, muy probablemente tiene claridad sobre la importancia de documentar los procesos en la empresa. De ahí el inicio de un proceso de documentación y construcción de perfiles de puesto como parte de una buena práctica empresarial, de forma de minimizar las interrupciones en los procesos de la empresa.

Lo anterior puede ser resultado de una práctica de documentar procesos como mecanismo para que el equipo de trabajo pueda –por ejemplo- rotar sus puestos en el negocio, para desarrollar un equipo multifunción y mantener un flujo constante de trabajo. En esa línea ve en la capacitación para el equipo una inversión para el desarrollo de la empresa.

Aunque actúa en función del(de los) producto(s) / servicios(s) que desarrolla, su visión ya no está centrada en los bienes sino en la empresa. Ahora lo que debe posicionar en el mercado es la empresa (o la marca) más que los productos.

Para este punto, su sistema contable es profesional y cuenta con una persona (o un área) especializada para ello. Esto nos lleva a un nivel de delegación de funciones importante. Si la empresa es dinámica, la delegación y la profesionalización de los puestos son partes de una

misma idea, así como la presencia de una política activa de capacitación. En esa misma línea aparece la necesidad de contar con certificaciones que le agreguen valor a la empresa.

La empresa ya cuenta con un sitio Web informativo y de interacción (B2C y probablemente también B2B). En ese sentido, el nivel de interacción del empresario en el mercado es alto. Ello implica que cuenta con una cartera consolidada de clientes y en crecimiento. Adicionalmente también una cartera de proveedores / distribuidores de confianza a través de los cuales financia parte de la operación de la empresa.

Desde la perspectiva financiera, su nivel de crecimiento y estabilidad en el mercado también lo hace un sujeto de crédito solvente en el sistema financiero.

Cuanta con aliados estratégicos nacionales (y/o extranjeros), como parte de su estrategia de posicionamiento y crecimiento del negocio. Se encuentra en un proceso de fortalecimiento de redes: construcción de nuevos anillos en el desarrollo de las redes. Ya superó su primer anillo de equipo de confianza, y el segundo de proveedores y/o clientes, sino que hay un "tercer anillo" donde están desde la competencia, investigadores, cámaras y asociaciones, etc.

A la vez, es probable que se involucre en iniciativas de responsabilidad social como parte de una política institucional del negocio, o bien haya madurado el negocio a un nivel que le permita desarrollar el concepto de "valor compartido[18]".

Para este punto el nivel de desarrollo de sus competencias es alto tanto en el empresario como en su principal equipo de colaboradores.

- Adaptabilidad
- Capacidad de delegar
- Capacidad de persuasión
- Comunicación efectiva
- Confianza en sí mismo
- Habilidad para el trabajo en equipo
- Habilidad para interrelacionarse
- Innovación y creatividad
- Liderazgo
- Perseverancia
- Proactividad
- Responsabilidad
- Tolerancia a la frustración
- Tomador de riesgos

[18] El concepto de valor compartido (CVC) se puede definir como las políticas y las prácticas de gestión para mejorar la competitividad de una empresa y que al mismo tiempo promueve condiciones económicas y sociales en las comunidades en las que opera. Este concepto se centra en identificar y ampliar la conexión entre la sociedad y el progreso económico.

- Conocimiento técnico
- Disciplina
- Entusiasmo
- Organización
- Orientación a resultados
- (calculados)
- Visión de futuro

5) MADUREZ – empresario maduro: llegado a esta etapa, el negocio se encuentra en un franco proceso de internacionalización a mercados complejos (esto puede implicar desde su salida de un mercado local a uno regional o bien nacional o internacional). Para ello, cuenta con certificaciones adquiridas que le facilitan entrar en estos nuevos mercados.

Las alianzas estratégicas se han consolidado; puede ser parte de una cadena global de valor o por medio de alianzas estratégicas sus productos se encuentran posicionados en los mercados internacionales.

Todos los procesos del negocio se encuentran debidamente documentados. Es parte de una política sistemática de gestión del conocimiento que parte con el equipo de trabajo pero que va más allá con clientes, proveedores, y aliados que ayudan a visualizar nuevas oportunidades de mercado. Asimismo, la capacitación y el aprendizaje permanente del equipo de trabajo es una buena práctica institucionalizada.

La empresa desarrolla acciones de responsabilidad social empresarial o bien ha reorganizado la estrategia del negocio alrededor del concepto de "valor compartido". Por ello, puede ser el momento, en que el empresario considere necesario un cambio / fortalecimiento de la plana ejecutiva, en busca de ideas frescas, además de la probable diversificación productiva / de negocios.

Desde la perspectiva tecnológica, la empresa utiliza su sitio Web no solo con fines informativos sino también con propósitos de interacción y venta (*e-business, e-commerce*).

En este momento, el empresario ya no es la persona que tomada decisiones en forma solitaria, ya cuenta con un sólido equipo de trabajo y políticas de comunicación bi-direccionales que le permiten estar en contacto con todos los miembros de su equipo en todo momento. Esta es una empresa profesional sólida e innovadora.

Este es un proceso continuo por lo que el paso de una etapa a otra (la transición) es un proceso en donde encontramos prácticas de una etapa u otra. , Con fines ilustrativos se diseñó un cuadro que busca esquematizar esta caracterización (cuadro 1):

Cuadro 1: Caracterización de la Senda de Desarrollo del Empresario

Etapa 1: Empresario potencial	**Etapa 2: Empresario naciente**	**Etapa 3: Nuevo empresario**	**Etapa 4: Empresario establecido**	**Etapa 5: Empresario maduro**
• Involucrado previamente con el sector de su producto / servicio • En proceso de construcción de su producto / servicio • Definición del objetivo del negocio (diferenciación , posicionamiento) • Inicio de la asignación de recursos al proceso de diseño • Intuiciones alrededor de las definiciones estratégicas	• Conocimiento técnico (producto / servicio) más que funcional del negocio • Registros y controles informales/ Al menos un registro básico de ingresos y gastos • Emprendedor multitarea • Búsqueda de primeros clientes • Búsqueda de primeros colaboradores • Empresa preparada para asumir un tiempo de pérdida. • Desarrolla algún tipo de plan de acción (plan de negocios)	• Separa administración empresarial del presupuesto personal • Crea un nombre para comercializar • Clientela más estable, desarrolla cartera de clientes • Relación con cámaras y asociaciones • Mayor utilización o aprovechamiento de las tecnologías de información • Aumento de rentabilidad • Menor costo de operación • Conoce proveedores • Mejor rotación de inventario • Definición de estrategia de mercado • Mayor adaptabilidad a los cambios de entorno •	• Delega funciones basado en un perfil • Establecimiento de alianzas • Invierte en capacitación para sus empleados y para él mismo • Servicio de atención al cliente • Crédito a mediano plazo • Formalización plena • Optimización del uso de los recursos • Se involucra en actividades de responsabilidad social empresarial (RSE)	• Documenta procesos claves. • Diversificación de la oferta de productos, servicios o negocios • Capacitación como actividad permanente • Desarrollo de alianzas • Gestión del conocimiento y las comunicaciones • E –business • Estandarización de los procesos (p.e. ISO) • Aplicación de metodología de medición y mejora de productividad

Empresas en transición de la etapa 2 a la 3:	Empresas en transición de la etapa 3 a la 4:	Empresas en transición de la etapa 4 a la 5:
• Aumento de la clientela • Crecimiento del nivel de ventas • Empieza a percibir utilidades • Aumenta su nivel de formalización interna • Empieza a consolidar una cartera de proveedores fijos	• Consolidación del nivel de ventas • Aumenta personal • Sitio web (informativo) • Asigna recursos (presupuestariamente) a publicidad y promoción • Inicia / consolida proceso de formalización plena	• Incrementa productividad • Operaciones de compra / venta por la red (eventualmente sitio interactivo e-commerce) • Invierte en mejora de calidad / diversidad de producto(s) • Expansión territorial (regional / nacional / internacional) • Desarrolla prácticas de RSE ó CVC

Fuente: Elaboración propia.

Las acciones presentadas en el cuadro 1 anterior, no pretenden rígidas para todos los empresarios en cada etapa, sino descriptivas de la situación más frecuente. De ahí que también se incluyera un acápite de empresas en transición de una etapa a otra, cuyo propósito es darle más grados de libertad al análisis por etapas. Por ello, la intención de este apartado es capturar el caso general asociado a un proceso de aprendizaje empresarial y mostrar que este tiene cierta linealidad en el sentido que el empresario –por lo general- no "salta" etapas.

Uno de los aspectos importantes de esta descripción es que simplifica el entendimiento del proceso por el cual los empresarios que se consolidan en el mercado transitan de un estadio de desarrollo a otro, y por tanto, facilita la identificación de sus necesidades; así como sus requerimientos en cuanto a conocimientos y habilidades en cada una de estas etapas.

¿Cómo se adquieren las competencias empresariales?

Tanto en el presente ensayo como en muchas otras investigaciones respecto de las competencias / características / habilidades / actitudes / valores emprendedores, existen diferentes listas que recalcan el trabajo en equipo, la comunicación, el liderazgo, etc. Gibb (1999), Varela, (2008), Storey y otros (2008), etc., señalan la importancia de estas habilidades en el proceso emprendedor. Sin embargo, en ningún caso existe claridad respecto de cómo es que ellas se adquieren, operan e intervienen en la generación de los resultados del negocio[19]. Sin embargo es claro que su presencia facilita considerablemente el logro de los objetivos empresariales y su ausencia los limita sustancialmente. Aparentemente, es el tipo de variable que es difícil de cuantificar, pero que se reconoce cuando está presente. Sin embargo, ¿es suficiente esta observación en el ámbito del desarrollo emprendedor, o es necesario tratar de establecer una cadena que ayude a ubicarla en el proceso?

Una de las opciones analizadas en ese sentido es la que presenta el Sistema Nacional de Certificación de Competencias Laborales (Chilevalora). En los perfiles ocupacionales del gestor pyme se encuentra que a las unidades de competencias (laborales) que desarrolla, presenta –además de las actividades clave- conductas asociadas a esas actividades y ejemplos de estas, así como un cuadro con los **conocimientos** necesarios para cumplir la competencia y otro con las **habilidades** requeridas. Pero no hay nada más allá de una descripción de las mismas. En el caso del modelo de la Secretaría de Trabajo y Previsión Social (STPS) de México, en el caso de las competencias clave para la innovación en el trabajo desarrolladas, señalan que *"...en las empresas innovadoras, los trabajadores reúnen un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que les permiten promover nuevas formas de hacer las cosas y lograr un desempeño superior"*[20]. En este caso, las actitudes y valores (tales como la autonomía, la ética, el compromiso con la calidad y la mejora continua, etc.), se definen, y se hace una descripción de las mismas en términos de su uso.

[19] Más allá de comentarios asociados a que son actitudes que las personas traen, que es algo que viene de la familia, que se aprende "en la calle" (o en el trabajo), etc., no se encuentran otras explicaciones al respecto.

[20] Secretaría de Trabajo y Previsión Social - STPS (2010). Catálogo de Competencias Clave para la Innovación en el Trabajo. Gobierno Federal, mayo. Págs. 3 y siguientes.

Un aspecto señalado por Hamel y Välikangas (2003) para las épocas de turbulencia (crisis), es la capacidad de reinventar su propio modelo de negocios antes de que la circunstancias lo obliguen a hacerlo. Este señalamiento puede ser ampliado no solo desde la perspectiva del modelo de negocios sino desde la estrategia; pensando en un proceso de anticipación constante que supone construir permanentemente el futuro de la empresa y no defender su pasado. Eso supone contar con cierto conjunto de habilidades personales del empresario que le permitan prever / sortear los diferentes retos con los que se enfrentará a lo largo de la vida empresarial.

Vale la pena señalar algo que no se ha mencionado antes, y es que muchas de las habilidades con las que el empresario **entra** al mundo de los negocios están asociadas más a competencias laborales que a las empresariales. Lo anterior se debe a que esta persona, antes de ser empresario, (muy probablemente) fue un trabajador asalariado y en ese sentido, cuenta con conocimientos técnicos respecto del producto / servicio que ejecuta, más no siempre respecto de otras áreas funcionales del negocio (como administración, contabilidad, recursos humanos, etc.). Sin embargo, al conocimiento técnico también se une cierta experiencia de gestión y redes de contactos que le permiten sortear esta etapa de una manera más rápida o más fácilmente que a un empresario convencional. Al respecto, Zevallos (2007) señala en un estudio para pymes en 8 países de América Latina, que al menos la mitad de ellos tiene estudios universitarios (sean completos o no). De ahí que esa mayor educación puede asociarse también con un mayor interés por el aprendizaje.

En esa misma línea, Obando y otros (2008), muestra una relación entre los establecimientos (micro y pequeños) que realizaron innovaciones por nivel educativo del dueño, y se encontró evidencia de una relación directa entre ambas variables. Lo anterior también se asocia al tamaño del establecimiento (es decir, mientras más grande el establecimiento, es mayor la incidencia de innovaciones en el mismo).

De lo anterior, es probable que la vocación por el aprendizaje de los empresarios es una habilidad que se trae y desarrolla en cada uno de los aspectos del negocio y conforme va evolucionando la persona en su proceso emprendedor.

Por ello, para generar resultados que implican una permanente mejora en la competitividad, se requieren de habilidades y/o actitudes que antes no estaban presentes (o bien se encontraban latentes) en los empresarios, pero que deben visibilizarse en sus relaciones laborales.

6. Conclusiones.

A lo largo del documento se ha analizado la evolución del empresario en un proceso en el que cada etapa supone el superar nuevos retos y a la vez ir creciendo en el desarrollo de las competencias que –de manera iterativa- es justamente lo que permitirá sacar adelante a la empresa y posibilitará la sostenibilidad del negocio en el largo plazo. Como se ha señalado, cada una de estas etapas está asociada a ciertos hitos o eventos que permiten entender que la empresa se encuentra en una determinada etapa o en tránsito a la siguiente.

La pertinencia de entender ese proceso es fundamental para poder lograr a través del mismo, generar de un lado, las condiciones del entorno que permitan transitar con mayor facilidad hacia las siguientes etapas, y del otro, fortalecer la capacidad de respuesta de los propios empresarios respecto de las competencias necesarias para superar cada etapa.

La formalización en ese sentido, es parte del proceso de desarrollo empresarial, siendo mucho más endógeno (asociado a la evolución del empresario) que exógeno (basado en las políticas públicas o acciones de desregulación). Sin embargo, y a pesar de lo anterior es necesario que el Estado sea capaz de generar las condiciones que faciliten el proceso de formalización una vez que el empresario ha decidido llevarlo a cabo. Lo importante es que éste decide formalizarse cuando su nivel de desarrollo le permita la sostenibilidad. Y eso ocurre cuando ha desarrollado el conjunto de competencias mínimo de esa tercera etapa.

Lo anterior establece ciertas diferencias entre los empresarios que ven en el emprendedurismo "un proyecto de vida" y otros emprendedores que se encuentran en una "permanente" situación de subsistencia o los de "medio tiempo" (que tienen un trabajo asalariado y complementan su ingreso con una actividad económica independiente). De esta forma, el paso de estas etapas

determina las posibilidades de sostenibilidad del empresario y su grado de desarrollo. Como síntesis, estableceremos ciertos rasgos diferenciadores entre los empresarios "sostenibles" y los que no lo son:

- Los emprendimientos generalmente son resultado de la iniciativa individual, pero cuando ellos se hacen más complejos (dinámicos) se crea la necesidad de formar grupos o equipos de trabajo ,
- Para todos los emprendedores, la experiencia previa y la trayectoria de vida del emprendedor define una parte importante de su conducta empresarial,
- En los emprendedores existe un conocimiento empírico, un saber que no necesariamente se visibiliza en su práctica cotidiana. Este conocimiento les permite a los emprendedores "estar alertas", analizar la realidad y articularla en acciones,
- Todos los emprendedores tienen un nivel mínimo de conocimiento técnico (sobre el producto /servicio), superior especialmente en los emprendimientos dinámicos (asociados a lo tecnológico),
- Todos los emprendedores recolectan información como parte de su proceso de diseño y desarrollo del negocio. Como usan esa información es uno de los elementos que les permite a unos escalar hacia nuevos niveles de desarrollo respecto de otros ,
- Todos llegan a la empresa con un nivel de creatividad, que se modifica en función de su experiencia educativa y de vida,
- Todos llegan con una idea mercadeable, y quienes tienen la capacidad para analizar la factibilidad y potencialidad de la idea y convertirla en una propuesta de valor son los que –por lo general- hacen sostenible el negocio,
- Todos llegan a la empresa con una red de contactos (que tiene diferente utilidad si se encentra en la concepción, el nacimiento, el surgimiento, la consolidación o madurez), siempre importante en cualquier etapa del negocio,
- Generalmente se observa que los emprendedores dinámicos tienen mayor conciencia de sus debilidades (que los convencionales) y las compensan con el equipo de trabajo,
- Todos cuentan con capacidades comunicacionales (en mayor o menor medida), pero los dinámicos la utilizan más para integrar equipos,

- Saben administrar los recursos con austeridad (más que una habilidad, es una necesidad para sortear la segunda etapa, por lo que si no la tienen, probablemente no llegarán a una tercera),
- Tolerancia a la incertidumbre, a la ambigüedad y la frustración,
- Capacidad de aprender, ser flexible, trabajar sacrificadamente, tomar decisiones ejecutivas, y conforme la empresa crece, también tener la habilidad de delegar.

Lo señalado anteriormente podría ser sintetizado a partir de las funciones clave que señala la teoría de la administración (Gibson; 2000): (i) la planeación (es decir, definir los fines y determinar los medios para lograrlos), (ii) la organización (designar responsabilidades y autoridad), (iii) el liderazgo (basado en la observación, la interacción y la comunicación), y (iv) el control (para ver si los resultados son consistentes con los planes u objetivos). De esta forma, estas funciones deben estar implícitas en todos los momentos del desarrollo de la empresa, sea que los ejecute directamente el dueño de la misma, o los delegue a su equipo de trabajo. De esta forma, la evolución empresarial será función de la capacidad de evolucionar que tiene el empresario en los variados contextos de incertidumbre que enfrenta en cada una de las etapas de su proceso de desarrollo.

Bibliografía.

Amorós , J. y otros (2008). GEM Reporte Nacional de Chile 2007.

Bessant, John, Alexander, Allen, Tsekouras, George, Rush, Howard and Lamming, Richard (2012) *Developing innovation capability through learning networks* Journal of Economic Geography, 12 (5). pp. 1087-1112.

Bloom, Benjamín (1981). Taxonomía de los objetivos de la educación. Editorial El Ateneo, Buenos Aires.

CEPAL (2002). Globalización y Desarrollo. Vigesimonoveno Período de Sesiones Brasilia, Brasil 6 al 10 de Mayo de 2002. LC/G.2157(SES.29/3), Abril.

Cohen and Levinthal (1990), Absorptive Capacity: A new perspective on learning and innovation, Administrative science Quarterly. Ithaca: Vol. 35, Iss. 1; p.128

Edge Growth Website: http://www.edgegrowth.com

ESSER, K. y otros (1994). Competitividad Sistémica, competitividad internacional y políticas requeridas. Instituto Alemán de Desarrollo, Berlín.

Fogg, Helen (2012). Tracing the links between absorptive capacity, university knowledge exchange and competitive advantage in SMEs. Lancaster University Management School. Institute for entrepreneurship and Enterprise Development. The International Journal of Entrepreneurship and Innovation, Issue 1, Vol. 13,

GEM (2008). Reporte Nacional de Chile 2007. Universidad Adolfo Ibáñez y Universidad del Desarrollo.

Gibb A. (1999). "Creating an entrepreneurial culture in support of SMEs", Small Enterprise Development, Volume 10, Number 4, pp. 27-38(12), December.

Global Entrepreneurship Monitor Website. http://www.gemconsortium.org/report

Hamel, G. & Välikangas, L (2003). THE QUEST FOR RESILIENCE, *Harvard Business Review*, 81(9):52-63.

INSEAD The Business School for the World Website, Press releases 2009. http://www.insead.edu/media_relations/press_release/2009_global_innovation.cfm

Johnson, S.(2010). Where Good Ideas Come From. The natural history of innovation. Riverhead Books, Penguin Group, USA.

Kantis, H. & Drucanoff, S. (2011). Corriendo fronteras para crear y potenciar empresas. Editorial GRANICA, Management. Argentina.

Ley N° 20.267: Sistema Nacional de Certificación de Competencias Laborales de Chile.

LIFE (Learning in Informal and Formal Environments) Website: http://life-slc.org/about/about.html

Obando, J. Rojas, L. & Zevallos, E. (2008). Características de las microempresas y sus Necesidades de de Formación en Centroamérica y República Dominicana. Primera Edición, San José, C.R., Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, 288 p.

OCDE SMEs and Entrepreneurship Website: http://www.oecd.org/cfe/smes/#d.en.198094

OCDE (1994). Globalisation and Small and Medium Enterprises (SMEs). Vol. I. Synthesis Report. Paris.

OIT (2014). Panorama Laboral Temático. Transición a la Formalidad en América Latina y el Caribe. Lima: OIT, Oficina Regional para América Latina y el Caribe, 2014, 46 p.

OIT (2013). El Desafío de la Promoción de Empresas Sostenibles en América Latina y el Caribe. Un análisis regional comparativo. Oficina de Actividades para Empleadores ACT/EMP. Lima.

OIT (2002). El Trabajo Decente y la Economía Informal. Suiza.

OIT (1999), *Trabajo decente y protección para todos. Prioridad de las Américas*, Memoria del Director Regional a la 14ª Reunión Regional de los Estados miembros de la OIT en las Américas, Lima.

Porter, M. E., & Kramer, M. R. (2011). CREATING SHARED VALUE. *Harvard Business Review*, *89*(1/2), 62-77.

Secretaría de Trabajo y Previsión Social - STPS (2010). Catálogo de Competencias Clave para la Innovación en el Trabajo. Gobierno Federal, México, mayo.

Storey, David; Greene, Francis; Mole, Kevin (2008). Three Decades of Enterprise Culture. Entrepreneurship, economic regeneration and public policy. Palgrave MacMillan.

Varela, R. (2008). Innovación Empresarial, arte y ciencia en la creación de empresas. Bogotá, Pearson Education.

Villorou (2011). Competencias para empresarios de las mipyes en América Latina y el Caribe. Estudio regional. Documento de Trabajo 001, OIT. Diciembre.

World Economic Forum (2014). The Global Competitiveness Report 2014-2015. World Economic Forum, Geneva.

Zahra, S. & George, G. (2002). Absorptive Capacity: A Review, Reconceptualization, and Extension. *The Academy of Management Review,* Vol. 27, No. 2 (Apr., 2002), pp. 185-203

Zevallos, E. (2007). Restricciones del Entorno a la Competitividad en América Latina. Fundes Internacional, La Paz, Junio.

Zevallos, E. (2001). Empresa Media, una nueva clasificación. En Comercio Exterior, México, diciembre.

CAPÍTULO X

Profundidad financiera y crecimiento económico de los estados mexicanos: un análisis de relaciones integrantes en paneles no estacionarios.

Vicente Germán-Soto

Universidad Autónoma de Coahuila

Resumen

Se explora la relación entre crecimiento económico, profundidad financiera y apertura comercial en los estados mexicanos durante 2003-2012. La hipótesis es que existe una asociación positiva bidireccional entre profundidad financiera y crecimiento económico. La metodología consiste en pruebas estocásticas sobre relaciones integrantes en paneles heterogéneos no estacionarios y en la estimación del vector de corrección de errores (VECM) que recoge la relación de equilibrio. Los resultados confirman la hipótesis, hay presencia de relaciones integrantes, pero no se observan impactos significativos de la apertura comercial sobre el desarrollo financiero, lo que puede explicar el escaso crecimiento de los últimos años.

Clasificación JEL: C33, G00, O11

Palabras clave: crecimiento económico, profundidad financiera, paneles no estacionarios

1. Introducción

Hoy en día la mayoría de las economías desarrolladas y en desarrollo llevan a cabo estrategias de producción acentuadas en las relaciones comerciales y financieras internacionales, prueba de ello es que en las últimas décadas muchos países han reducido sustancialmente sus tarifas arancelarias y casi cualquier otro tipo de barrera comercial con el exterior. Asimismo, se han celebrado una multitud de tratados de libre comercio buscando fortalecer la economía, la atracción de capitales, la generación de empleos, la absorción de tecnología moderna y la participación más activa del escenario mundial (Loayza, et al. 2007).

México, en particular, es un buen ejemplo de cómo una economía se abre vertiginosamente al comercio internacional. Desde inicios de los ochentas y prácticamente en unos cuantos años el país eliminó gran parte de las barreras aduanales, las cuotas a la importación, los aranceles y redujo sustancialmente los subsidios a las exportaciones. La idea era fortalecer la economía y aprovechar las ventajas que la liberalización comercial y financiera representaban para el crecimiento, el consumo, el empleo y el bienestar (Hanson, 1998; Esquivel y Rodríguez-López, 2003). En poco tiempo el país pasó de ser una economía apoyada en el mercado interno a otra donde el mercado externo es esencial para crecer.

Como resultado, algunos indicadores macroeconómicos mejoraron visiblemente en las últimas décadas. Por ejemplo, existe ahora un mayor control del crecimiento de los precios (en 1980 la tasa de inflación fue del 30%, de 8.9% en el 2000 y del 4.4% en el 2010), el valor de la moneda se ha mantenido más estable (desde el año 2000 el tipo de cambio se ha situado entre 10 y 13 pesos)[1], se ha mejorado el manejo y control de la oferta monetaria (Garcés Díaz, 2002), las exportaciones de bienes y servicios, como porcentaje del PIB, se han incrementado del 10.7% en 1980 al 32.6% en 2010.[2] Los flujos de inversión foránea han crecido de forma importante, entre 1980 y 1990 lo hicieron a una tasa anual muy baja del 2%, mientras que entre 1990 y 2000 se promedió una tasa del 55%, después del 2000 ha habido incrementos más moderados, sin embargo entre 1980 y 2010 el crecimiento promedio fue del 32%.[3]

Esta descripción estadística sugiere que desde que se liberalizó el comercio internacional se ha reducido la volatilidad de las variables macroeconómicas relacionadas al sector real, lo que es favorable al desarrollo económico, ya que menor volatilidad genera certidumbre a los inversionistas, sin embargo, se ha incrementado en variables del sector externo (Germán-Soto, 2015).

Otra consecuencia es que tanto la productividad como el desempeño económico dependen cada vez más de los servicios, en especial de los servicios financieros, de las ganancias derivadas de la apertura comercial, de la instalación de empresas extranjeras, del estímulo a las exportaciones, de las adopciones de innovación tecnológica, entre otros.

Mientras que así se mueve el país en el escenario internacional, ¿cuál será la dinámica subrayada a nivel regional?, ¿qué tan vinculadas se hallan las variables financieras y económicas entre sus

[1] Cálculos propios a partir de datos de inflación y tipo de cambio del Banco de México.
[2] Cálculos propios a partir de datos del Banco Mundial.
[3] Cálculos propios con datos del Banco Mundial.

regiones integrantes?, ¿cuáles son los impactos a corto y a largo plazo de las variables financieras sobre el crecimiento económico regional? Responder a estas interrogantes puede ser fundamental para entender si el mayor (o menor) posicionamiento del sector financiero ha significado también mayor (menor) crecimiento de las regiones. Es decir, para saber si en el contexto regional ha funcionado la conexión entre profundidad financiera, apertura comercial y crecimiento económico.

En este trabajo se explora la solidez de este vínculo macroeconómico investigando si un determinado conjunto de variables financieras y económicas se hallan o no integradas. En específico, se analiza si en el conjunto de los estados mexicanos se hallan integradas la profundidad financiera, el tamaño del sector financiero, el tamaño de la economía, la apertura comercial y el crecimiento económico durante 2003-2012. Con este propósito se aplican métodos de integración diseñados para contextos de relaciones multivariadas estocásticas en las que los paneles pueden ser homogéneos o heterogéneos. Pedro ni (1995 y 1999) analizó las propiedades de regresión espuria y generó pruebas sobre la hipótesis nula de no integración tanto en paneles homogéneos como heterogéneos. El autor también proporciona las distribuciones asintóticas de los estadísticos para los diversos casos de dinámicas heterogéneas: regresares endógenos, efectos fijos, procesos con constante y tendencias deterministas, entre otros.

En algunas aplicaciones el estudio de las regresiones integrantes involucra un solo regresar y además se asume que la raíz autor regresiva es común entre los miembros del panel. Sin embargo, en otros casos es más razonable pensar en la presencia de más de un regresar y además que los paneles son heterogéneos. Pedro ni (1995) elaboró pruebas para vectores integrantes homogéneos, pero en un contexto de paneles con regresares exógenos. Cao (1999) analizó un caso especial de homogeneidad de vectores integrantes, pero en el que existe endogeneidad de los regresores. Maddala y Wu (1999) proponen la prueba de Fisher en un enfoque de cointegración que combina pruebas individuales de corte transversal para obtener la prueba de panel, en el mismo sentido que la prueba de cointegración de Johansen. Trabajos como los de Pedroni (1999 y 2004) flexibilizan el supuesto de homogeneidad y presentan los valores críticos para paneles no estacionarios en los que puede haber heterogeneidad importante y presencia de más de un regresor en el vector cointegrante, lo que puede ser atractivo para investigar cointegración de panel, ya que a menudo los vectores cointegrantes no son estrictamente homogéneos. De acuerdo con Pedroni (1999), algunos mecanismos que pueden influir en la heterogeneidad son los costos

de transporte, los diferenciales de productividad, los errores de medida, entre otros, los que al estar conectados en una estructura de panel es posible que generen variaciones de significación entre las diferentes unidades de corte transversal. Así, la posibilidad de relaciones cointegrantes heterogéneas puede ser un resultado palpable aún en contextos regionales o entre unidades geográficas más similares.

Las pruebas de panel han ganado popularidad dentro del enfoque estocástico porque se ha demostrado que presentan mayor poder para rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria. Sin embargo, debido a que las dinámicas de evolución de las variables no son las mismas, ni tampoco el conjunto de regiones que conforman el panel son homogéneas, difícilmente se puede aceptar que el vector cointegrante sea también el mismo para cada unidad de corte transversal. Además, en cualquier conjunto de variables puede existir más de una relación cointegrante. Por tanto, será interesante aplicar la batería de pruebas y las formas funcionales que adopta el proceso generador de datos (PGD) para saber si hay o no alguna relación de equilibrio entre las variables financieras y económicas a nivel de los estados mexicanos. Este es el guion del presente capítulo.

Algunos resultados en avance subrayan una relación bidireccional entre crecimiento económico y profundidad financiera pero no hay evidencia de causalidad con la apertura comercial. Mientras que las relaciones cointegrantes bivariadas son muy fuertes y consistentes a los diferentes supuestos sobre el PGD entre crecimiento económico y las variables relacionadas al desarrollo financiero, especialmente con la profundidad financiera, pero son más débiles con la apertura comercial. Los efectos positivos y de largo plazo entre crecimiento económico y profundidad financiera son confirmados en un modelo de vectores autorregresivos con corrección de errores.

Con la introducción como primera parte, el trabajo se estructura en seis secciones. En la sección 2 se expone la teoría y metodología de la cointegración en paneles no estacionarios, también se especifica el modelo empírico de investigación. La sección 3 describe los datos y las variables que integran el panel. La sección 4 presenta y analiza las estimaciones de los vectores cointegrantes de panel. La sección 5 comenta sobre los resultados del modelo de vectores con corrección de error y las conclusiones se desarrollan en la sección 6.

2. La teoría de la cointegración en paneles no estacionarios y especificación del modelo.

2.1. Paneles no estacionarios y cointegración.

El enfoque básico de la econometría de datos de panel ha dado un giro sustancial desde que se ha hecho disponible una mayor cantidad de información sobre series de tiempo. Este punto de inflexión lleva la atención sobre tres aspectos fundamentales de la información de panel: heterogeneidad, correlación serial y no estacionariedad.

Los estimadores tradicionales de datos de panel pueden albergar potenciales sesgos si sus elementos de corte transversal en realidad son heterogéneos, los regresores están serialmente correlacionados y las variables presentan propiedades estadísticas no estacionarias (Baltagi y Kao, 2000, Breitung y Pesaran, 2008 y Baltagi, 2008, entre otros).

Para entender las bases de la teoría de la cointegración, considere el siguiente caso simplificado de una ecuación de panel:

$$y_{i,t} = \lambda_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad \text{con } i = 1, 2, ..., N; t = 1, 2, ..., T \qquad (1)$$

Si $\lambda_i = 1$ entonces se tiene el caso de raíz unitaria de panel, es decir, el panel es no estacionario. Como consecuencia de que no se puede estimar por mínimos cuadrados ordinarios, para probar la hipótesis de raíz unitaria, la ecuación (1) se manipula para obtener:

$$\Delta y_{i,t} = \rho_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad \text{con } i = 1, 2, ..., N; t = 1, 2, ..., T \qquad (2)$$

donde $\rho_i = (\lambda - 1)$, y es la variable de interés en la que se está interesado en probar si es estacionaria, Δ es el operador de primeras diferencias, N es el número total de observaciones de corte transversal y T es el número total de periodos temporales que conforman el panel. En general, interesa probar si:

$$H_0 : \rho_i = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \rho_i < 0 \ \text{ para } i = 1, 2, ..., N; \qquad (3)$$

Para ello se han sugerido diversas pruebas de cointegración de panel, sin embargo, todas ellas descansan en la teoría descrita por la ecuación (2), solamente difieren en el tratamiento que hacen de la correlación entre las unidades de corte transversal y en si permiten o no heterogeneidad en los coeficientes cointegrantes. Además, algunas pruebas implican bajo las hipótesis nula y alternativa que todas las relaciones están cointegradas o que todas las relaciones están no cointegradas, mientras que algunas otras admiten que algunas relaciones puedan estar cointegradas mientras que otras no necesariamente. En cada escenario los p-values y los valores críticos pueden ser distintos.

Pedroni (1999) propone una prueba de cointegración para paneles no estacionarios que puede aplicarse tanto a relaciones bivariadas como a relaciones conjuntas, así como también asumiendo

tanto homogeneidad como heterogeneidad en panel. Bajo la hipótesis nula de no cointegración ($\rho_i = 1$), la prueba que el autor propone tiene la siguiente forma:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \delta_i t + \beta_{1i} x_{1i,t} + \beta_{2i} x_{2i,t} + ... + \beta_{Mi} x_{Mi,t} + \varepsilon_{i,t}$$
$$\text{con } i = 1, 2, ..., N; t = 1, 2, ..., T; m = 1, 2, ..., M \qquad (4)$$

En la expresión (4) M se refiere al número de variables regresoras, los coeficientes de pendientes varían en cada unidad de corte transversal, α_i es el intercepto, o parámetro de efectos fijos, el cual también varía entre cada miembro del panel. Además, algunas propiedades deterministas como la tendencia lineal son capturadas por el término $\delta_i t$. La especificación (4) puede ser modificada para incluir o excluir la constante, el término de tendencia lineal o ambos. Pedroni (1999, 2004) reporta los valores críticos y la distribución asintótica para cada uno de estos escenarios y diversos tamaños de muestra.

Otros contrastes de cointegración en paneles no estacionarios son los desarrollados por Kao (1999) y Maddala y Wu (1999). Aquí, al igual que en el resto, el enfoque estándar es la estimación de los residuos desde alguna forma funcional como la descrita en (4) y después se analizan para determinar si son I(1) mediante una regresión auxiliar que toma la siguiente forma:

$$\varepsilon_{i,t} = \rho_i \varepsilon_{i,t-1} + u_{i,t} \qquad (5)$$

o a través de la ecuación (6) en el caso de que $u_{i,t}$ de la ecuación (5) esté correlacionado:

$$\varepsilon_{i,t} = \rho_i \varepsilon_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \varsigma_{ij} \Delta \varepsilon_{i,t-j} + \upsilon_{i,t} \qquad (6)$$

La ecuación (6) es la estructura sugerida por la prueba Dickey-Fuller ampliada (ADF) para series univariantes. Pedroni (1999) maneja dos hipótesis alternativas: la homogénea, en la que ($\rho_i = \rho$) < 1 para todo i y la heterogénea, en la que ($\rho_i < 1$) para todo i. Para contrastar este conjunto de hipótesis Pedroni (1999) define cuatro pruebas diferentes para el caso de la hipótesis de homogeneidad: la razón de varianzas (denominado v), los estadísticos no paramétricos de Phillips y Perron (ρ y PP) y el estadístico τ de Dickey-Fuller ampliado (ADF). En el caso de la heterogeneidad en panel solamente se utilizan los últimos tres. La definición y características de cada uno de estos siete estadísticos se pueden consultar en la Tabla 1 de Pedroni (1999).

En la prueba de Kao (1999) se permite que el intercepto varíe en cada miembro del panel, pero no los coeficientes de pendiente y, además, excluye los coeficientes de tendencia. La regresión

auxiliar es la misma que en (6) excepto que ρ no varía y su valoración está basada en la prueba *ADF*.

Maddala y Wu (1999) proponen un contraste, basado en la prueba de Fisher para valorar la significancia de un conjunto de eventos independientes. De acuerdo con el análisis de sensibilidad que realizan esta estrategia resulta más atractiva en situaciones de panel donde los errores de las unidades de corte transversal se hallan correlacionados (un contexto que es muy común en la práctica). Además, los autores presentan estudios Monte Carlo que demuestran que esta prueba se desempeña mejor cuando la base de datos incluye series estacionarias y no estacionarias.

Definiendo π_i como el *p*-ésimo valor de la prueba de cointegración de la *i*-ésima unidad de corte transversal, entonces bajo la hipótesis nula de no cointegración de panel los autores calculan el estadístico de Fisher como:

$$MW = -2\sum_{i=1}^{N}\log(\pi_i) \rightarrow \chi^2_{2N} \qquad (7)$$

el cual es aproximado a una distribución χ^2. Al ser una prueba no paramétrica no necesita satisfacer el supuesto de una distribución normal en media y varianza requerido por la distribución *t* y no tiene restricciones de tamaño de muestra (Maddala y Wu, 1999).

2.2. El modelo de corrección de errores (VECM)

Un modelo de corrección de errores es un modelo de vectores autorregresivos (VAR) especialmente diseñado para cuando las series son no estacionarias pero que pueden estar cointegradas. Su principal atractivo radica en la estimación de la conducta de largo plazo de las variables que son potencialmente endógenas (en las que tampoco es posible saber a priori su exogeneidad) al mismo tiempo que permite estimar las relaciones cointegrantes mediante correcciones de error en el corto plazo. De ahí su nombre, corrección del error, ya que cualquier desviación desde el equilibrio es ajustado gradualmente.

En general, el VECM es un sistema de variables cointegrantes en primeras diferencias que busca establecer la dinámica de corto plazo y las relaciones cointegrantes del conjunto de variables:

$$\mathbf{\Delta Y_t = \alpha EC_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta Y_{t-2} + ... + \Gamma_p \Delta Y_{t-p} + \varepsilon_i} \qquad (8)$$

donde $\mathbf{\Delta Y_t}$ es una matriz de variables potencialmente endógenas en primeras diferencias, $\mathbf{\Gamma}$'s son matrices de parámetros de corto plazo, $\boldsymbol{\alpha}$ es una matriz de parámetros de ajuste que refleja la

dinámica de transición al equilibrio y $\mathbf{ECT_{t-1} = \beta Y_{t-1}}$ es una matriz de términos de corrección del error en la que β a su vez es una matriz de parámetros de largo plazo que captura las relaciones cointegrantes entre las variables.

2.3. Especificación empírica del modelo.

Para investigar el vínculo entre crecimiento económico y profundidad financiera se define un panel de datos conformado por los 32 estados mexicanos y cinco variables que pueden estar muy relacionadas: crecimiento económico, profundidad financiera, tamaño del sector servicios financieros, tamaño de la economía y un indicador de apertura comercial.

Desde una perspectiva teórica las economías con mayor desarrollo financiero tienden a experimentar mayores tasas de crecimiento. El tamaño de los servicios financieros y de la economía pueden también ser factores potenciales que influyan en el crecimiento económico de un país. Finalmente, de acuerdo con las tendencias de liberalización comercial de la actualidad, la mayor apertura comercial debería corresponderse con tasas de crecimiento económico más elevadas, de lo contrario los países podrían cambiar de modelo a uno menos abierto o más protegido.

Mientras que estas relaciones pueden ser en teoría claras, la dirección de los efectos no es tan evidente en la práctica. Por tanto, una primera tarea será evaluar la relación de causalidad que hay entre este conjunto de variables con el crecimiento económico. Con este fin se llevan a cabo pruebas de causalidad en el sentido de Granger de la siguiente forma:

$$y_{i,t} = \alpha_0 + \alpha_1 y_{i,t-1} + ... + \alpha_l y_{i,t-l} + \beta_1 y_{i,t-l} + ... + \beta_l x_{-l} + \varepsilon_{i,t}$$

$$x_{i,t} = \alpha_0 + \alpha_1 x_{i,t-1} + ... + \alpha_l x_{i,t-l} + \beta_1 y_{i,t-l} + ... + \beta_l y_{-l} + u_{i,t}$$

Para cada ecuación del sistema anterior, el estadístico Wald es usado para probar la hipótesis conjunta:

$$\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_l = 0$$

Toda y Yamamoto (1995) sugirieron que si las variables son no estacionarias entonces las pruebas de causalidad de Granger dejan de ser válidas, ya que asumen que son estacionarias. Cuando hay no estacionariedad los autores sugieren estimar un modelo VAR con (k+d_{max}) rezagos, donde k es el rezago óptimo y d_{max} es el máximo orden de integración del proceso.

Posteriormente, se llevan a cabo las pruebas de cointegración diseñadas para paneles no estacionarios tanto para relaciones bivariadas como multivariadas y las diferentes funciones deterministas asumidas en el PGD.

Finalmente, la estrategia conduce a estimar un VECM que toma la siguiente forma empírica:

$$\Delta \mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{TCPEBpc}, \Delta \mathbf{Prof_Finan}, \Delta \mathbf{Tam_Serv_Finan}, \\ \Delta \mathbf{Tam_Econ}, \Delta \mathbf{APERTURA} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

donde Δ es el operador de primeras diferencias, **TCPEBpc** es la tasa de crecimiento del producto estatal bruto, **Prof_Finan** es la profundidad financiera, **Tam_Serv_Finan** es el tamaño del sector servicios financieros, **Tam_Econ** es una medida del tamaño de la economía y **APERTUR**A es la variable indicadora del grado de apertura comercial de las economías estatales. La definición y detalle sobre la construcción de cada variable se explica a continuación.

3. Datos, variables y elección del periodo de análisis: los estados mexicanos.

El ejercicio empírico corresponde al contexto de los estados mexicanos durante el periodo 2003-2012. Por tanto, el panel está integrado por N = 32 y T = 10, es decir, un total de 320 observaciones, aunque en realidad se trabaja con 256 observaciones debido a la pérdida de un valor temporal al calcular la tasa de crecimiento económico. La elección del periodo de análisis es por razones prácticas, ya que únicamente para este corte temporal fue posible reunir información homogénea y comparable sobre el conjunto de variables requeridas para estudiar la relación entre crecimiento económico y desarrollo financiero a nivel de entidad federativa de México.

La descripción de variables y fuentes de información de este estudio son como sigue. El crecimiento económico se mide con el producto estatal bruto por habitante (PEBpc). El PEB es usado a precios constantes de 2008 y es publicado por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI), mismo que puede ser consultado desde su portal de la red internet (www.inegi.org.mx), mientras que la población por estado se obtuvo del Consejo Nacional de Población (Conapo, www.conapo.gob.mx) y corresponde a estimaciones y proyecciones de este organismo para el periodo de estudio. Con estas dos variables básicas se construyó el PEBpc y su tasa de crecimiento anual (TCPEBpc), la cual finalmente es usada como proxy del crecimiento económico experimentado por los estados del país.

Como profundidad financiera se entiende a la razón entre captación bancaria comercial y PEB, ambos publicados por INEGI. La captación bancaria corresponde a la denominada en los anuarios estadísticos de INEGI como "tradicional", es decir, la que corresponde a los depósitos bancarios tanto en moneda nacional como extranjera. El tamaño del sector servicios se mide mediante la razón entre el total de producción del sector servicios financieros e inmobiliarios y el PEB, medidos ambos a precios constantes de 2008. El tamaño de la economía es la participación relativa de producto estatal a nacional (a precios constantes de 2008).

Finalmente, el indicador de apertura comercial se mide con la relación entre la exportación estatal de mercancías (minería e industria manufacturera) y el PEB, también publicada por INEGI (2014) para el periodo 2007-2012. Para los años de 2003 a 2006 las exportaciones estatales se estimaron asumiendo que en esos años existió la misma relación entre producto estatal y nacional. En general, se observa que la relación prácticamente no varió durante el periodo con cifras disponibles (2007-2012), por lo que ésta debe ser una buena aproximación.

Una vez expresadas en términos logarítmicos, en el Cuadro 1 se muestran algunas estadísticas básicas del conjunto de variables. Se destacan asimetrías importantes en la base de datos principalmente para las variables tamaño del sector servicios financieros, profundización financiera y tasa de crecimiento del producto per cápita.

Cuadro 1. Estadísticas descriptivas de la base de datos.

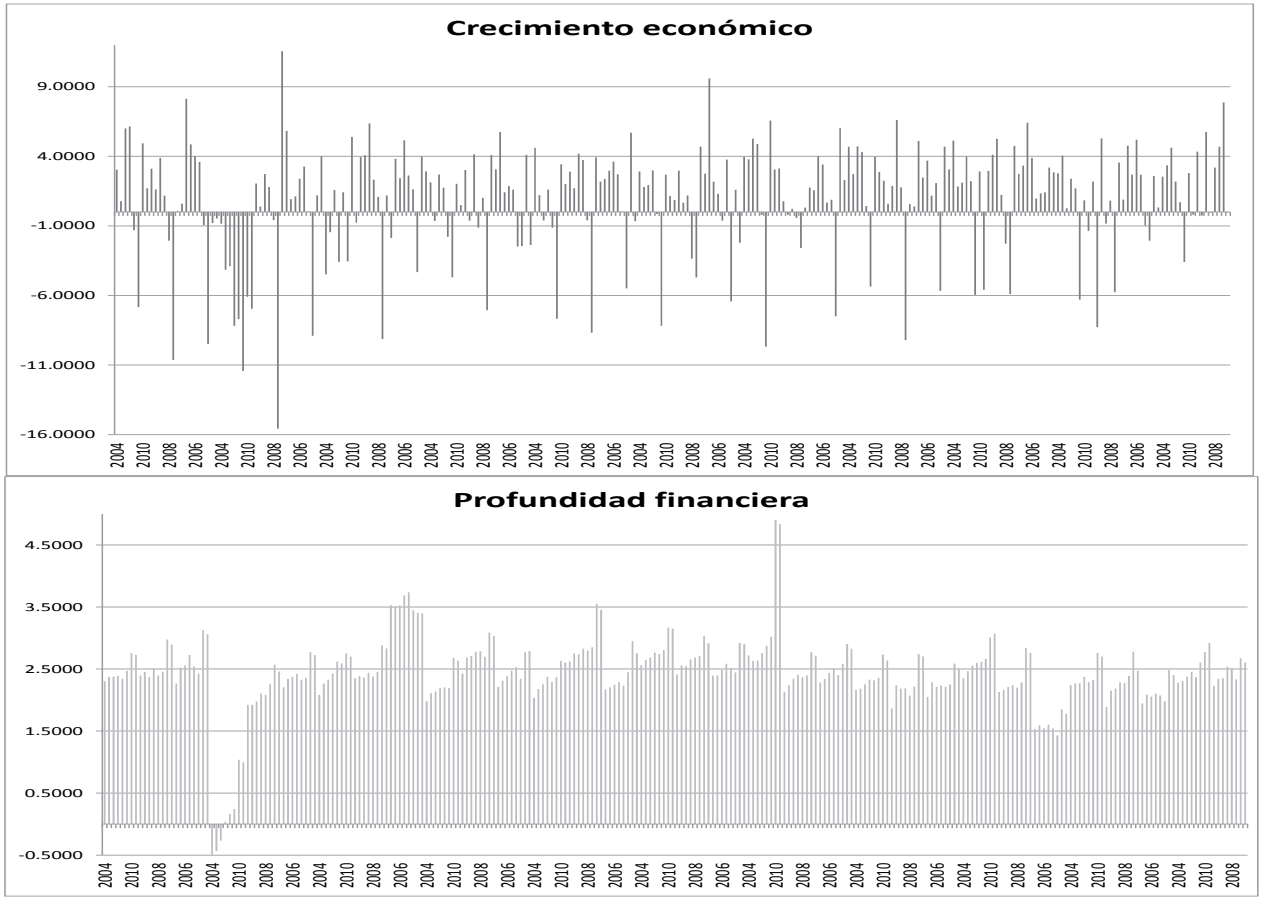
	TCPEBpc	Prof_Finan	Tam_Serv_Finan	Tam_Econ	Apertura
Media	0.916	2.434	2.657	0.785	-0.125
Valor máximo	11.562	4.904	3.153	2.841	2.456
Valor mínimo	-15.577	-0.512	0.028	-0.618	-4.059
Asimetría	-1.099	-1.286	-4.030	0.358	-0.590
Kurtosis	4.537	11.774	20.960	2.809	2.630
Correlaciones parciales					
TCPEBpc	1				
Prof_Finan	0.23	1			
Tam_Serv_Finan	0.19	0.77	1		
Tam_Econ	-0.01	0.04	-0.20	1	
Apertura	-0.03	-0.17	-0.21	0.28	1

Fuente: elaboración propia.

El grado de correlación es más elevado entre crecimiento económico y profundidad financiera así como con el tamaño del sector servicios financieros. Otras correlaciones fuertes son entre el tamaño del sector servicios financieros y profundidad financiera, como es de esperarse. También sobresale una correlación positiva entre apertura y tamaño de la economía, lo que parece indicar que las economías más grandes también tienden a tener mayor relación comercial con el exterior. Sin embargo, hay correlaciones débiles y negativas del crecimiento económico con el tamaño de la economía y con el indicador de apertura comercial. Es interesante la correlación negativa de la apertura comercial con dos de las medidas del desarrollo financiero: profundidad financiera y tamaño del sector servicios financieros. Esta observación parece sugerir que aquellos estados con mayor volumen de exportaciones no necesariamente exhiben mayor desarrollo financiero.

La representación visual del crecimiento económico y la profundidad financiera mostradas en la Gráfica 1 señala que ambas han tendido a crecer durante el periodo de análisis, sin embargo el desempeño económico de los estados se observa más errático y heterogéneo que la profundidad financiera.

Gráfica 1. Crecimiento económico y profundidad financiera (total de observaciones).



4. Estimación e inferencia sobre vectores cointegrantes de panel.

La relación entre profundidad financiera y crecimiento económico se aborda, tal y como se discutió en la sección 2, estudiando primero el contexto de causalidad entre las variables, después se conducen pruebas de cointegración a relaciones bivariadas bajo los supuestos de que hay homogeneidad y heterogeneidad en panel, finalmente se examina la cointegración a relaciones multivariadas. Para complementar la evidencia se estiman, además, las pruebas de cointegración de Kao y Maddala y Wu.

Los cuadros 2 al 5 reportan los resultados de causalidad (en el sentido de Granger) entre crecimiento económico y cada una de las variables que integran este estudio: profundidad financiera, tamaño del sector servicios, tamaño de la economía y el indicador de apertura comercial.

En todos los casos se estiman dos tipos de pruebas de causalidad: la prueba estándar de Granger y la alternativa de Toda y Yamamoto (1995). La segunda de las pruebas tiene la ventaja de que es más eficiente cuando las variables son no estacionarias. Debido a la sensibilidad que presentan los contrastes al número de rezagos usados en su estimación se reportan resultados hasta con cinco de ellos y la selección del rezago óptimo se basa en el criterio de información de Schwarz (CIS).

Se aprecia que la evidencia de causalidad es abrumadora, incluso bidireccional, en casi todos los casos del crecimiento económico con profundidad financiera y tamaño del sector servicios financieros, lo que contrasta con la escasa evidencia entre crecimiento económico con tamaño de la economía y la apertura comercial.

El análisis de los resultados con el procedimiento de Toda y Yamamoto sugiere que entre crecimiento económico y profundidad financiera existe una causalidad bidireccional. La evidencia de una relación en ambos sentidos es robusta a cualquier cantidad de rezagos usados, sin embargo, de acuerdo al CIS sólo es necesario un rezago.

En los resultados del Cuadro 3 el sentido de la causalidad, a juzgar por el CIS, va solamente del tamaño del sector servicios financieros al crecimiento económico, ya que la hipótesis de que el tamaño del sector servicios financieros no causa crecimiento económico (H1) es rechazada (véase procedimiento de Toda y Yamamoto en el rezago 3), mientras que se acepta que el crecimiento económico no causa el tamaño del sector servicios financieros (H2 y rezago 1 de la prueba de Toda y Yamamoto).

Cuadro 2. Resultados de causalidad entre crecimiento económico y profundidad financiera.

	Prueba de causalidad de Granger		Procedimiento de Toda y Yamamoto				
	H1	H2	H1	CIS	H2	CIS	g.l.
Rezago 1	11.51 ***	109.90 ***	**11.50 *****	**-0.65**	**109.90 *****	**5.65**	224
	(0.0008)	(0.0000)	**(0.0007)**		**(0.0000)**		
Rezago 2	6.57 ***	60.323 ***	13.14 ***	-0.59	120.64 ***	5.78	192
	(0.0017)	(0.0000)	(0.0014)		(0.000)		
Rezago 3	6.26 ***	31.79 ***	18.79 ***	-0.39	95.37 ***	5.86	160
	(0.0005)	(0.0000)	(0.0003)		(0.0000)		
Rezago 4	7.33 ***	23.77 ***	29.32 ***	-0.19	95.08 ***	5.77	128
	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)		(0.0000)		
Rezago 5	4.88 ***	7.46 ***	24.42 ***	0.08	37.31 ***	6.06	96
	(0.0006)	(0.0000)	(0.0002)		(0.0000)		

Fuente: estimaciones propias. *** indica significancia al 1% o menos.
Notas: el coeficiente reportado es el estadístico Wald. P-values entre paréntesis.
H1: ln(Profundización financiera) no causa-Granger ln(crecimiento económico).
H2: ln(crecimiento económico) no causa-Granger ln(Profundización financiera).
CIS = criterio de información de Schwarz; g.l. = grados de libertad.

Cuadro 3. Resultados de causalidad entre crecimiento económico y tamaño del sector servicios financieros.

	Prueba de causalidad de Granger		Procedimiento de Toda y Yamamoto				
	H1	H2	H1	CIS	H2	CIS	g.l.
Rezago 1	15.56 ***	2.36	15.56 ***	-3.91	**2.36**	5.63	224
	(0.000)	(0.125)	(0.000)		**(0.123)**		
Rezago 2	23.05 ***	17.35 ***	46.11 ***	-4.04	34.71 ***	5.63	192
	(0.000)	(0.000)	(0.000)		(0.000)		
Rezago 3	12.73 ***	14.88 ***	**38.20 *****	-4.18	44.64 ***	5.76	160
	(0.000)	(0.000)	**(0.000)**		(0.000)		
Rezago 4	11.79 ***	12.96 ***	47.18 ***	-3.96	51.85 ***	5.66	128
	(0.000)	(0.000)	(0.000)		(0.000)		
Rezago 5	8.80 ***	6.08 ***	44.03 ***	-3.61	30.41 ***	5.89	96
	(0.000)	(0.000)	(0.000)		(0.000)		

Fuente: estimaciones propias.
Notas: el coeficiente reportado es el estadístico Wald. P-values entre paréntesis.
H1: ln(Sector servicios financieros) no causa-Granger ln(crecimiento económico).
H2: ln(crecimiento económico) no causa-Granger ln(Sector servicios financieros).
CIS = criterio de información de Schwarz; g.l. = grados de libertad.

Se llega a la misma conclusión sobre la relación entre crecimiento económico y tamaño de la economía (Cuadro 4), mientras que no hay evidencia de causalidad en ningún sentido entre

crecimiento económico y apertura comercial (Cuadro 5), ya que no es posible rechazar las hipótesis nulas en ninguna de las alternativas ensayadas de esta última relación de variables.

Cuadro 4. Resultados de causalidad entre crecimiento económico y tamaño de la economía.

	Prueba de causalidad de Granger		Procedimiento de Toda y Yamamoto				
	H1	H2	H1	CIS	H2	CIS	g.l.
Rezago 1	0.04	8.25 ***	0.04	5.70	8.25 ***	-4.29	224
	(0.835)	(0.004)	(0.835)		(0.004)		
Rezago 2	3.17 **	0.60	6.34 **	5.82	**1.20**	-4.33	192
	(0.044)	(0.548)	(0.042)		**(0.547)**		
Rezago 3	4.43 ***	1.71	13.29 ***	5.90	5.15	-4.21	160
	(0.005)	(0.165)	(0.004)		(0.160)		
Rezago 4	8.74 ***	1.80	34.99 ***	5.74	7.23	-4.12	128
	(0.000)	(0.131)	(0.000)		(0.124)		
Rezago 5	25.18 ***	1.70	**125.93 *****	5.41	8.51	-3.87	96
	(0.000)	(0.143)	**(0.000)**		(0.130)		

Fuente: estimaciones propias.
Notas: el coeficiente reportado es el estadístico Wald. P-values entre paréntesis.
H1: ln(tamaño de la economía) no causa-Granger ln(crecimiento económico).
H2: ln(crecimiento económico) no causa-Granger ln(tamaño de la economía).
CIS = criterio de información de Schwarz; g.l. = grados de libertad.

Cuadro 5. Resultados de causalidad entre crecimiento económico y apertura comercial.

	Prueba de causalidad de Granger		Procedimiento de Toda y Yamamoto				
	H1	H2	H1	CIS	H2	CIS	g.l.
Rezago 1	0.22	1.68	**0.22**	5.70	**1.68**	-0.43	224
	(0.638)	(0.195)	**(0.637)**		**(0.193)**		
Rezago 2	4.64 **	2.05	9.28 ***	5.80	4.10	-0.27	192
	(0.011)	(0.131)	(0.009)		(0.128)		
Rezago 3	3.63 **	1.67	10.91 **	5.91	5.01	-0.06	160
	(0.014)	(0.175)	(0.012)		(0.171)		
Rezago 4	2.10 *	2.20 *	8.42 *	5.93	8.83 *	0.19	128
	(0.084)	(0.072)	(0.077)		(0.065)		
Rezago 5	1.77	2.75 **	8.87	6.21	13.78 **	0.13	96
	(0.126)	(0.023)	(0.114)		(0.017)		

Fuente: estimaciones propias.
Notas: el coeficiente reportado es el estadístico Wald. P-values entre paréntesis.
H1: ln(apertura comercial) no causa-Granger ln(crecimiento económico).
H2: ln(crecimiento económico) no causa-Granger ln(apertura comercial).
CIS = criterio de información de Schwarz; g.l. = grados de libertad.

El análisis de cointegración con técnicas de paneles estocásticos se lleva a cabo para los diferentes estadísticos de prueba discutidos antes (v, ρ, *PP* y *ADF*). Con el fin de tomar en cuenta las sugerencias de algunos autores (véase Pedroni, 1999, entre otros) de que en la práctica puede ser poco probable que los vectores cointegrantes de un panel sean estrictamente homogéneos, las pruebas de cointegración de relaciones bivariadas se llevan a cabo tanto para paneles homogéneos como heterogéneos. Además, en algunas aplicaciones económicas las relaciones entre variables pueden implicar contextos multivariados, en tal caso la hipótesis de la cointegración debe investigarse para un conjunto de variables y no necesariamente desde una visión univariada o bivariada. En los cuadros 6 (relaciones bivariadas bajo el supuesto de homogeneidad en panel), 7 (relaciones bivariadas bajo el supuesto de heterogeneidad en panel) y 8 (la hipótesis multivariada) se presentan los resultados de cointegración de panel con estos distintos enfoques metodológicos.

Debido a que no existe un conocimiento explícito sobre la función determinista que dio origen a las variables, se ha preferido estimar las pruebas de cointegración bajo los distintos supuestos del PGD: (1) ausencia de constante y tendencia lineal, (2) solamente constante y (3) bajo el supuesto de que evolucionan alrededor de constante y tendencia lineal.

A pesar de que los diferentes estadísticos de prueba no llegan a un consenso sobre las conclusiones de cointegración entre las diferentes relaciones bivariadas, es posible destacar algunas conclusiones generales de los cuadros 6, 7 y 8. Por ejemplo, tanto en el contexto de homogeneidad como en el de heterogeneidad en panel, la hipótesis nula de no cointegración es ampliamente rechazada en las relaciones bivaridas del crecimiento económico con cada una de las otras variables.

Este resultado es incluso consistente en los tres PGD ensayados. El hallazgo contrasta con los resultados obtenidos para las relaciones bivariadas entre profundidad financiera, tamaño de la economía, tamaño del sector servicios financieros y apertura comercial. En la mayoría de estos ejemplos las pruebas no logran rechazar la hipótesis nula de no cointegración (véase parte inferior de los cuadros 6 y 7). La evidencia de cointegración para este conjunto de variables solamente es significativa, aunque no es general entre los contrastes, en la especificación que incluye constante y tendencia. En la mayoría de los casos el contraste ρ es el que estima una cantidad menor de rechazos.

Cuadro 6. Pruebas de cointegración a relaciones bivariadas (homogeneidad en panel).

		No constante ni tendencia			Solo constante			Constante y tendencia		
Relación de variables	**Prueba**	**Coeficiente**	**P-value**	**k**	**Coeficiente**	**P-value**	**k**	**Coeficiente**	**P-value**	**k**
Crecimiento económico y profundización financiera	*v*	7.06 ***	0.000	1	2.23 **	0.012	0	2.29 **	0.011	0
	ρ	-4.06 ***	0.000		-1.15	0.123		2.64	0.995	
	PP	-8.99 ***	0.000		-8.84 ***	0.000		-12.88 ***	0.000	
	ADF	-7.89 ***	0.000		-7.94 ***	0.000		-8.44 ***	0.000	
Crecimiento económico y sector servicios financieros	*v*	4.65 ***	0.000	1	2.33 ***	0.009	0	-1.56	0.941	0
	ρ	-4.44 ***	0.000		-1.08	0.138		2.01	0.978	
	PP	-9.78 ***	0.000		-10.14 ***	0.000		-10.37 ***	0.000	
	ADF	-8.39 ***	0.000		-8.41 ***	0.000		-8.42 ***	0.000	
Crecimiento económico y tamaño de la economía	*v*	2.57 ***	0.005	1	-0.08	0.533	0	-3.88	0.999	0
	ρ	-4.45 ***	0.000		-0.89	0.185		3.22	0.999	
	PP	-9.41 ***	0.000		-9.64 ***	0.000		-14.42 ***	0.000	
	ADF	-8.03 ***	0.000		-8.09 ***	0.000		-7.79 ***	0.000	
Crecimiento económico y apertura comercial	*v*	4.65 ***	0.000	1	0.72	0.235	0	-1.97	0.975	0
	ρ	-4.76 ***	0.000		-1.26	0.103		2.78	0.997	
	PP	-9.34 ***	0.000		-9.17 ***	0.000		-13.29 ***	0.000	
	ADF	-7.53 ***	0.000		-8.16 ***	0.000		-8.40 ***	0.000	
Profundización financiera y sector servicios financieros	*v*	3.09 ***	0.001	1	2.37 ***	0.008	0	-1.23	0.891	0
	ρ	-0.42	0.334		1.69	0.955		4.18	1.000	
	PP	-0.75	0.226		-3.95 ***	0.000		-2.48 ***	0.006	
	ADF	-0.85	0.196		-4.19 ***	0.000		-2.63 ***	0.009	
Profundización financiera y tamaño de la economía	*v*	-2.53	0.994	1	-0.67	0.750	0	-0.56	0.713	0
	ρ	0.82	0.794		2.01	0.976		3.68	0.999	
	PP	-0.521	0.301		0.63	0.738		-4.75 ***	0.000	
	ADF	-0.569	0.284		0.29	0.615		-3.98 ***	0.000	
Profundización financiera y apertura comercial	*v*	-3.64	0.999	1	-1.00	0.842	0	-1.42	0.922	0
	ρ	1.46	0.928		2.00	0.977		3.74	0.999	
	PP	1.33	0.909		0.89	0.815		-3.19 ***	0.000	
	ADF	0.81	0.793		0.58	0.720		-3.01 ***	0.001	
Sector servicios financieros y tamaño de la economía	*v*	-4.19	1.000	1	-1.45	0.927	0	14.30 ***	0.000	0
	ρ	0.98	0.837		2.51	0.994		5.06	1.000	
	PP	-1.65 **	0.049		1.50	0.933		1.07	0.858	
	ADF	-1.57 *	0.057		1.77	0.962		0.33	0.632	
Sector servicios financieros y apertura comercial	*v*	-4.25	1.000	1	-1.48	0.931	0	23.44 ***	0.000	0
	ρ	1.44	0.925		2.42	0.992		3.48	0.999	
	PP	1.02	0.846		1.40	0.919		-3.00 ***	0.001	
	ADF	0.33	0.633		1.41	0.921		-2.91 ***	0.002	
Tamaño de la economía y apertura comercial	*v*	-4.21	1.000	1	-1.33	0.908	0	12.18 ***	0.000	0
	ρ	3.75	0.999		2.20	0.986		3.54	0.999	
	PP	6.31	1.000		0.72	0.765		-2.04 **	0.020	
	ADF	4.72	1.000		0.63	0.737		-2.06 **	0.019	

Fuente: elaboración propia.

Notas: *** y ** indican rechazo de la hipótesis nula al 1% y 5%, respectivamente.

Las conclusiones sobre la cointegración de panel desde un contexto multivariado están divididas (Cuadro 8). Las pruebas de Phillips y Perron, *PP*, y la Dickey-Fuller ampliada, *ADF*, consistentemente rechazan la hipótesis nula de no cointegración, mientras que las pruebas v, para homogeneidad en panel, y ρ llevan a la conclusión opuesta. Hay algunas razones prácticas que lo explican: de acuerdo con Pedroni (1999) cada uno de esos estadísticos presenta ventajas comparativas en términos de tamaño de muestra y potencia dependiendo del PGD.

Cuadro 7. Pruebas de cointegración a relaciones bivariadas (heterogeneidad en panel).

Cuadro 7

Relación de variables	Prueba	No constante ni tendencia			Solo constante			Constante y tendencia		
		Coeficiente	P-value	k	Coeficiente	P-value	k	Coeficiente	P-value	k
Crecimiento económico y profundización financiera	ρ	0.12	0.551	1	1.73	0.958	0	4.69	1.000	0
	PP	-10.81 ***	0.000		-10.24 ***	0.000		-12.73 ***	0.000	
	ADF	-8.62 ***	0.000		-7.79 ***	0.000		-7.511 ***	0.000	
Crecimiento económico y sector servicios financieros	ρ	0.05	0.522	1	1.83	0.966	0	4.16	1.000	0
	PP	-11.44 ***	0.000		-12.55 ***	0.000		-11.52 ***	0.000	
	ADF	-8.72 ***	0.000		-8.64 ***	0.000		-9.01 ***	0.000	
Crecimiento económico y tamaño de la economía	ρ	0.09	0.538	1	1.71	0.957	0	4.80	1.000	0
	PP	-10.93 ***	0.000		-13.13 ***	0.000		-19.64 ***	0.000	
	ADF	-8.24 ***	0.000		-8.85 ***	0.000		-9.09 ***	0.000	
Crecimiento económico y apertura comercial	ρ	-0.24	0.41	1	1.54	0.939	0	4.41	1.000	0
	PP	-10.40 ***	0.000		-10.88 ***	0.000		-16.60 ***	0.000	
	ADF	-7.15 ***	0.000		-8.20 ***	0.000		-11.16 ***	0.000	
Profundización financiera y sector servicios financieros	ρ	3.14	0.999	1	3.67	0.999	0	5.73	1.000	0
	PP	-0.63	0.263		-7.86 ***	0.000		-10.83 ***	0.000	
	ADF	-0.63	0.262		-5.05 ***	0.000		-5.61 ***	0.000	
Profundización financiera y tamaño de la economía	ρ	3.86	0.999	1	4.16	1.000	0	4.97	1.000	0
	PP	-0.83	0.201		-0.77	0.219		-13.93 ***	0.000	
	ADF	-0.33	0.367		0.08	0.533		-7.40 ***	0.000	
Profundización financiera y apertura comercial	ρ	4.26	1.000	1	3.60	0.999	0	5.24	1.000	0
	PP	0.32	0.626		-3.70 ***	0.000		-12.18 ***	0.000	
	ADF	0.25	0.602		-1.45 *	0.072		-6.04 ***	0.000	
Sector servicios financieros y tamaño de la economía	ρ	3.34	0.999	1	4.94	1.000	0	6.93	1.000	0
	PP	-2.07 **	0.019		3.10	0.999		2.60	0.995	
	ADF	-1.24	0.105		3.49	0.999		1.57	0.942	
Sector servicios financieros y apertura comercial	ρ	4.07	1.000	1	4.40	1.000	0	5.03	1.000	0
	PP	-0.54	0.292		1.02	0.846		-4.93 ***	0.000	
	ADF	-0.23	0.406		1.94	0.974		-3.94 ***	0.000	
Tamaño de la economía y apertura comercial	ρ	4.00	1.000	1	3.36	0.999	0	5.38	1.000	0
	PP	-0.86	0.193		-1.11	0.132		-4.54 ***	0.000	
	ADF	-0.28	0.387		-1.12	0.130		-2.54 ***	0.005	

Fuente: elaboración propia.

Notas: ***, ** y * indican rechazo de la hipótesis nula al 1%, 5% y 10%, respectivamente.

Cuadro 8. Pruebas de cointegración de panel a relaciones multivariadas.

Pruebas	No constante ni tendencia			Solo constante			Constante y tendencia		
	Coeficiente	P-value	k	Coeficiente	P-value	k	Coeficiente	P-value	k
	Homogeneidad en panel								
v	-3.75	0.999	0	-2.34	0.990	0	-1.14	0.874	0
ρ	3.18	0.999		3.28	0.999		4.25	1.000	
PP	-8.72 ***	0.000		-22.22 ***	0.000		-18.11 ***	0.000	
ADF	-6.47 ***	0.000		-15.37 ***	0.000		-13.09 ***	0.000	
	Heterogeneidad en panel								
ρ	5.43	1.000	0	5.75	1.000	0	6.48	1.000	0
PP	-20.02 ***	0.000		-34.16 ***	0.000		-23.60 ***	0.000	
ADF	-15.07 ***	0.000		-26.11 ***	0.000		-17.82 ***	0.000	

Fuente: elaboración propia.

Notas: *** señala significancia al 1% o menos.

Pedroni (2004) encuentra que los estadísticos ν y ρ tienden a subestimar la cointegración cuando T, el número de periodos temporales incluidos en la muestra, es pequeño, mientras que los estadísticos *PP* y *ADF* la sobrestiman. Otro factor que influye es que el periodo temporal de este ejercicio es corto, por lo que es probable que los contrastes menos estrictos tiendan al rechazo, mientras que los más exigentes lleven al resultado contrario.

Sin embargo, debido a la forma en la que la hipótesis nula de un panel es construida, un rechazo de la raíz unitaria simplemente implica que los datos de por lo menos algunos estados son consistentes con la evolución de una relación estable (Pedroni, 2001). Esta observación puede estar más identificada con lo hallado en los cuadros 6 y 7, en los que un conjunto amplio de relaciones bivariadas están cointegradas, así como también a los resultados de cointegración de Kao que se reportan en el Cuadro 9.

Cuadro 9. Pruebas de cointegración de Kao.

	Prueba ADF (solo constante)				
Relación de variables	**Estadístico τ**	**p-value**	**Varianza HAC**	**D-W**	**k**
Crecimiento económico y profundización financiera	-5.162 ***	0.000	9.44	2.27	0
Crecimiento económico y sector servicios financieros	-5.828 ***	0.000	8.07	2.23	0
Crecimiento económico y tamaño de la economía	-4.519 ***	0.000	9.96	2.28	0
Crecimiento económico y apertura comercial	-4.329 ***	0.000	9.38	2.27	0
Profundización financiera y sector servicios financieros	-1.816 **	0.034	0.043	1.93	0
Profundización financiera y tamaño de la economía	2.224 **	0.013	0.047	1.90	0
Profundización financiera y apertura comercial	0.622	0.266	0.045	1.92	0
Sector servicios financieros y tamaño de la economía	0.370	0.355	0.002	0.87	0
Sector servicios financieros y apertura comercial	-0.305	0.380	0.002	1.63	0
Tamaño de la economía y apertura comercial	-0.711	0.238	0.001	1.24	0

Notas: bajo la hipótesis nula de no cointegración, la selección de rezagos es de forma automática mediante el criterio de información modificado de Schwarz. D-W es el estadístico de autocorrelación serial Durbin-Watson. Varianza HAC es la autocorrelación consistente con heteroscedasticidad. k es el número adicional de rezagos usados en la ecuación Dickey-Fuller ampliada (ADF). *** y ** indican significancia al 1% y 5%, respectivamente.

De acuerdo con los resultados de Kao, y al igual que antes, seis de las diez relaciones bivariadas estudiadas logran rechazar la nula de no cointegración, lo que ligado a los resultados previos refuerza la idea de que por lo menos una parte de los miembros del panel exhiben un desempeño que es consistente con la hipótesis de la cointegración.

Finalmente, se aplica la prueba de cointegración de panel de Maddala y Wu (1999). Una ventaja de este contraste es que permite la presencia de heterogeneidad en la raíz autorregresiva bajo la hipótesis nula. También con esta prueba se investiga si hay cointegración de panel entre los diferentes pares de variables.

El Cuadro 10 recoge los resultados sobre las relaciones cointegrantes para los diferentes procesos generadores de datos. En general, la ausencia de constante y tendencia no parece la más apropiada, ya que esta opción es menos uniforme sobre las relaciones cointegrantes. En cambio, cuando en el PGD solo se incluye la constante o cuando ambos (constante y tendencia) están presentes, las conclusiones son consistentes de que por lo menos hay una relación cointegrante en cada caso analizado.

Cuadro 10. Pruebas de cointegración de panel de Maddala y Wu.

	Relaciones	**No constante ni tendencia**		**Solo constante**		**Constante y tendencia**	
Variables	**cointegrantes**	**Prueba traza**	**p-value**	**Prueba traza**	**p-value**	**Prueba traza**	**p-value**
Crecimiento económico y	Ninguna	221.9 ***	0.000	173.1 ***	0.000	205.2 ***	0.000
profundización financiera	A lo más 1	106.9 ***	0.000	59.35	0.641	66.75	0.382
Crecimiento económico y	Ninguna	350.6 ***	0.000	314.6 ***	0.000	376.4 ***	0.000
sector servicios financieros	A lo más 1	104.6 ***	0.001	53.2	0.829	54.3	0.799
Crecimiento económico y	Ninguna	223.1 ***	0.000	182.6 ***	0.000	173.9 ***	0.000
tamaño de la economía	A lo más 1	72.1	0.227	65.9	0.409	58.6	0.667
Crecimiento económico y	Ninguna	225.4 ***	0.000	179.3 ***	0.000	339.4 ***	0.000
apertura comercial	A lo más 1	92.0 **	0.012	72.3	0.221	65.4	0.427
Profundización financiera y	Ninguna	122.1 ***	0.000	184.6 ***	0.000	291.7 ***	0.000
sector servicios financieros	A lo más 1	35.5	0.998	35.5	0.998	74.6	0.170
Profundización financiera y	Ninguna	107.7 ***	0.000	109.6 ***	0.000	196.5 ***	0.000
tamaño de la economía	A lo más 1	69.4	0.298	38.2	0.995	50.37	0.892
Profundización financiera y	Ninguna	103.3 **	0.001	113.6 ***	0.000	317.0 ***	0.000
apertura comercial	A lo más 1	49.2	0.912	36.4	0.997	78.7	0.102
Sector servicios financieros y	Ninguna	205.8 ***	0.000	204.7 ***	0.000	222.8 ***	0.000
tamaño de la economía	A lo más 1	88.1 **	0.024	61.3	0.570	65.7	0.415
Sector servicios financieros y	Ninguna	177.2 ***	0.000	146.9 ***	0.000	165.5 ***	0.000
apertura comercial	A lo más 1	93.7 ***	0.009	59.3	0.640	43.0	0.979
Tamaño de la economía y	Ninguna	127.0 ***	0.000	124.2 ***	0.000	144.2 ***	0.000
apertura comercial	A lo más 1	59.3	0.640	59.8	0.622	50.6	0.887

Notas: las probabilidades son calculadas usando la distribución χ^2. Valores críticos desde MacKinnon-Haug-Michelis (1999).
*** y ** indican significancia al 1% y 5%, respectivamente.

5. Resultados del modelo de corrección de errores (VECM).

Las ecuaciones estimadas del Cuadro 11 recogen la conducta de largo plazo entre las variables endógenas junto a su ajuste dinámico de corto plazo. En estos modelos la estimación del término de corrección del error (las ecuaciones cointegrantes) indica la desviación de las variables de su condición de equilibrio de largo plazo. De ser estadísticamente significativo sugiere que este error de equilibrio se ajusta gradualmente a través de una serie de ajustes parciales de corto plazo. Si no es significativo, entonces no hay ajustes de corto plazo que considerar, lo que es equivalente al equilibrio de largo plazo. En el Cuadro 11 las estimaciones corresponden a la especificación determinista que incluye la constante pero no la tendencia lineal, así como las primeras diferencias rezagadas un periodo de las variables explicativas.

Cuadro 11. Resultados de estimación del modelo VECM.

	Variable dependiente					
	Δln(TCPEBpc)		Δln(Prof_Finan)		Δln(Tam_Serv_Finan)	
Regresores	*Coeficiente*	*t-value*	*Coeficiente*	*t-value*	*Coeficiente*	*t-value*
Constante	1.695 ***	(2.973)	0.154 ***	(6.464)	0.005 **	(2.074)
$\Delta\ln(\text{Apertura})_{t-1}$	-3.249 **	(-1.995)	-0.091	(-1.331)	0.017	(1.309)
$\Delta\ln(\text{Tam_Econ})_{t-1}$	0.447	(0.032)	1.865 ***	(3.280)	0.001	(0.006)
$\Delta\ln(\text{TCPEBpc})_{t-1}$	-0.080	(-0.983)	0.003	(0.930)	-0.001 *	(-1.808)
	3.225 *	(1.868)	-0.189 ***	(-2.625)	-0.041 ***	(-2.985)
$\Delta\ln(\text{Tam_Serv_Finan})_{t-1}$	-86.579 ***	(-4.822)	-2.034 ***	(-2.708)	0.649 ***	(4.547)
u_{t-1}(EC1)	-0.511 ***	(-9.285)	-0.056 ***	(-8.229)	0.005 ***	(3.980)
u_{t-1}(EC2)	0.848 **	(1.931)	0.085 ***	(4.647)	0.008 **	(2.420)
R^2	0.60		0.52		0.33	
Ecuación cointegrante 1:	$EC1 = \Delta\ln(\text{TCPEBpc}) - 2.195\Delta\ln(\text{Tam_Serv_Finan}) + 5.273$					
Ecuación cointegrante 2:	$EC2 = \Delta\ln(\text{Prof_Finan}) - 2.566\Delta\ln(\text{Tam_Serv_Finan}) + 4.396$					

Notas: significancia al 1%, 5% y 10% es indicada por ***, ** y *, respectivamente.
Fuente: elaboración propia.

El índice de apertura comercial y el tamaño de la economía se consideraron como exógenos después de varios ensayos que llevaron a esta decisión como mejor especificación de modelo, en el que el criterio de información de Schwarz fue usado para llegar a la determinación de la ecuación empírica. En teoría, no se espera que ninguna de las dos variables (apertura comercial y tamaño de la economía) sea endógena ya que si bien ambas pueden influir en el crecimiento

económico y la profundidad financiera, no se espera que éstas últimas dependan fundamentalmente de ellas. Además, las pruebas de causalidad parecen apoyar esta idea.

De acuerdo con los resultados del Cuadro 11 existe una relación positiva y significativa entre profundidad financiera y crecimiento económico. La ecuación Δln(tcpibpc) exhibe un ajuste anual cercano a –0.511 en términos de la variable crecimiento económico, es decir, de la discrepancia total en la relación de largo plazo alrededor del 51.1% se corrige en el lapso de un año. Dado que el error de corrección es negativo entonces se deduce que el crecimiento económico estaba por encima de su valor de equilibrio, por lo que comienza a disminuir en el periodo siguiente para corregir el desequilibrio.

La profundidad financiera, en cambio, estima un valor positivo del error de corrección de corto plazo en 84.8%, lo que significa que esta variable evoluciona por debajo de su valor de equilibrio y tiende a corregirse de manera muy rápida. Ambos valores del mecanismo de corrección del error en la ecuación Δln(tcpibpc) tienen parámetros de ajuste estadísticamente significativos (así como también en las otras ecuaciones del Cuadro 11) por lo que se infiere que la causalidad de largo plazo fluye en ambas direcciones. Sin embargo, el tamaño de la economía y el crecimiento promedio del periodo anterior no parecen afectar el crecimiento actual. Este resultado confirma el bajo crecimiento del producto per cápita durante el periodo de estudio, mientras que también sugiere que ser una economía grande o pequeña no es factor fundamental para influir en las tasas de crecimiento, es decir, el bajo desempeño económico de México ha sido generalizado entre las economías estatales de mayor y de menor tamaño.

El coeficiente estimado de la apertura comercial, negativo y significativo, refleja que el proceso de apertura se ha incrementado al mismo tiempo que el crecimiento ha sido bajo y errático, por lo que el modelo estima un impacto negativo entre ellas. Sin embargo, la apertura en ninguna de las otras dos ecuaciones resultó significativa, lo que sugiere que la mayor relación con el exterior no se ha manifestado de forma importante en el sector financiero de los estados mexicanos.

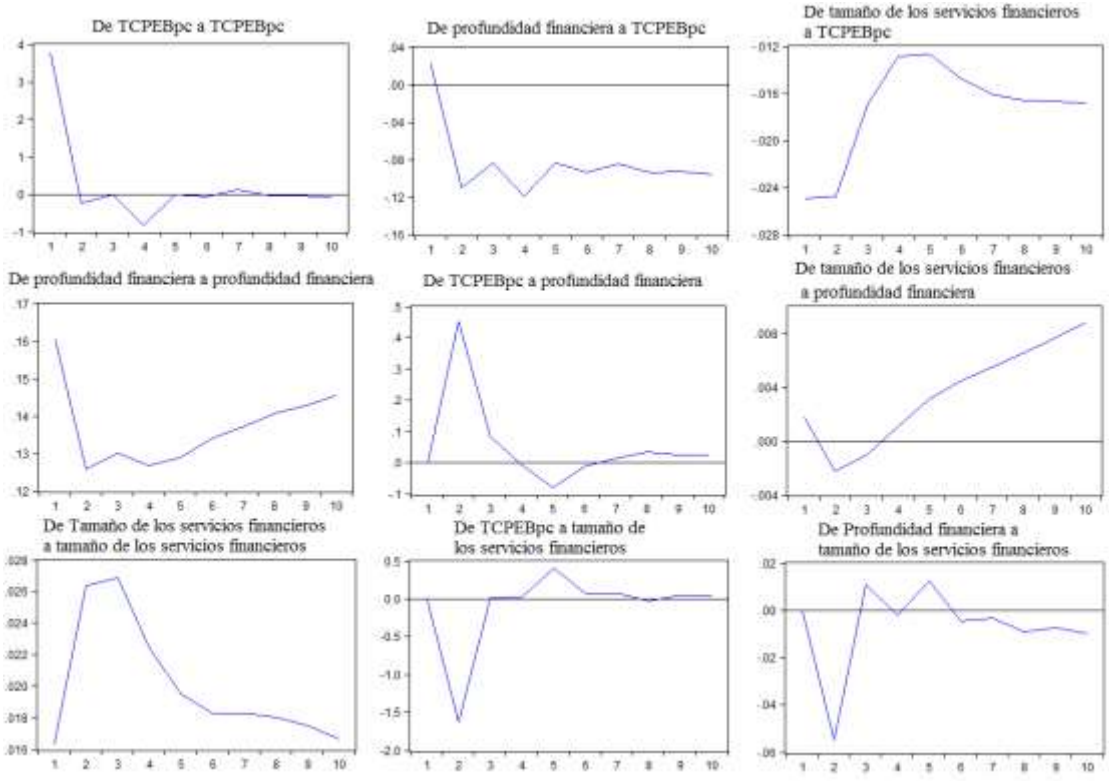
En la ecuación Δln(Prof_Finan) se estiman correcciones desde el error de equilibrio muy bajas, de alrededor de 5.6% y 8.5%, pero en la misma dirección: el crecimiento económico se encuentra por arriba del valor de equilibrio, mientras que la profundidad financiera se halla por debajo. En esta ecuación destaca el coeficiente negativo del valor rezagado de la profundidad financiera. Al parecer, una vez que se incrementan las inversiones financieras en relación al producto total, se ven disminuidas las posibilidades de seguir aumentando esta relación en años posteriores. Esto

también se observa en el tamaño de los servicios financieros: cuando se incrementa el peso de los servicios financieros en la economía se reduce el impacto de la profundidad financiera.

Con relación al tamaño de los servicios financieros (ecuación Δln(Tam_Serv_Finan)) se estima una relación de equilibrio en la que tanto el crecimiento económico como la profundidad financiera están por debajo de su relación de equilibrio y, además, el ajuste de corto plazo se realiza también de manera muy lenta, de 0.5% y 0.8% en el plazo de un año.

La estacionariedad del modelo VECM estimado puede ser valorado si todas las raíces tienen módulos menores a uno y permanecen dentro del círculo unitario. Una forma de averiguarlo es analizando el comportamiento de las innovaciones (o funciones de respuesta-impulso) a un shock específico (véase la Gráfica 2).

Gráfica 2. Respuesta a una desviación estándar en las innovaciones.



Fuente: elaboración propia.

En la Gráfica 2 se reporta el comportamiento de las innovaciones a un shock específico de la propia variable y de cada variable del VECM estimado. La TCPEBpc tiene un efecto inicial negativo de dos a tres periodos y luego se estabiliza. Esta es la conducta tanto en la TCPEBpc

como en el tamaño de los servicios financieros. Sin embargo, la TCPEBpc imprime un efecto positivo en la profundidad financiera.

En cambio, la profundidad financiera tiene efectos negativos en ella misma y en las demás variables, mientras que el tamaño de los servicios financieros reporta efectos positivos en todas las variables, aunque tarda más periodos en estabilizarse. Si bien las respuestas acumuladas del tamaño de los servicios financieros se ajustan a lo esperado desde la teoría, los efectos acumulados de la TCPEBpc y la profundidad financiera presentan reacciones contrarias a las esperadas.

6. Conclusiones.

La aplicación de metodologías de paneles estocásticos no estacionarios deja algunas enseñanzas y conocimientos sobre el desempeño estatal mexicano en cuanto a la relación contemporánea entre crecimiento económico y desarrollo financiero.

La apertura comercial que llevó a cabo el país desde los ochentas fue profunda y acelerada. La percepción general es que trajo estabilidad en muchas de las variables macroeconómicas así como también a nivel microeconómico (por ejemplo, hay ahora mayor diversificación en el consumo de las familias, se incentivó la competencia entre productores, etc.). Por otro lado, consolidó al sector servicios como una de las ramas con más participación en la economía, de mayor dinamismo y valor agregado y con una generación importante de empleos. Específicamente, la importancia de los servicios financieros es cada vez más evidente.

Sin embargo, una de las aportaciones de este trabajo es que existe, efectivamente, una estrecha relación entre los servicios financieros con el crecimiento económico de los estados mexicanos, pero en un contexto en el que no parece haber un papel importante de la apertura comercial, ya que las estimaciones no admiten relaciones de equilibrio consistentes con esta última variable.

Otro de los aprendizajes, y que en gran medida explica la conclusión anterior, es que la mayor relación con el exterior no ha impactado significativamente el desarrollo financiero. El modelo VECM estima relaciones no significativas entre profundidad financiera y apertura comercial, lo que puede ser considerado como una de las causas del poco dinamismo del crecimiento económico de los últimos años. Además, el desequilibrio de corto plazo se ajusta de manera muy lenta (alrededor del 8.5% anual con profundidad financiera y 0.8% anual con respecto al tamaño del sector servicios financieros). Es posible inferir que las inversiones financieras sean

insuficientes y/o que no logren estimular favorablemente el crecimiento económico. Se ha podido influir en la economía para orientarla al mercado externo, la apertura al comercio exterior es amplísima, pero los efectos sobre un aumento del crecimiento económico no son automáticos ni directos. Es necesario consolidar el sistema financiero de tal manera que, efectivamente, sea un ancla que impulse el crecimiento. Se puede afirmar que la primera fase del modelo, abrir la economía y atraer capital financiero, se ha cumplido satisfactoriamente, sin embargo, la segunda fase, consolidar el sistema financiero para que eleve el crecimiento, se constituye en un tema pendiente que de no concretarse puede llegar a representar una barrera, sin importar cuanto más se siga abriendo la economía.

El ejercicio desarrollado orienta sobre el vínculo observado entre las variables, sin embargo, debe reconocerse que los resultados no están libres de algunas limitaciones. Por ejemplo, es posible que la captación bancaria comercial usada para estimar la profundidad financiera sea más bien una medida incompleta del desarrollo financiero. Al respecto tendríamos que cuestionarnos ¿qué tanto del monto total de la captación bancaria es canalizado a proyectos de inversión real que eleven la producción y generen empleos?, o ¿qué proporción de capital prefiere el rendimiento fijo que se puede obtener mediante el ahorro en lugar de tomar riesgos en proyectos de inversión? Asimismo, el índice de apertura comercial al estar calculado únicamente con el dato de las exportaciones de mercancías, sin incluir las importaciones estatales, tal vez no logra constituirse en el indicador ideal deseado de las relaciones de los estados mexicanos con el exterior. La falta de información sobre las importaciones estatales no deja alternativa posible, al menos por el momento.

Algunas sugerencias de investigación futura señalan que el presente análisis se puede extender sobre horizontes temporales más largos, lo que dejaría estimaciones de las relaciones cointegrantes más consistentes. Sin embargo, abarcar un periodo mayor excluiría al índice de apertura comercial, ya que en su elaboración la información disponible es solo a partir de 2007. Otra sugerencia es investigar cómo sería la cointegración entre crecimiento económico y profundidad financiera de acuerdo al nivel de ingresos de los estados y a su localización geográfica. Es posible que existan diferencias sustanciales entre los grupos de estados de ingresos elevados, medios y bajos, así como entre los estados de la frontera norte, centro y sur del país. La información que se podría desprender de esas investigaciones es esencial para tener un mejor

conocimiento del desempeño estatal mexicano y para valorar las causas sobre la desigualdad y el rezago existentes entre ellos.

Bibliografia

Baltagi, B. H. (2008). *Econometric Analysis of Panel Data*, Chichester, West Sussex: John Wiley and Sons Ltd.

Baltagi, B. H. y Kao, C. (2000). "Nonstationary Panels, Cointegration in Panels and Dynamic Panels: A Survey", *Advances in Econometrics*, 15: 7-51.

Banco de México (2015). Estadísticas de inflación en el portal de internet: www.banxico.org.mx. México: Banco de México.

Breitung, J. y Pesaran, M. H. (2008). "Unit Roots and Cointegration in Panels", Chapter 9 in L. Matyas y P. Sevestre (eds.), *The Econometrics of Panel Data: Fundamentals and Recent Developments in Theory and Practice*, Berlin: Springer, 279-322.

Esquivel, G. y Rodríguez-López, J. A. (2003). "Technology, Trade, and Wage Inequality in Mexico before and After NAFTA", *Journal of Development Economics*, 72(2): 543-565.

Garcés Díaz, D. G. (2002). "Agregados monetarios, inflación y actividad económica en México", Working Papers 2002-7, Banxico.

Germán-Soto, V. (2015). "Co-movimiento, persistencia y volatilidad de variables macroeconómicas mexicanas en presencia de cambio estructural, 1940-2012", *Ciencia ErgoSum*, en imprenta.

Hanson, G. H. (1998). "Regional Adjustment to Trade Liberalization", *Regional Science and Urban Economics*, 28(4): 419-444.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (2014). *Estadísticas de exportaciones por entidad federativa. Resultados 2007-2012*, Aguascalientes: INEGI.

Kao, C. (1999). "Spurious Regression and Residual-Based Tests for Cointegration in Panel Data when the Cross-Section and Time Series Dimensions are Comparable", *Journal of Econometrics*, 90: 1– 44.

Loayza, N., Ranciere, R., Servén, L. y Ventura, J. (2007). "Macroeconomic Volatility and Welfare in Developing Countries: An Introduction", *The World Bank Economic Review*, 21(3): 343-357.

MacKinnon, James G., Haug, Alfred A. y Michelis, Leo (1999). "Numerical Distribution Functions of Likelihood Ratio Tests for Cointegration", *Journal of Applied Econometrics*, 14, 563-577.

Maddala, G. S. y Wu, S. (1999). "A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and A New Simple Test", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61(Special issue): 631–652.

Pedroni, Peter (1995). "Panel Cointegration; Asymptotic and Finite Sample Properties of Pooled Time Series Tests, with an Application to the PPP Hypothesis", Indiana University Working Papers in Economics, No. 95-013, June.

Pedroni, Peter (1999). "Critical Values for Cointegration Tests in Heterogeneous Panels With Multiple Regressions", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61(Special issue): 653-670.

Pedroni, Peter (2001). "Purchasing Power Parity Tests in Cointegrated Panels", *Review of Economics and Statistics*, 83(4): 727-731.

Pedroni, Peter (2004). "Panel Cointegration: Asymptotic and Finite Sample Properties of Pooled Time Series Tests with an Application to the PPP Hypothesis", *Econometric Theory*, 20: 597-625.

Toda, H. y Yamamoto, T. (1995). "Statistical inference in vector autorregressions with possibly integrated processes", *Journal of Econometrics*, 66: 225–250.

orld Bank (2015). World Development Indicators: www.databank.worldbank.org. Washington, D.C.: World Bank Group.

CAPÍTULO XI

Estructuras de competencia: determinación de equilibrios de mercado en un contexto fiscal y de aprovechamiento de recursos no renovables.

Edgar David Gaytán Alfaro

Universidad Autónoma de Zacatecas

Francisco Javier Benita Maldonado

Tecnológico de Monterrey

RESUMEN

La interacción de empresas en diferentes estructuras de mercado da lugar a que éstas desarrollen principios estratégicos de acción. Tales decisiones consideran no sólo la conducta de empresas rivales sino su evolución en el tiempo atendiendo al contexto de mercado en que compiten. Los factores que condicionan dicho entorno son de una amplia gama; el presente capítulo considera el comportamiento estratégico de las empresas que cuentan con una naturaleza productiva extractiva en un esquema de mercado influido por una política de impuestos fiscales. Los resultados, en un desarrollo iterativo, muestran la estabilidad de los equilibrios Nash-Cournot empleando estructuras informáticas de simulación.

Palabras clave: Estructuras de Mercado, Oligopolio y otros mercados imperfectos, Juegos estocásticos y dinámicos.

1. Introducción

Una preocupación de la Teoría de la Organización Industrial ha sido el refinamiento de los modelos de mercado, principalmente el del oligopolio. En ese sentido, al considerar más supuestos que ilustran de mejor manera la interacción de las empresas, el modelaje se hace más complejo, por lo que es necesario recurrir a nuevas técnicas de optimización y al uso de programas computacionales.

El presente documento busca ilustrar las tres estructuras de mercado planteadas por la economía industrial, a saber, la competencia perfecta, el monopolio y el oligopolio. Lo anterior en el marco del tratamiento a los recursos no renovables y la implementación de un impuesto. Para tal efecto, se recurre a la formalidad matemática propia de los modelos de optimización dinámica y se emprende una simulación en el contexto de la programación no lineal.

El objetivo es demostrar que los equilibrios se cumplen en los tres escenarios de mercado previamente referidos. Asimismo, se pretende validar los argumentos teóricos en esta materia y dilucidar los efectos que podría tener dicho impuesto ante distintas estructuras de mercado en un contexto dinámico.

El documento está estructurado en tres apartados: en el primero, se hace una reseña de la teoría de la empresa concerniente a las estructuras del mercado, así como de los modelos teóricos con que cuenta la ciencia económica para su estudio y comprensión en términos de la eficiencia y bienestar de los productores y consumidores. En el segundo, se presenta un modelo teórico para describir las tres estructuras de mercado, y en el tercer apartado, se muestra la aplicación del modelo mediante la herramienta GAMS 23.6. Finalmente se exponen las conclusiones del trabajo y sus anexos.

2. Reseña teórica

La economía industrial se encarga del estudio del funcionamiento de los mercados y de la forma en cómo compiten las empresas. Para tal efecto, las industrias se ubican en diferentes estructuras del mercado, cuyas particulares características y conductas se relacionan para determinar el comportamiento de la industria y del propio mercado. La teoría de la organización industrial ha desarrollado distintos modelos que describen la forma de competencia estratégica entre las empresas que integran una determinada industria (Tirole, 1990).

Los principios del estudio de la economía industrial se sustentan en el paradigma estructura-conducta-desempeño, que se basa en un análisis unidireccional, sin embargo, la crítica a esta forma de estudiar el mercado no se hizo esperar. El enfoque de la escuela de Harvard se centró en el estudio de la causalidad entre concentración y eficiencia, a diferencia de la escuela de Chicago que se caracterizó por incluir otro tipo de variables exógenas que determinaban el

comportamiento de estas dos variables consideradas como endógenas. Posteriormente, hacia los años ochenta se comenzó a integrar la teoría de juegos como herramienta de análisis teórico del funcionamiento de los mercados.

Las estructuras en que se clasifican los mercados pueden ser de tres tipos: monopolio o monopsonio donde existe un solo oferente o un solo demandante, competencia perfecta en los que existe algún tipo de competencia, y mercados en los que existe colusión como el duopolio y el oligopolio.

En este apartado se pretende describir, aunque de manera sucinta, los elementos sobre los que se rigen dichas estructuras de mercado. En primer lugar, de acuerdo a Tirole (1990) el monopolio es aquella estructura donde el oferente establece el mismo precio por unidad de bien para cada bien producido (es decir, en principio no hay discriminación de precios en el tiempo presente), de esta forma, la empresa tiene poder de mercado para elevar el precio por encima del costo marginal sin perder a todos sus clientes. Una vez que el precio se eleve lo más posible, habrá una mayor pérdida de bienestar social. De ahí que, existe una marcada preocupación por analizar las implicaciones que para los consumidores y productores tiene la elevación de precios y la limitada cantidad que se oferta del bien. Puede ocurrir que los monopolios no pongan suficiente atención a las estrategias de reducción de costos e incluso retrasen la incorporación de innovaciones a sus productos, además de que tengan gastos excesivos en promoción y publicidad, y en inversiones para imponer mayores barreras a la entrada y acentuar su situación monopólica; para revertir esta situación, el gobierno puede regular los precios para recuperar una parte del bienestar económico (Brown y Domínguez, 2005).

Nicholson (1997), describe el modelo perfectamente competitivo que está enmarcado bajo los siguientes supuestos:

a) Hay un gran número de empresas que producen un bien homogéneo.
b) Cada empresa intenta maximizar los beneficios.
c) Cada empresa es tomadora de precios, debido a que no tiene la suficiente influencia para determinar el precio de mercado.
d) Todos los participantes tienen información perfecta.

e) Tanto los compradores como los vendedores no incurren en algún costo cuando realizan intercambios.

La competencia perfecta está muy lejana de la realidad de una economía, de ahí que, la tarea de la organización industrial ha sido, precisamente, examinar las estructuras de mercado que se encuentran en medio de los casos extremos, las de competencia imperfecta.

Una de las críticas que se hacen con frecuencia al modelo de competencia perfecta está orientada al supuesto de homogeneidad del producto. Existen muchos mercados en que el número de empresas es bastante grande pero el producto vendido no es exactamente el mismo. Cabral (1997) cita a Chamberlin, quien propuso un modelo alternativo, el de competencia monopolística.

En este modelo, también se considera que hay un gran número de empresas cuya estrategia que podría emprender alguna de ellas, no incide en las otras empresas; no obstante, por la diferenciación del producto, cada empresa fija su precio y la curva de demanda a la que se enfrenta cada empresa tiene pendiente negativa. Otro de los supuestos que se sigue considerando en este caso, es que hay libre entrada a la industria, por lo que en el largo plazo se producen entradas hasta que la curva de demanda sea tangente a la curva de costo medio total, y en este punto el beneficio de cada empresa es nulo y se considera un equilibrio. La cantidad producida aquí es menor que en competencia perfecta; empero, se debe considerar que un punto a favor del bienestar generado es la variedad de productos.

No obstante, Cournot hacia el año 1838 articuló la teoría económica del monopolio con la finalidad de explicar la formación de precios y, posteriormente, su contribución se extendió a la formación de un modelo de oligopolio para explicar el comportamiento estratégico, de las pocas empresas que integran una industria, para la fijación de los precios. Este modelo de competencia imperfecta supone que existen algunas empresas teóricamente independientes pero que actúan de manera conjunta en la determinación de las variables de equilibrio, como son el precio y la cantidad; de esta forma, actúan como si fueran una única empresa, ya sea que decidan competir en precio o en cantidad del bien a producir.

En los mercados oligopólicos, solo unas cuantas empresas producen la mayor parte o la producción total; además, algunas o todas las empresas obtienen beneficios a largo plazo debido a

que la presencia de barreras a la entrada dificulta o impide la entrada de otras. En estos mercados, una empresa fija el precio o el nivel de producción, a partir de estrategias relacionadas con la conducta de sus competidoras, al mismo tiempo que, las decisiones de las competidoras dependen de la propia decisión de la primera empresa.

Para analizar los mercados oligopólicos, se emplea el concepto de equilibrio de Nash, que precisamente John Nash introdujo por primera vez en 1951, y que describe el conjunto de estrategias o de acciones con las que cada empresa obtiene los mejores resultados posibles, dadas las acciones de sus competidoras (Pindyck y Rubinfeld, 2001). La mayor parte de la aplicación de este concepto se centra en el mercado del duopolio, donde cada una de las dos empresas produce un bien homogéneo y conocen la demanda; decidirán la cantidad que va a producir y las dos toman sus decisiones al mismo tiempo. Cuando toma su decisión de producción, cada una tiene en cuenta a su competidora. Sabe que ésta también decide la cantidad que va a producir y el precio de mercado depende de la producción total de las dos empresas. Por tanto, el modelo de Cournot radica en que cada una de las dos empresas considera fijo el nivel de producción de su competidora y decide entonces la cantidad que va a producir, a esto se le llama la conjetura de Cournot.

Por lo anterior, los supuestos fundamentales del modelo básico de Cournot que cita Cabral (1997) son:

a) El producto de las empresas es homogéneo.
b) El precio único de mercado resulta de la oferta agregada de las empresas.
c) Las empresas determinan simultáneamente la cantidad ofrecida.

El equilibrio de mercado entonces, viene dado por el equilibrio de Nash de este juego, llamado equilibrio de Nash-Cournot. Además, a medida que el número de empresas aumente en la industria, el precio de equilibrio se aproxima al precio de equilibrio de competencia perfecta.

El caso descrito antes se refiere a estructuras tipo Cournot con empresas que tienen costos idénticos. Cuando las empresas no tienen costos iguales, la empresa con el mayor costo marginal tiene menores ganancias, de tal forma, que las empresas fijan cantidades con base en las expectativas de las firmas rivales bajo el supuesto de que la producción de éstos se mantiene fija.

Aunque dicho supuesto sólo es racional cuando las empresas están eligiendo sus niveles de producción por única vez, debido a que sus producciones no pueden cambiar cuando se encuentran en el equilibrio de Cournot, porque ninguna empresa tendría incentivo para cambiar su producción (Brown y Domínguez, 2005).

Para explicar todavía más la estructura de mercado de competencia imperfecta, existen otros modelos teóricos. Por señalar algunos, se encuentra el modelo de competencia en precios desarrollado por Bertrand, cuyas hipótesis son dos empresas que producen bienes idénticos y que son homogéneos en el sentido de que son sustitutivos perfectos en las funciones de utilidad de los consumidores, además, supone que cada empresa recibe una demanda igual a la mitad de la demanda del mercado al precio común, y que la empresa abastece siempre la demanda que enfrenta (Tirole, 1990).

Un modelo oligopólico de competencia en cantidad de producción se basa en que la decisión se toma en forma secuencial y no en forma simultánea. En este sentido, si se consideran únicamente dos firmas, una de ellas destacará como líder en el mercado y la otra será la seguidora, tal escenario se describe mediante el modelo de Stackelberg. Para resolverlo se utiliza como herramienta la teoría de los juegos, (Brown y Domínguez, 2005). Ahora bien, si las empresas no compiten sino que cooperan, estamos frente a un modelo de colusión, por ejemplo, el cártel.

Hasta aquí, se han descrito los aspectos relevantes de las estructuras de mercado y de los modelos teóricos que existen en la economía para explicar su comportamiento. Aunque en este trabajo exclusivamente se hará una aplicación al modelo de competencia perfecta y al modelo de Cournot, en el mercado de los recursos no renovables, mediante la técnica de complementariedad mixta a través de la programación dinámica.

3. El modelo

El modelo[1] para un mercado de recursos naturales agotables, que contemple las tres estructuras de mercado (competencia perfecta, monopolio y oligopolio), se retoma de Flakowski (2003), y considera las siguientes características o supuestos:

[1] Una vez formulado el problema de complementariedad mixta y obtenido las restricciones de optimización no lineal (véase Flakowski, 2003; Chiscara, 2009:12), se puede resolver el modelo.

1. Un recurso no renovable, que es suministrado por un gran número de productores, n (para que dé cabida a la estructura de competencia perfecta).

2. Existe un precio de mercado P_t. En el caso de competencia perfecta, los productores compiten entre sí, pero ninguno de ellos es capaz de influir en el precio de mercado.

3. En el tiempo $t = 0$ cada productor posee un stock de recursos dado y conocido $S^i(0) = S_0^i$ donde $i = 1, \dots, n$ y representa el número de productores.

4. R_t^i es la cantidad extraída por el productor i en el tiempo t.

5. $\partial \mathrm{C}(R_t)/\partial\,(R_t) = c \geq 0$ los costos marginales de extracción son idénticos y constantes.

6. Añadiremos al modelo original el parámetro τ, estrictamente positivo, que se traduce en un impuesto a la cantidad extraída. Nótese que este parámetro no depende de t.

7. Los productores enfrentan una función lineal de demanda de la siguiente forma:

$$D_t = a - bP_t \qquad (1)$$

donde D_t representa la demanda por el recurso en el tiempo t. En equilibrio:

$$D_t = R_t = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}_t^i \qquad \forall\, t \qquad (2)$$

Considerando una tasa de descuento r positiva, el problema de maximización para puede representarse como:

$$\max_{R_t^i} \int_0^{\infty} \left[(\{1-\tau\} - c) \cdot P_t R_t^i\right] \cdot e^{-r \cdot t}\ dt \qquad (3)$$

sujeto a $S_t^i = R_t^i$; con $S_t^i \geq 0$ y $R_t^i \geq 0$; y la condición inicial de $S^i = S_0^i$.

Para calcular la senda de extracción individual, la cantidad total en el tiempo t debe ser dividida por el número de productores n. El valor actual del Hamiltoniano para el problema de maximización es:

$$H_t = [(1-\tau)P_t - cP_t]R_t - \lambda_t R_t \qquad (4)$$

y las condiciones de primer orden para la maximización son:

$$\frac{\partial H_t}{\partial R_t} = [(1-\tau) - c]P_t - \lambda_t \leq 0; \qquad R_t \geq 0; \qquad R_t \cdot \{[(1-\tau) - c]P_t - \lambda_t\} = 0 \qquad (5)$$

$$\dot{S_t} = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} = -R_t \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial S_t} = \mathrm{r} \cdot \lambda_t - \dot{\lambda_t} \geq 0; \qquad S_t \geq 0 \qquad (7)$$

$$\lambda_t \geq \frac{(a-R_t)}{b} - cP_t - \tau P_t; \qquad R_t \geq 0 \qquad (8)$$

Las ecuaciones 6, 7, y 8 son las condiciones de primer orden y resuelven el problema para competencia perfecta, al ser formuladas como un problema de complementariedad mixta de la siguiente forma:

$$z = \begin{pmatrix} R \\ S \\ l \end{pmatrix}; \; l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix}; \; u = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}; \; F(z) = \begin{cases} [(1-\tau) - c]P_t - \lambda_t \\ \dot{\lambda_t} - r \cdot \lambda_t \\ \dot{S}_t + R_t \end{cases} \qquad (9)$$

Para el monopolio $n = 1$. A diferencia del caso de competencia perfecta, el monopolista tiene una influencia en el precio de mercado, debido a que puede variar la cantidad extraída. El problema de maximización está dado por la siguiente ecuación:

$$\max_{R_t} \int_0^{\infty} [(\{1-\tau\} - c) \cdot R_t P_t(R_t)] \cdot e^{-r \cdot t} \; dt \qquad (10)$$

El precio de mercado ahora depende de la cantidad de extracción del monopolista. La función de demanda es la misma y el Hamiltoniano que resulta es:

$$H_t = \left[\frac{a-R_t}{b} - cP_t - \tau P_t\right] \cdot R_t - \lambda_t R_t \qquad (11)$$

y las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H_t}{\partial R_t} = P_t - cP_t - \tau P_t - \lambda_t \leq 0; \qquad R_t \geq 0; \qquad R_t \cdot (P_t - cP_t - \tau P_t - \lambda_t) = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial S_t} = \mathrm{r} \cdot \lambda_t - \dot{\lambda}_t \geq 0; \qquad S_t \geq 0 \qquad (13)$$

$$\lambda_t \geq \frac{(a-2\cdot R_t)}{b} - cP_t - \tau P_t; \qquad R_t \geq 0 \qquad (14)$$

Las ecuaciones 12, 13 y 14 son las condiciones de primer orden y resuelven el problema para el monopolio.

Por último, el caso del oligopolio con sólo dos productores (jugadores). Cada productor no sólo está consciente de la propia influencia que puede tener en el precio, sino de la influencia que puede tener la cantidad de los otros productores en el precio.

El equilibrio de Nash-Cournot se puede alcanzar si todos los jugadores toman como dadas las cantidades de todos los demás jugadores y optimizan su propia senda de extracción con respecto a esas cantidades. Cuando existe una relación de lazo abierto (*open-loop*) entre los productores y se alcanza un equilibrio de Nash-Cournot, ningún jugador tiene incentivos para desviarse del camino trazado, porque todos los jugadores dan mutuamente sus mejores respuestas a las demás estrategias.

Una estrategia de lazo abierto, se caracteriza porque cada jugador elige todas sus acciones al comienzo del juego, independientemente de la evolución real del juego. Los jugadores hacen acuerdos al inicio del juego, sobre las acciones que realizaran durante el juego. Esto puede causar problemas relacionados con la coherencia del tiempo del juego, porque una estrategia elegida al comienzo puede resultar sub-óptima, sí durante el juego, como resultado de esto, los jugadores pueden tener incentivos para desviarse de su estrategia original.

Considerando la posibilidad de un sólo productor i en el tiempo $t = 0$, que tiene un stock de recursos dado $S^i(0) = S^{i0}$ con $i = 1, \dots, n,$ las cantidades extraídas del jugador i en el tiempo t son R^{it} y la función lineal de demanda (1), así como la ecuación (2), siguen siendo válidas. La extracción del recurso implica costos marginales individuales y constantes de extracción c^i. Por lo tanto, el problema de optimización puede expresarse como sigue:

$$\max_{R_t} \int_0^{\infty} \left[\left(\{1-\tau\} - c^i \right) \cdot R_t^i P_t(R_t) \right] \cdot e^{-r^{i} \cdot t} \; dt \qquad (15)$$

sujeto a $\dot{S}_t^i = -R_t^i;\ S_t^i \geq 0$ y; $R_t^i \geq 0$. Así, sustituyendo (1) en (15) y considerando (2), el problema de maximización se convierte en:

$$\max_{R_t} \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{a-R_t}{b} - c^i P_t - \tau P_t \right) \cdot R_t^i \right\} \cdot e^{-r^{i} \cdot t} \; dt \qquad (16)$$

El valor actual del Hamiltoniano para el problema de maximización es:

$$H_t^i = \left[\frac{a-R_t}{b} - c^i P_t - \tau P_t \right] \cdot R_t^i - \lambda_t^i R_t^i \qquad (17)$$

y las condiciones de primer orden están dadas por:

$$\frac{\partial H_t^i}{\partial R_t^i} = \frac{\mathrm{a}-R_t-R_t^i}{\mathrm{b}} - c^i P_t - \tau P_t - \lambda_t^i \leq 0; \qquad R_t \geq 0 \qquad (18)$$

$$\cdot \quad S_t^i = \frac{\partial H_t^i}{\partial \lambda_t} = -R_t^i \qquad (19)$$

$$\frac{\partial H_t^i}{\partial S_t^i} = \mathrm{r^i} \cdot \lambda_t^i - \dot{\lambda}_t^i \geq 0; \qquad S_t \geq 0 \qquad (20)$$

La condición (18) no sólo depende de las cantidades del jugador i, sino de las cantidades de todos los jugadores R_t.

4. La simulación

Resolver los problemas de maximización con datos simulados, permite encontrar, en teoría, las tasas óptimas de utilización de los recursos naturales así como confirmar que los equilibrios se cumplen.

Con ayuda del software GAMS[2], fue posible realizar dicha labor, para ello se expresaron todos los componentes en el conjunto de los números reales y se acotaron los valores tanto de $R(t)$ como de $S(t)$ a términos estrictamente positivos (explotación de recursos y stock de los mismos).

[2] Acrónimo de *General Allgebraic Modeling System*. Paquete diseñado para programación matemática en general con solucionadores particularmente en el campo de la optimización. Mayores detalles técnicos del paquete en http//www.gams.com.

Los sistemas de ecuaciones planteados en el paquete computacional permite extraer los niveles óptimos de stock de recursos naturales de utilización de factores y, dados, estos resultados, cuáles son los beneficios a obtener. Dicho en otras palabras: la solución implica los beneficios posibles, en competencia perfecta, dados niveles óptimos tanto de stock de recursos naturales como de factores de la producción.

De esta manera se tiene el mismo número de ecuaciones que variables "libres" o no determinadas dentro del modelo sino de la estructura que condiciona a éste. Al ser una solución de optimización dinámica con complementariedad combinada, cada ecuación también puede ser entendida bajo términos como la utilización de factores y sus precios cambian con respecto del tiempo. Así, es posible encontrar una tasa de explotación que coincide con la definición dada previamente de $R(t)$.

Lo anterior, sugiere que el equilibrio en este mercado de competencia perfecta está dado por una sucesión de tiempo. Para efectos prácticos, la frontera de tiempo se delimitó a 50 períodos, pueden entenderse como 50 meses. Esto condiciona a que la solución de los equilibrios sea iterativa y resulta ilustrativa respecto al momento en que se obtendrán los mismos. Es una estructura de juegos repetidos finitos con una solución de tipo Nash-Cournot.

Los parámetros a utilizar fueron los mismos que utilizó Flakowski (2003) en su estudio, es decir para los tres casos el nivel de demanda cuando el precio es cero, $a = 80$ con pendiente b= -0.2 y una tasa de descuento a lo largo del tiempo $r = 0.05$. En la competencia perfecta $n = 167$, $\mathrm{c}' = 3$ y $S_0 = 500$, de manera similar para el monopolio $\mathrm{c}' = 3$, $S_0 = 500$ y $n = 1$. Finalmente, para el caso del oligopolio , $n = 2$, $S_0^1 = S_0^2 = 500$, $\mathrm{c}^{1'} = 3$ y $\mathrm{c}^{2'} = 5$, asimismo en todos los casos el impuesto fue $\tau = 0.05$.

Los resultados se pueden apreciar en el Anexo 1. Donde podemos confirmar que la solución iterativa del modelo permite alcanzar equilibrios estables. Los valores, en este caso, resultan un tanto triviales dado que forman parte de una simulación, sin embargo, es importante destacar que en la estructura de juegos repetidos los equilibrios son estables con lo que verificamos el cumplimiento del Nash-Cournot.

En la solución de un escenario monopólico no hay movilidad de cantidades (S) de recursos naturales ni de intensidad de explotación de recursos (R) definidos por el mercado. La solución es estática y no está sujeta a los cambios en el tiempo. La definición de los óptimos no es producto de la competencia ni perfecta ni oligopólica, corresponde a las decisiones del monopolio.

El caso del oligopolio constituye un caso particularmente interesante, al considerar únicamente a dos empresas, los resultados son consistentes con lo previsto del comportamiento de dos empresas en el mercado, en el Anexo 2 se detallan. en este caso cabe destacar efectos de colusión en las diferentes etapas del tiempo considerado, sin incentivos a desviarse. Es decir tanto la utilización de recursos como los precios observados son invariables en el transcurso del tiempo. Las soluciones arrojadas por GAMS se extienden a sólo tres períodos dada la comprobación de que los resultados tienen a reproducirse en el tiempo. Ello avala el cumplimiento del equilibrio de Nash-Cournot.

5. Conclusión

El ánimo del documento es representar formalmente y con el empleo de herramientas informáticas las expresiones teóricas que en el contexto de la organización industrial se han vertido en la interpretación de diferentes estructuras de mercado. Debido a esta acotación, el presente no constituye un replanteamiento de los modelos de optimización dinámica, sino que, es más bien, su sistematización y demostración.

La evidencia obtenida con el ejercicio de simulación es consistente con lo previsto del comportamiento de los datos. Ello nos permite constatar que las estructuras de mercado propician niveles de beneficios y de utilización de recursos y factores ampliamente diferenciados. Estas implicaciones posibilitan llevar a cabo extensiones a una realidad, que si bien tendrá datos distintos, seguramente presentará un comportamiento muy propio de la simulación que aquí se muestra.

La competencia perfecta expone, cómo en los resultados, una dinámica iterativa de ajustes en las cantidades de recursos y factores, en el transcurso del tiempo, lleva a equilibrios estables, ante los cuales ningún oferente encuentra incentivos a desviarse. En tanto, en el oligopolio, los equilibrios

son estáticos desde el primer periodo, lo cual abona a la verificación del concepto de equilibrio Nash-Cournot en el que ninguna de las empresas encuentra ventajas de adoptar estrategias diferenciadas, reportando en el mercado niveles de bienestar que son característicos de la estructura de monopolio, dados los efectos de colusión que se presentan en el oligopolio. Por otra parte, en el caso del monopolio, los resultados son similares a los del oligopolio.

Finalmente, reiterar la importancia de la sistematización en la organización industrial aprovechando el uso de herramientas informáticas, que no sólo brinda una mayor formalidad, sino que facilitan la solución de problemas complejos para modelos dinámicos y con información agregada.

Bibliografía.

Brown G. Flor y Domínguez V. Lilia (2005), Organización Industrial: Teoría y Aplicaciones al Caso Mexicano; Primera Edición, Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México.

Cabral, Luis (1997), Economía Industrial, Traducción de la primera edición en portugués, McGraw Hill/Interamericana de España.

Chisari, Omar O. (2009). *Progresos en Economía Computacional*. Temas Grupo Editorial. Buenos Aires.

Flakowski, Suen M. (2003). Formulating and Solving Exhaustible Resource Models as Mixed Complementarity Problems in GAMS. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Institute of Economic Theory. CHEER, vol. 16.

Nicholson, Walter (1997), Teoría Microeconómica: Principios Básicos y Aplicaciones; Sexta Edición, McGraw-Hill / Interamericana de España.

Pindyck, Robert S. y Rubinfeld, Daniel L. (2001), Microeconomía; Quinta Edición, Editorial Pearson-Prentice.

Tirole, Jean (1990), La Teoría de la Organización Industrial; Edición Española, Editorial Ariel Economía, Barcelona.

Anexo 1

1.1 Precio en el período *t*

1. 168.148	2. 176.405	3 185.075	4. 194.179	5. 203.738
6. 213.775	7. 224.314	8 235.379	9. 246.998	10. 259.198
11. 272.008	12. 285.459	13 299.582	14. 314.411	15. 329.981
16. 346.330	17. 363.497	18 381.522	19. 400.000	20. 400.000
21. 400.000	22. 400.000	23 400.000	24. 400.000	25. 400.000
26. 400.000	27. 400.000	28 400.000	29. 400.000	30. 400.000
31. 400.000	32. 400.000	33 400.000	34. 400.000	35. 400.000
36. 400.000	37. 400.000	38 400.000	39. 400.000	40. 400.000
41. 400.000	42. 400.000	43 400.000	44. 400.000	45. 400.000
46. 400.000	47. 400.000	48 400.000	49. 400.000	50. 400.000

1.2 Cantidad de recursos extraídas

1. 46.370	2. 44.719	3. 42.985	4. 41.164	5 . 39.252	6. 37.245
7. 35.137	8. 32.924	9. 30.600	10. 28.160	11. 25.598	12. 22.908
13. 20.084	14. 17.118	15. 14.004	16. 10.734	17. 7.301	18. 3.696

1.3 Nivel de Stock de Recursos

1. 453.630	2. 408.911	3. 365.926	4. 324.761	5. 285.509
6. 248.264	7. 213.127	8. 180.203	9. 149.602	10. 121.442
11. 95.844	12. 72.936	13. 52.852	14 35.734	15. 21.730
16. 10.996	17. 3.696			

Anexo 2.

2.1. Beneficios y precios en competencia oligopólica

	PERÍODO 1
10	Beneficios jugador 1
5	Beneficios jugador 2
5	Precio
	PERÍODO 2
10	Beneficios jugador 1
5	Beneficios jugador 2
5	Precio
	PERÍODO 3
10	Beneficios jugador 1
5	Beneficios jugador 2
5	Precio

CAPÍTULO XII

Opciones reales y la valuación del cambio tecnológico: un estudio de caso del sector energético mexicano.

Francisco Álvarez Echeverría

Universidad Francisco Gavidia, El Salvador

Resumen

La utilización de las opciones reales para la valuación del cambio tecnológico permite determinar en primer lugar la viabilidad del cambio o transición tecnológica; y en segundo lugar, si la empresa cuenta con la capacidad financiera para soportar el cambio tecnológico en un periodo dado. La valuación del cambio tecnológico por medio de opciones reales puede mejorar la capacidad del proceso de evaluación de alternativas, ya que éstas resultan ser herramientas flexibles para la toma de decisiones, permitiendo considerar las probabilidades de riesgo en la inversión, obteniéndose resultados y valores consistentes en condiciones reales de operación.

1. Introducción

Para la sobrevivencia de las corporaciones se requiere de una presupuestación efectiva del capital. Durante dicho proceso, los miembros de los consejos administrativos efectúan ciertas decisiones que comprometen los recursos y el desarrollo de la empresa, en las cuales se ve implicado no sólo el capital sino también el trabajo de la organización. En las formas tradicionales de presupuestación de capital se utiliza el flujo ajustado de dinero (DCF, por sus siglas en inglés) y algunos otros métodos para tal fin.

En la actualidad existen algunos estudios que muestran el incremento de la utilización de prácticas y sistemas sofisticados de presupuestación, en un amplio contexto, en donde el método del *DCF* ha dejado de ser exclusivo para el cálculo y el análisis de la incertidumbre financiera (Miller *et al*, 2003 y Chatterjee *et al*, 2003), ya que en la realidad dicho análisis resulta ser lineal y estático por naturaleza (Duku-Kaakyire *et al*, 2004) y asume que si las oportunidades de inversión no son totalmente reversibles, entonces no hay oportunidad de inversión. De la misma

forma, dentro del *valor presente neto* (VPN) subyace la misma filosofía, en la que un proyecto resulta ser factible cuando la organización puede explotar una ventaja competitiva temporalmente en ausencia de arbitraje o que éste resulte ser neutral al riesgo (Pinches, *et al,* 1997).

El modelo utilizado para el desarrollo de Valor Presente Neto (*VPN*) resulta ser muy comprensivo en la práctica y requiere de que los beneficios estratégicos sean identificados y cuantificados al inicio de cada etapa de inversión en el proceso de selección de alternativas, con la desventaja de que algunas opciones posibles podrían quedar latentes dentro del portafolio de opciones, sin tomar en cuenta que el valor estratégico a través del tiempo pudiera cambiar, dando como resultado que éste se destruya o se cree durante la implementación (MacDougall *et al*, 2003). Lo anterior conlleva a la posibilidad de inferir que las herramientas tradicionales de valuación de proyectos (*TIR, DCF*, *VPN*, etc.) son incapaces, tanto de valuar de una forma adecuada las inversiones en activos intangibles como el conocimiento, debido a su incapacidad de evaluación y decisión en situaciones de gran incertidumbre y del establecimiento de opciones iniciales de inversión (Coff *et al*, 2001); como de además de incorporar la información necesaria para una valuación más extensa de las opciones de inversión dentro de una organización (Dixit *et al*, 1994 y Trigeorgis, 1996).

En el campo de la Investigación y el desarrollo (*R&D* por sus siglas en inglés) las organizaciones toman y aceptan los riesgos para lograr su sobrevivencia a largo plazo. Los costos del desarrollo de nuevos productos en mercados de gran incertidumbre resultan ser bajos, en comparación con la inversión y los costos en que se debe de incurrir para su introducción al mercado global, regional y/o local. Dichos proyectos de investigación y desarrollo R&D, se caracterizan por estar inmersos en horizontes de planeación a largo plazo con un alto grado de incertidumbre, en donde el valor de la flexibilidad administrativa puede ser crucial (Weeds, 2002; Vedovoto *et* al, 2015, Turvey, 2001; Pennings *et al*, 1997), y es en este contexto que las opciones reales permiten a los administradores agregar cierto valor a las organizaciones al evaluar opciones de amplificación de los bienes de capital o mitigando las pérdidas en los mercados de operación (Brealey *et al,* 1991). Cuando se utilizan las técnicas tradicionales de evaluación de proyectos actuales (*VPN, DCF*, *etc*), éstas son capaces de administrar decisiones de espera de la inversión revisando adecuadamente la estrategia de operación inicial (Lander *et al*, 1998). Sin embargo, el cálculo del

valor de las decisiones de la administración no es simplemente el agregar o descontar cierto flujo de efectivo, sino que se deben establecer ciertas políticas estratégicas de inversión, así como el desarrollo de futuras oportunidades de entrada o salida de proyectos, expansión de la inversión, contracción de la producción y abandono del proyecto, las cuales a final de cuentas resultan ser meramente oportunidades u opciones dentro de la estrategia corporativa susceptibles de evaluarse; considerándose que el tiempo óptimo de la adopción tecnológica puede ser representado como un modelo de irreversibilidad (en lo que en inversión se refiere), en donde el *VPN* resulta ser una posibilidad subóptima dentro del espectro de las posibles soluciones (Doraszelsky , 2001).

Sin embargo, existen situaciones (complejas) adicionales a las existentes, las cuales conllevan a la utilización de mejores herramientas para la toma de decisiones, las cuales permiten incorporar y utilizar el método de las opciones reales, esto ocurre especialmente en áreas en donde existe una gran cantidad de estrategias interrelacionadas a través del tiempo dentro de un mismo proyecto de capital. Es en este contexto es en donde las opciones financieras comúnmente utilizadas para la valuación de activos muestran la incapacidad de valorar múltiples opciones dentro de los proyectos de inversión dentro de ambientes dinámicos o notan estáticos.

Dentro de las opciones reales, la incertidumbre cobra una especial importancia, si se considera que la ésta puede ser definida, como el espacio entre la información actual disponible y la información requerida y necesaria para la toma de decisiones, entonces es posible afirmar que existe una condición de incertidumbre en referencia a los capitales de inversión, ya que la inversión misma en condiciones dinámicas representa un riesgo, el cual debe de incorporarse al momento de evaluar el espacio maestral de los posibles resultados (posibilidades de inversión), sobre todo aquellos que tienden a poner en juego la sobrevivencia de la organización a corto, mediano y largo plazo.

2. Valuación financiera de inversiones y estrategias a través de opciones reales

La evaluación de proyectos de inversión a través de la utilización de opciones reales, se presenta como una herramienta viable y confiable dentro de entornos dinámicos, que puede ser incorporada al proceso de toma de decisiones en proyectos de inversión o en la selección de estrategias de negocios a implementarse (Amram, 2000), cuando existe la flexibilidad u opcionalidad de tomar en el futuro nuevas decisiones relacionadas con dichos proyectos en una fecha futura, como pueden ser (Kodukula *et al*, 2006; Lee, 2011; Venetsanos, 2002 y Cuervo, 2014): (1) La extensión de un proyecto o estrategia; (2) La contracción de un proyecto o estrategia; (3) La posposición de un proyecto o estrategia; (4) La corrección de un proyecto o estrategia; (5) valuación de dos o más activos (Baldi, 2010 y Bollen, 1998) y (5) El abandono de un proyecto, entre otras.

3. Valor Presente Neto y sus limitaciones

Mediante el criterio del Valor Presente Neto (*VPN*) un proyecto nuevo o una nueva estrategia se acepta o se rechaza hoy, si $VPN > 0$ ó $VPN < 0$, y no existe otra posibilidad (Hua *et al*, 2013 y Rogers, 2002). Una vez que un proyecto es aceptado con este criterio rígido, los planes de inversión no se modifican, es decir, la inversión es irreversible. Por otro lado, bajo el criterio del *VPN* no se puede valuar hoy la posibilidad de que si el entorno de negocios y el ambiente económico son favorables dentro de cinco años, un proyecto o estrategia pueda expandirse (Hua *et al*, 2013 y Rogers, 2002 y Venegas-Martínez, 2006), simplemente porque hoy no se sabe si en un futuro puedan existir las condiciones para adoptar tal decisión. Sin embargo, es posible plantearse una opción del proyecto o estrategia, el cual se ejercerá sólo si se presentan las condiciones que favorezcan el desarrollo de dicha opción. Esta opción o flexibilidad tiene un valor hoy que debería integrarse al valor estático que proporciona el *VPN* convencional a fin de valuar, en forma adecuada, un proyecto o estrategia que contemple la flexibilidad del desarrollo o implementación de nuevas opciones (Panayi *et al*, 1998; Venegas-Martínez, 2006).

Como consecuencia de lo anterior, un proyecto con un *Valor Presente Neto* < 0 podría incluso ser aceptado si existe la posibilidad de extenderlo, posponerlo, enmendarlo, etc.; en tal caso dicha flexibilidad u opcionalidad de tomar en un futuro una nueva decisión, tiene en el futuro un valor presente c; es decir $\overline{VPN} = VPN + c$ (Schwartz, 2013), entonces aunque $VPN < 0$, y si

$\overline{VPN} = VPN + c > 0$, la viabilidad de extender o implementar el proyecto o estrategia, es viable (Venegas-Martínez, 2006). Evidentemente, hay un factor de incertidumbre asociado a la volatilidad de los precios y costos de producción o de implementación, o incluso de otros factores involucrados en el mercado, en donde se desarrollan las operaciones de la organización, por lo que el riesgo puede considerarse, en este sentido, como una constante o como una variable (Panayi *et al*, 1998; Venegas-Martínez, 2006).

Lo anterior conlleva a inferir que mientras las opciones financieras tratan con activos financieros, las opciones reales tratan con activos reales, como pueden: ser unidades de negocio, obras e infraestructura, nuevas tecnologías, etc., los cuales son generados a través de proyectos de inversión (Venegas-Martínez, 2006). Entonces las opciones reales, a diferencia de las opciones financieras están basadas en series históricas de tiempo que permiten estimar la incertidumbre sobre el activo subyacente (ver Cuadro 1). Otra de las diferencias entre las opciones financieras, y las reales, radica en que el valor actual es el subyacente de la opción, mientras que en las opciones financieras el valor del subyacente es conocido y en las opciones reales el valor puede ser estocástico en el presente (del cual se derivan las ganancias o proyecciones posteriores).

Sin embargo, la incertidumbre en la estimación del valor del subyacente no cambiará el valor de la opción en el presente, ni tampoco la regla de inversión en la maduración de la opción, siendo lo anterior resultado directo de la irreversibilidad de la inversión. Cuando la opción se encuentra dentro del flujo de efectivo en el tiempo de maduración, la regla es invertir; pero cuando el valor del subyacente resulta ser de naturaleza estocástica, la opción podría estar fuera de toda consideración de inversión después de que el producto o el servicio ha sido introducido. No obstante, el valor del subyacente es un estimador neutral, por lo que el valor esperado como resultado del valor del proyecto es igual al valor estimado del subyacente. Es por ello que la regla de inversión en la maduración de la opción depende del valor del subyacente, siendo irrelevante lo que pudiera ocurrir alrededor de éste; en otras palabras, el error de estimación en el valor del subyacente no afecta el valor de la opción cuando esta es asumida con un valor igual a cero (Pennings *et al*, 1997).

Cuadro 1. Equivalencia de variables y distribuciones
dentro de las opciones las reales

Opción financiera	*Variable*	*Opción real*
Precio Stock.	S_t	Valor presente de los flujos de efectivo esperados (del activo).
Precio de ejercicio (precio strike).	K	Costo de inversión (costo de adquirir el activo).
Tasa de interés libre de riesgo.	r	Tasa de interés libre de riesgo.
Volatilidad del subyacente (variación de los retornos del activo).	σ	Volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto.
Tiempo de expiración.	$T-t$	Tiempo en que la oportunidad de invertir es viable o inviable.
Distribución normal estándar.	Φ	Distribución normal estándar.

Fuente: Adaptado parcialmente de Brach, 2003 y Venegas-Martínez, 2006.

4. Diferentes tipos de opciones reales

Considere un movimiento Browniano $(W_t)_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad equipado con una filtración aumentada; se supone que el valor presente de los flujos de efectivo esperados en *t,* S_t, es conducido por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t$$

Donde $\sigma(S_t, t)$ y $\mu(S_t, t) > 0$ son funciones conocidas. Para la valuación de proyectos de inversión de capital (mediante la consideración de diversas variables y escenarios) se pueden utilizar diversas clases de opciones reales (Lander *et al*, 1998; Mun, 2006; Hull, 2002, Cuervo, 2014; Rogers, 2002 y Venegas-Martínez, 2006), entre las cuales se tienen:

a) Opción real de expansión

$$c_{BS}(S_t,t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

En la cual $C_{BS}\ (S_t,\ t)$ es el modelo de Black & Scholes (1973) para valuar una opción de compra, siendo r la tasa libre de riesgo.

b) Opción real de contracción

$$c_c(S_T,T,K,N) = \min\left(\beta S_t + N, K\right)$$

Sea entonces M el costo de la inversión inicial en t. si el producto no tiene la aceptación esperada, la empresa puede invertir en la segunda etapa, una cantidad más pequeña N, $N < M$, lo que traerá como consecuencia una contracción, en una producción β, del valor presente de los flujos de efectivo esperados del producto subyacente esperado, En donde $K = M(e^{r\ (T\ -\ t)})$. Es decir, se invierte K o se invierte N; lo anterior trae como consecuencia una contracción de los flujos esperados, teniéndose entonces

$$c_c(S_t,\ t) = S_t\ e^{r(T\ -t)}\ - \alpha\ \mathrm{E}\left[\mathrm{S}_T\ 1_{\{0\ \le\ S_T\ \le\ L\}}\ \mid S_t\right]\ - \alpha\ \Phi\ (d) - N$$

donde

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{L}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ y } \quad L = \frac{K-N}{\alpha}$$

c) ***Opción real de cierre temporal***

$$c_x(S_t, T; \delta, K) = \max(S_t - X_t - a, S_t - C - a)$$

En donde "*a*" representa los costos fijos. Suponga que los flujos de efectivo esperados son conducidos por un movimiento geométrico browniano neutral al riesgo:

$$c_c(S_t,\ t) = S_t\ e^{r(T-t)} - \delta\left[\mathrm{E}\left[\mathrm{S}_T\ 1_{\{0 \le S_T \le L\}} \mid S_t\right] - \Phi\ (D_T)\right] - N$$

Por lo tanto

$$D_T = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{Y_t}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ y } \quad Y_t = \frac{X_t}{\delta}$$

Suponiéndose que el costo de cierre es C, el cual es una proporción fija, δ, del valor presente de los flujos de efectivo esperados del proyecto subyacente, S_t, es decir $C = \delta(\ S_t\ )$.

d) ***Opción real de permanencia***

$$c_p(S_t, T; K) = \max(\ S_t - K, 0)$$

Si la dinámica del valor presente de los flujos de efectivo esperados (FE) y considerando que la ecuación de los flujos de efectivo es conducida por la ecuación diferencial estocástica por $dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW_t$, entonces $C_p\ (S_t, t) = C_{BS}\ (S_t, t)$.

e) Opción real de abandono

Si el valor presente de los flujos de efectivo esperados en S_t es menor que cierto valor de recuperación V_t. En consecuencia, el valor intrínseco de esta opción real es:

$$c_a(S_t,T) = \max(S_t,V_t)$$

Si $V_t > S_t$ la opción s ejerce. Si V_t es constante, $V_t = K$, y la opción sólo puede ser ejercida en T, entonces

$$c_a(S_t,T) = \max(S_t,K) = \max(S_t - K,0) + K$$

En este caso,

$$c_a(S_t,t) = \int_0^{\infty}[\max(s-K,K)+K]F_{(s)ds} = c_{BS}(S_t,t)+K$$

f) *Opción real de cambio tecnológico*

$$c_s(S_t,T) = \max(S_2 - S_1 - K,0)$$

En donde S_1 es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en T en la forma de producción actual, S_2 es el valor presente de los flujos de efectivo esperados en T en el modo alternativo de producción, y K es el costo del cambio. Si $S_2 > S_1 + K$, entonces se ejerce la opción de cambio. En este contexto puede utilizarse también la expresión siguiente:

$$Call = S_2\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)+\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]-S_1\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)-\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]-S_1X\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)-\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Siendo S_1 y S_2 el valor de los activos o flujos de efectivo del subyacente (en este caso las tecnologías en cuestión), X es el costo proporcional con respecto a la tecnología 1 y S_1X son los costos asociados el cambio tecnológico.

g) Opciones real de expansión con costo de oportunidad

Utilizando la ecuación de Black y Scholes (1973) $c_{BS}(S_t,t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$, se modifica y tiene la siguiente expresión (donde q es igual al costo de oportunidad):

$$c_{BS} = S_t{}^{e^{-q(T-t)}}\Phi\left(\frac{\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

h) *Opciones reales compuestas*

$$c_{call}(S_t) = \max\left(K_1, c\left(S_t, T_2 - T_1; K_2\right)\right)$$

Sea S* el precio crítico del activo tal que $c_{BS}(S^*, T_2, K_2) = K_1$, es decir, S^* es tal que:

$$K_1 = S^*\Phi(\delta) - K_2\Phi\left(\delta - \sigma\sqrt{T_2}\right), \qquad \text{donde} \quad \delta = \frac{\ln\left(\frac{S^*}{K_2}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}$$

teniéndose entonces

$$c_{call}(S_t) = S_0\Omega(d,b;\rho) - K_2 e^{-rT_2}\Omega\left(d-\sigma\sqrt{T_1},b-\sigma\sqrt{T_2};\rho\right) - K_1 e^{-rT_1}\Phi(d-\sigma)\sqrt{T_1}$$

$$\therefore \quad d = \frac{\ln\left(\frac{St}{S}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \; b = \frac{\ln\left(\frac{St}{K_2}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}} \quad \text{y}$$

$$coeficiente\ de\ correlación = \rho = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

i) Opciones reales bajo el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales

Sea $(Wt)_{t\in[0,T]}$ un movimiento Browniano definido sobre un espacio fijo de probabilidad en el cual el valor presente de los flujos de efectivo esperados en t, S_t, es conducido por el proceso $dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dW_t$ donde $\mu(S_t, t)$, $\sigma(S_t, t)$ son funciones conocidas, entonces bajo condiciones de equilibrio, c satisface la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2}\sigma(S_t,t)^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t}S_t r - rc = 0$$

Sujeto a

$$c(0,t) = 0 \qquad y \qquad c(S_t,T) = h(S_t)$$

Donde r es la tasa de interés libre de riesgo y $h(S_t)$ es el valor intrínseco de la opción real.

j) Opciones reales binomiales

Las opciones binomiales fueron desarrolladas por Cox *et al* (1979), siendo un modelo de tipo discreto que considera que la evolución del precio del activo subyacente puede tomar dos valores posibles, uno de ellos con probabilidad de ocurrencia q y por consiguiente el otro con una probabilidad $1 - q$.; modelo cuyos supuestos básicos son (Venegas, 2006): La distribución es una binomial multiplicativa, u y d son constantes a través de todos los periodos, las varianzas de

los rendimientos son las mismas en todos los periodos y la tasa de interés libre de riesgo es constante. El modelo binomial puede ser expresado de la siguiente manera:

$$c_t = e^{-r(T-t)/n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \, cu^k d^{n-k}$$

Donde

$$u = e^{\sigma\left(\sqrt{T-t}\right)} \;\; y \quad d = \frac{1}{u}$$

k) ***Análisis de sensibilidad***

Toda vez que se ha utilizado la teoría opciones, en la obtención de resultados sobre los diferentes tipos de opciones de inversión es posible efectuar un análisis de sensibilidad a través de ciertas funciones como son Delta, Gamma, Rho, Theta, Vega y Xi (Mun, 2006). Por definición el análisis de sensibilidad permite observar el cambio o variación de los resultados, debido al incremento o decremento en una unidad(es) de la variable(s) analizada(s) de manera específica. En este sentido, se tiene que Delta provee el cambio del valor de la opción dada, debido a un cambio en el valor presente del activo subyacente (flujo de efectivo), donde $Delta = \Delta = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1)$; Gamma provee la tasa de cambio de valor de una Delta dada por unidad de cambio del activo subyacente $Gamma = \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_t} = \frac{e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{S_t \sigma \sqrt{2\pi T}}$; (3) Rho provee el cambio del valor del activo subyacente debido a la variación unitaria de la tasa de interés libre de riesgo utilizada para el cálculo de los rendimientos futuros $Rho = P = \frac{\partial C_t}{\partial r} = KTe^{-rt}N(d_2)$; (4) Theta provee el cambio del valor por unidad de tiempo $Theta = \theta = \frac{-\partial C_t}{\partial T} = \frac{-S\sigma e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{2\sqrt{2\pi T}} - rKe^{-rt}N(d_2)$; Vega provee el cambio generado por el cambio del decremento/incremento por una unidad de volatilidad, $Vega = V = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = \frac{S_t\sqrt{T}e^{\frac{-d_1^2}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}$; y Xi permite observar el cambio generado por el

incremento/decremento de unidad por unidad de costo en el valor del activo subyacente $Xi = \Xi = -N(d_2)e^{-rt}$.

5. Opciones reales y sus aplicaciones

Las opciones reales antes descritas han sido ampliamente utilizadas para la valuación de diversos activos en diferentes y áreas como son (Lander *et al*, 1998): manufactura, bienes estatales, investigación y desarrollo, inventarios, tasas de interés, fuerza laboral, riesgo de capital, publicidad, efectos de histéresis, competitividad, estrategias corporativas, recursos naturales, conservación ambiental, generación eléctrica, entre otras. La versatilidad de las opciones reales dentro del cambio tecnológico ha cobrado relevancia, sobre todo en el sector energético, aunque generalmente se deben de plantearse algunos supuestos para valorar adecuadamente dichas opciones. Por ejemplo, supóngase que en México se quisiese evaluar la posibilidad de realizar un cambio tecnológico en la generación de energía eléctrica con el fin de reducir las emisiones contaminantes y/o de optimizar los costos operativos y de producción, a través de la mejora o introducción de una nueva tecnología para la generación de energía eléctrica, pudiéndose utilizar diferentes tipos de opciones reales para tal fin (Deng *et al*, 2001; Kirby *et al*, 2010; Moreira *et al*, 2004; Kjaerland *et al*, 2010; Laurikka, 2006; Deng *et al*, 2001; Barria *et al*, 2011; Madlener *et al*, 2012; Gollier *et al*, 2005; Naito *et al*, 2010; Lee, 2011 y Hua *et al*, 2013).

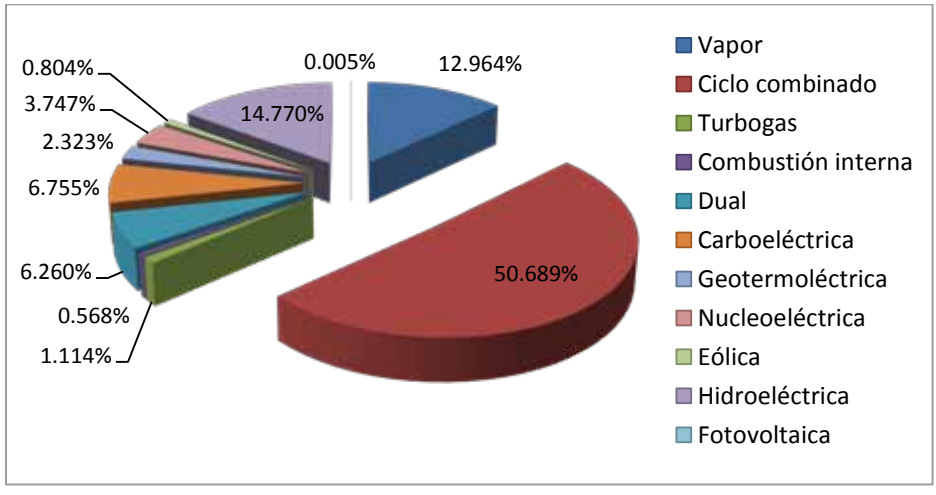
En este contexto, la Secretaría de Energía (SENER) y la Comisión federal de Electricidad (CFE) de México, podrían intentar sustituir las plantas carboeléctricas por nucleoeléctricas[1], con el objeto de no sólo buscar mayor eficiencia e independencia en la generación energética, sino también disminuir considerablemente las emisiones de gases de efecto invernadero u otro tipo de afectaciones a la salud y al ambiente (Bazán-Perkins, 2005), y de paso obtener cierta independencia energética en la generación de energía a través de sistemas de producción menos contaminantes y no dependientes de combustibles fósiles, que pueden resultar menos costosos que los sistemas carboeléctricos (MIT, 1977). Este tipo de iniciativas como bien lo plantea la SENER (2013) en el documento de Prospectiva del Sector Eléctrico, contribuyen también no

[1] Se realizó la comparativa entre dichas tecnologías debido a que la suma de la capacidad neta instalada de las carboeléctricas de 1675.1 MW (COPAR, 2013) es o podría ser equiparable a una unidad de generación nucleoeléctrica con una capacidad neta instalada de 1351 MW (COPAR, 2013).

sólo a la obtención de ahorros sustanciales en los costos de operación y mantenimiento de los sistemas de generación, sino que también a reducir las perturbaciones generadas por el cambio climático debido a las emisiones de CO_2, las cuales en un futuro podrían tener un costo económico y ambiental muy alto y de difícil reversión (Xinhua *et al*, 2011).

Entonces, si se quisiese evaluar la viabilidad del cambio tecnológico entre dichas tecnologías se tendría que realizar, en primera instancia, una comparativa en la cual los flujos de efectivo de cada una de las tecnologías juegan un papel fundamental dentro de la valuación e implementación del cambio tecnológico. Entonces suponiendo que se desea valuar económicamente las tecnologías en cuestión, y con el objeto de determinar la viabilidad de la transición de un modo de producción a otro, en primera instancia se hace fundamental recopilar la información necesaria para tal fin, y para ello se requiere analizar la generación bruta de energía por tecnología en la República mexicana (ver Figura 1), observándose que la mayor parte de la generación se realiza a través de proceso de ciclo combinado, existiendo la posibilidad de ampliar la capacidad de tecnologías más limpias, en aras de sustituir aquellas que utilizan combustibles fósiles para su funcionamiento.

Figura 1. Generación bruta de energía por tecnología en el año 2014.



Fuente: Elaboración propia a partir de datos de SENER (2015) con datos del año 2014.

Es entonces de esta forma que para valorar el cambio o sustitución tecnológica de manera efectiva, se hace necesario evaluar los diferentes tipos de tecnología, con el objeto de verificar la viabilidad e idoneidad del cambio, en lo que al modo de producir se refiere, y los costos e ingresos asociados a éstas tecnologías, así como los beneficioso riesgos a través del tiempo, lo cual es posible de realizarse a través de las opciones reales (Epaulard *et al*, 2001; Takizawa *et al*, 2001 Gollier *et al*, 2005).

En este sentido, y para que la comparación tecnológica sea efectiva, se hace necesaria la evaluación de los flujos de históricos de cada una de las tecnologías involucradas, con el afán de determinar la rentabilidad del cambio; para luego valorar si los flujos de efectivo de la entidad son suficientes a través del tiempo para soportar la inversión necesaria para la realización dicha sustitución de tecnológica, se obtuvo la información necesaria a partir de portales oficiales (SENER, 2015) como es[2]: (1) La generación bruta anual total a nivel nacional (ver Cuadro 3); (2) El histórico de generación mensual bruta de energía en MW-h de cada una de las tecnologías en cuestión (ver Cuadro 4); y (3) Los productos obtenidos por la venta de energía eléctrica (ver Cuadro 3).

Cuadro 3. Histórico de Producción bruta anual de energía y ventas totales de energía a nivel nacional en la República mexicana

Año	*Producción bruta anual (MW-h)*	*Ventas totales por año (en miles)*	*Precio ($/MW-h)*
2002	200,362,388.29	115,593,715.44	576.92
2003	202,595,550.71	136,069,905.83	671.63
2004	207,018,877.63	156,128,125.29	754.17
2005	217,158,778.07	174,231,816.69	802.32
2006	223,563,511.54	199,551,308.13	892.59
2007	230,926,638.93	212,651,126.37	920.86
2008	234,096,292.46	252,569,493.08	1078.91
2009	233,471,637.74	219,914,531.27	941.93

[2] Los datos base se obtuvieron de la información publicada por la SENER en su portal Web y posteriormente fueron adaptados para su análisis y visualización.

2010	241,490,894.83	249,234,879.31	1,032.07
2011	257,883,545.48	286,843,393.25	1,112.30
2012	260,497,832.13	307,927,933.96	1,182.07
2013	257,860,107.02	314,163,009.63	1,218.35
2014	258,255,774.32	328,197,628.04	1,270.82

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de SENER, 2015.

Lo anterior, resulta de gran importancia, ya que dichos datos se requerirán para la obtención de los flujos de efectivo, tanto para las carboleléctricas como para la nucleoeléctrica. Una vez obtenidos los datos, producción bruta de energía en MW-h de cada tecnología y los productos obtenidos por la venta de energía eléctrica, es posible obtener el precio de venta ($/MW-h) por Megawatts producido por año de operación (columna 4 del Cuadro 3) si se divide la columna 2 del Cuadro 3 entre la columna 3 del mismo Cuadro. Una vez obtenido el precio de venta por año, de cada Megawatt producido, se multiplicó por los valores contenidos en el Cuadro 4, con el fin de calcular los flujos de efectivos históricos mensuales para cada una de las tecnologías a evaluarse (ver Cuadro 5).

Como se mencionó anteriormente, como primer paso se debe de valuar el cambio tecnológico a través de una comparativa eficiente de las tecnologías en cuestión, para lo cual es posible utilizar un call de una opción real europea de cambio tecnológico como es:

$$Call = S_2\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)+\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]-S_1\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)-\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]-S_1X\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_2}{(1+X)S_1}\right)-\frac{T\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Cuadro 4. Histórico De Generación Mensual Bruta De Energía (Mw-H)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
	CARBOELÉCTRICA												
ENE	1198,639.81	1446,067.40	1505,231.59	1293,983.27	1337,135.97	1646,572.38	1563,063.88	1540,015.43	1583,202.50	1420,880.69	1255,297.87	1370,914.38	1226,110.69
FEB	1249,613.26	1291,064.74	1521,937.16	1248,642.67	1380,747.95	1434,986.11	1307,193.39	1071,807.06	1613,382.71	1383,544.04	1325,546.45	1197,218.01	1325,847.43
MAR	1415,324.03	1415,877.87	1677,191.29	1634,597.77	1399,031.09	1503,451.66	1258,387.62	1560,838.12	1527,626.01	1599,601.19	1387,608.34	1391,532.47	1663,051.01
ABR	1395,186.41	1434,799.67	1511,446.41	1661,237.33	1519,963.66	1497,188.25	1349,202.76	1275,609.13	1239,244.62	1482,954.51	1524,780.77	1294,098.20	1556,761.12
MAY	1325,433.96	1613,254.82	1574,885.54	1749,564.78	1560,251.57	1559,011.01	1568,213.53	1343,168.78	1235,416.91	1569,946.11	1532,975.41	1316,525.04	1682,528.34
JUN	1412,256.47	1568,006.48	1607,750.40	1632,826.84	1529,164.91	1616,492.10	1430,120.48	1487,631.39	1463,658.79	1715,257.00	1709,320.31	1478,693.19	1648,861.22
JUL	1486,235.12	1542,591.67	1643,289.22	1636,161.51	1565,114.47	1578,635.13	1498,398.80	1632,611.72	1188,289.15	1734,237.27	1701,712.54	1634,064.98	1716,390.83
AGO	1356,432.24	1527,015.01	1639,725.79	1481,635.89	1499,914.17	1600,364.93	1438,701.66	1594,712.27	1632,877.69	1787,668.96	1786,348.46	1710,327.50	1733,310.37
SEP	1354,403.20	1173,229.35	1330,803.49	1571,802.64	1379,058.70	1425,879.70	1434,134.50	1289,271.21	1399,676.06	1517,588.51	1615,612.04	1307,896.44	1377,527.55
OCT	1424,942.70	1233,691.15	1175,878.47	1437,176.38	1512,565.62	1498,746.64	1630,414.30	1366,550.11	1262,237.98	1444,757.37	1491,090.51	1210,806.87	1179,134.40
NOV	1324,026.80	1107,893.19	1314,732.00	1534,446.52	1518,397.35	1312,046.56	1608,691.27	1250,485.56	1130,537.74	1270,991.43	1234,332.23	1043,341.85	1187,528.02
DIC	1209,416.86	1327,707.52	1380,388.86	1498,206.03	1729,857.93	1427,346.00	1702,618.28	1473,508.89	1208,925.80	1231,003.46	1159,478.22	1088,981.07	1148,875.72
	NUCLEOELÉCTRICA												
ENE	876,289.94	992,893.61	1002,767.38	982,254.03	1003,830.77	953,012.61	1005,625.01	957,932.36	1026,665.31	508,564.01	726,190.85	1005,574.83	1058,735.57
FEB	754,325.92	900,318.96	888,623.39	836,743.27	872,213.44	884,814.39	941,393.38	912,359.00	884,994.48	732,546.89	786,130.22	896,006.03	904,446.87
MAR	856,624.50	996,844.37	890,530.66	984,458.78	912,876.14	527,367.16	995,613.80	969,952.51	719,976.49	855,660.03	1176,055.88	1015,175.96	760,547.73
ABR	959,951.13	869,261.48	614,109.64	958,967.10	768,902.78	890,071.38	934,997.67	526,341.94	486,696.19	715,032.38	1142,522.98	1013,613.17	476,513.27
MAY	985,242.91	455,165.76	495,340.99	974,412.59	676,425.04	978,976.04	987,806.49	473,705.75	504,147.57	886,492.07	1137,919.65	1043,170.52	791,289.08
JUN	905,167.81	643,793.80	579,457.24	949,720.34	940,989.23	915,344.73	875,803.08	956,983.63	487,365.06	718,316.33	1056,438.61	1000,962.78	601,924.12
JUL	906,859.25	969,803.80	929,977.72	970,397.46	952,926.62	980,552.50	976,359.60	962,929.80	390,647.25	1015,333.09	960,483.37	939,105.43	519,269.48
AGO	887,566.27	974,585.60	968,657.53	800,370.65	972,123.04	961,821.02	862,456.35	997,911.14	366,775.77	1042,552.94	325,234.87	1032,722.55	888,151.30
SEP	640,656.75	938,513.08	839,409.39	581,702.33	933,948.44	889,194.36	479,263.06	970,213.79	374,989.26	997,193.14	67,531.25	923,267.91	987,924.10
OCT	490,987.73	989,355.07	707,140.58	852,487.05	905,855.33	640,703.17	460,124.29	968,364.62	173,715.08	883,169.73	212,845.37	883,020.43	748,538.58
NOV	593,556.55	776,695.00	477,366.72	946,766.56	935,050.77	828,558.36	454,269.98	853,141.73	232,985.39	683,181.20	503,575.88	990,726.12	945,138.53
DIC	889,392.36	994,277.25	800,554.13	966,625.88	991,099.49	970,309.30	830,263.57	951,242.63	230,282.80	1051,153.22	674,669.88	1056,523.88	994,729.44

Fuente: Elaboración propia a partir de la de datos de SENER, 2015.

CUADRO 5. HISTÓRICO DE FLUJOS DE EFECTIVO ENERGÍA POR TECNOLOGÍA (En miles de pesos)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
	CARBOELÉCTRICA												
ENE	691,523.14	720,930.91	816,533.30	804,915.44	764,673.64	814,763.56	857,443.56	782,557.26	781,386.67	822,082.54	763,861.81	697,740.67	9318,412.51
FEB	834,269.87	744,845.23	816,852.83	827,769.25	930,724.18	904,619.36	889,956.96	880,970.43	676,863.26	711,745.08	639,169.32	765,985.31	9623,771.07
MAR	868,403.06	878,040.90	967,610.61	871,988.54	908,588.05	927,548.55	948,051.72	945,995.89	767,771.44	678,391.60	758,499.42	796,378.39	10317,268.17
ABR	746,529.00	720,370.96	943,037.42	958,406.40	1009,364.56	942,015.73	943,939.58	854,790.16	906,809.45	829,140.43	885,257.84	864,349.86	10604,011.37
MAY	771,424.80	796,585.56	807,133.53	876,902.34	900,145.37	882,210.75	902,950.89	865,335.32	795,610.99	872,634.24	875,998.70	997,995.22	10344,927.71
JUN	949,945.85	827,876.82	867,376.18	863,762.68	899,429.66	932,591.84	910,751.27	923,287.70	822,623.12	864,661.75	756,950.13	823,469.06	10442,726.05
JUL	901,767.86	754,150.23	725,993.05	778,386.41	904,738.81	825,069.72	864,461.07	830,020.40	827,385.50	940,623.88	928,091.36	982,280.03	10262,968.31
AGO	888,470.67	618,350.39	900,483.76	735,928.53	774,905.27	858,249.10	941,891.62	920,026.55	743,810.51	788,394.50	721,434.16	850,101.50	9742,046.56
SEP	913,386.29	930,797.96	881,322.92	714,949.00	712,740.71	844,418.75	685,551.61	942,045.07	807,505.63	728,214.40	652,233.48	697,457.37	9510,623.20
OCT	819,739.07	798,198.69	922,847.08	855,550.90	905,738.37	989,571.60	1000,521.76	1031,347.74	875,532.06	833,514.08	733,264.47	710,194.49	10476,020.32
NOV	724,210.50	764,738.53	800,543.48	879,681.44	884,409.12	986,146.59	981,757.49	1030,585.92	932,084.11	860,244.75	712,114.93	668,929.91	10225,446.77
DIC	790,912.35	690,702.88	802,807.40	746,595.31	759,533.87	853,092.45	942,730.04	986,727.66	754,555.83	698,542.61	601,928.15	628,258.47	9256,387.01
	NUCLEOELÉCTRICA												
ENE	505,552.02	435,188.14	494,206.57	553,818.10	568,409.52	522,212.33	523,188.17	512,057.60	369,609.76	283,262.23	342,436.56	513,111.11	505,552.02
FEB	572,823.38	519,414.92	575,102.67	501,497.14	262,595.70	371,419.60	559,502.34	562,261.07	541,449.99	570,781.92	448,093.39	573,621.64	572,823.38
MAR	578,519.79	512,667.47	513,767.82	354,294.11	285,773.72	334,302.34	536,525.75	558,841.03	484,274.77	407,965.82	275,403.95	461,858.27	578,519.79
ABR	566,685.16	482,736.63	567,957.14	553,250.39	562,161.25	547,915.72	559,844.83	461,752.42	335,597.58	491,819.58	546,211.62	557,668.92	566,685.16
MAY	579,133.29	503,200.19	526,659.45	443,597.87	390,245.32	542,878.54	549,765.50	560,840.36	538,816.55	522,608.98	539,452.51	571,788.32	579,133.29
JUN	549,815.11	510,469.97	304,250.36	513,502.85	564,794.02	528,083.63	565,703.51	554,896.89	512,996.88	369,636.54	478,014.56	559,793.97	549,815.11
JUL	580,168.43	543,111.71	574,392.73	539,421.87	569,888.51	505,271.14	563,284.53	497,571.10	276,497.99	265,456.39	262,078.90	478,998.34	580,168.43
AGO	552,653.43	526,361.10	559,588.13	303,658.89	273,291.85	552,106.08	555,536.57	575,718.11	559,738.87	558,672.04	492,197.28	548,793.97	552,653.43
SEP	592,307.06	510,573.87	415,371.16	280,786.34	290,854.44	281,172.22	225,373.47	211,601.46	216,340.01	100,220.26	134,414.68	132,855.50	592,307.06
OCT	293,402.39	422,623.32	493,650.14	412,518.78	511,437.87	414,413.38	585,769.24	601,473.00	575,303.88	509,521.13	394,143.10	606,434.71	293,402.39
NOV	418,956.37	453,536.78	678,493.95	659,148.04	656,492.27	609,483.97	554,125.17	187,635.55	38,960.35	122,795.44	290,524.62	389,232.72	418,956.37
DIC	580,139.47	516,926.69	585,678.59	584,776.98	601,829.30	577,478.68	541,791.74	595,801.63	532,654.70	509,434.99	571,572.91	609,533.17	580,139.47

Fuente: Elaboración propia.

Donde S_1 y S_2 son los valores de los activos subyacentes, siendo S_2 la tecnología a implementarse y X es el costo proporcional de la tecnología actual S_1 con respecto a la tecnología a implementarse S_2, siendo deseable que el valor de S_2 exceda al de S_1. En este sentido, se calculó la volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo (ver Cuadro 6 y Figura 2) a través del método logarítmico. Para el cálculo de la volatilidad se realizó un promedio[3] histórico de las dos variables. Para el cálculo de S_1 y S_2 se utilizaron los promedios históricos anuales contenidos en el Cuadro 5. El valor de X se calculó a través de los datos contenido en la COPAR[4] (2013), donde se especifica que los costos unitarios de inversión (en dólares/kW_{bruto}) son de alrededor de 4,500 para las nucleoeléctricas –coincidiendo con el BID (2010)–, siendo que para todo el sistema carboeléctrico de 6,054, dando como resultado de un factor del 0.7433 como relación de costo proporcional.

Cuadro 6. Volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo

Año	*Volatilidad anualizada de flujos de efectivo de carboeléctrica*	*Volatilidad anualizada de flujos de efectivo de nucleoeléctrica*
2002	24.79%	72.38%
2003	42.72%	102.13%
2004	33.95%	104.84%
2005	35.63%	64.87%
2006	21.38%	47.01%
2007	27.62%	96.16%
2008	33.30%	95.72%
2009	70.90%	104.81%
2010	56.37%	94.81%
2011	31.83%	86.31%
2012	31.71%	267.71%
2013	45.06%	30.25%
2014	42.10%	112.80%

Fuente: Elaboración propia.

[3] Todos los promedios calculados en el presente trabajo, se obtuvieron a través el método geométrico, a menos que se indique lo contrario en el texto.
[4] Costos y Parámetros de Referencia para la Formulación de Proyectos de Inversión del Sector Eléctrico

Cabe señalar que cada una de las tecnologías genera una serie de costos derivados de la operación y el mantenimiento de las mismas (fijos y variables), teniéndose un costo integrado de mantenimiento y operación para las nucleoeléctricas de $14.14 USD por MW producido (COPAR, 2013), y el sistema carboeléctrico de manera integrada, posee un costo de mantenimiento y operación de $ 24.94 USD por MW producido (COPAR, 2013). Para el caso de los costos de operación y mantenimiento (O&M) se multiplicó la columna 1 del Cuadro 7 por el costo respectivo correspondiente a cada tecnología, obteniéndose los siguientes valores:

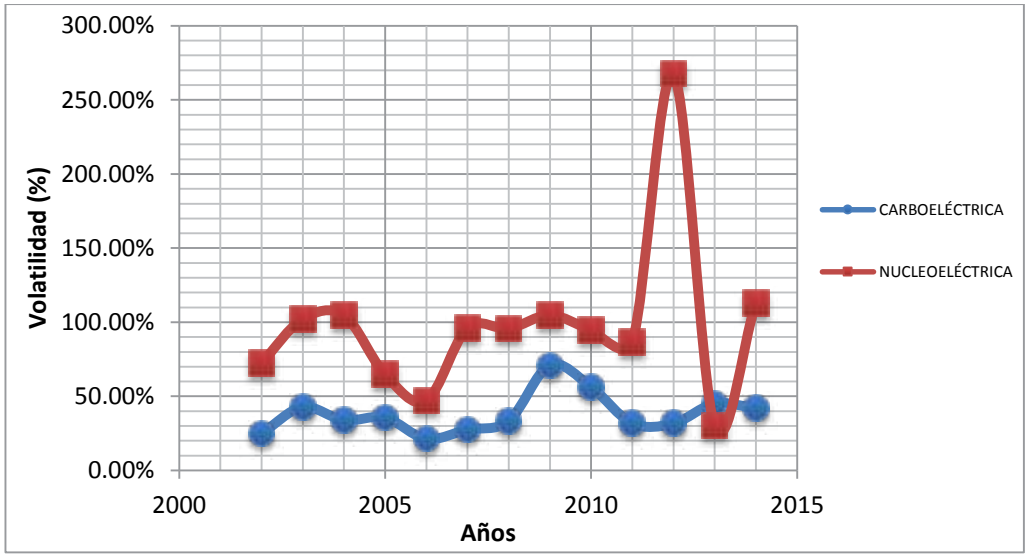
Cuadro 7. Flujos de efectivo promedio y costos de mantenimiento y operación

	Carboeléctrica	***Nucleoeléctrica***
MW-h promedio de generación en 12 años*	17,358,604.76	9,850,315.671
FE promedio de generación en 12 años (en pesos)*	10,014,582,258	5,682,875,895**
Volatilidad periódica anualizada promedio	38.26%	98.44%
Costos O&M de plantas (en pesos)	6,623,731,121	2,131,036,993

*****Los promedios de generación se obtuvieron a través del promedio aritmético de los datos contenidos en el Cuadro 5. ** Cuando no se tienen datos específicos para nucleoeléctricas, es posible calcular los flujos de efectivo a través de modelos específicos como el de Rothwell (2006).

Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo



de los sistemas de generación carboeléctrico y nucleoeléctrico.

Fuente: Elaboración propia.

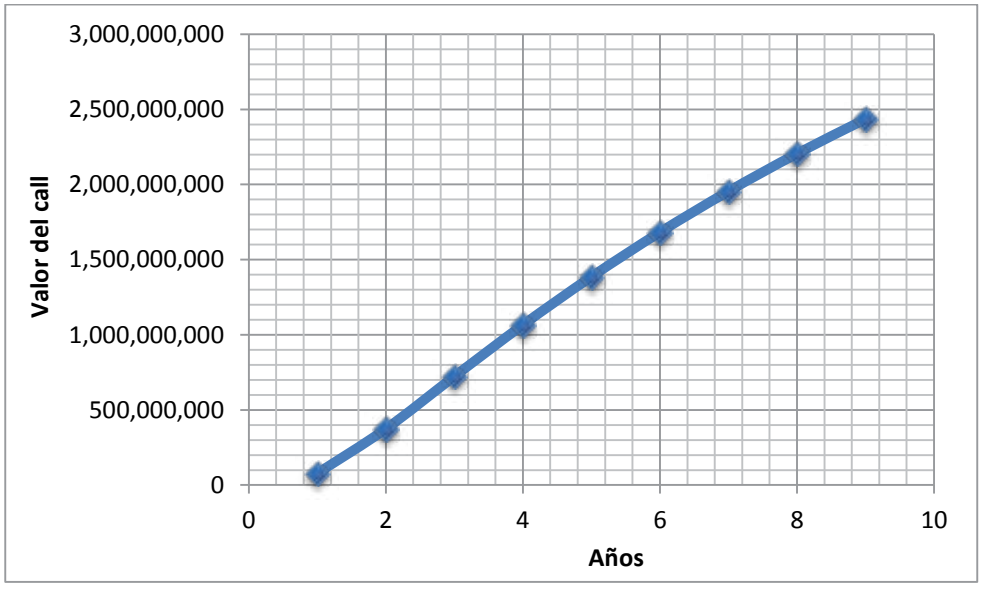
En el Cuadro 8 se presentan los resultados obtenidos a través del análisis del cambio tecnológico o *switching options* (el valor del call resulta positivo desde el primer año), mostrándose que resulta factible el cambio de un sistema carboeléctrico a un sistema nucleoeléctrico (ver figura 3); sobre todo si se analizan los flujos de efectivo y los costos de operación de cada una de las tecnologías, ya que los costos de operación de las carboleléctricas representan el 66.14% de sus ingresos; en cambio los costos operativos de las nucleoeléctricas representan el 37.49% de sus ingresos, es decir, que en términos totales las ganancias netas antes de impuestos del sistema nucleoeléctrico son 1.04 veces mayores que el del sistema carboeléctrico, pudiéndose inferir que éste último resulta hasta cierto punto ineficiente en diversos aspectos, que a la postre resultan determinantes en su desempeño financiero.

Cuadro 8. Resultados de valuación del call de la opción real de cambio tecnológico

AÑO	*Z1*	*Z2*	*Z3*	*T (AÑOS)*	*φ1*	*φ2*	*φ3*	*c(0,T)*
1	-1.52	-2.14	-2.14	1	0.06401	0.01635	0.01635	78,252,644.59
2	-0.86	-1.73	-1.73	2	0.19511	0.04207	0.04207	374,265,321.79
3	-0.52	-1.59	-1.59	3	0.30000	0.05621	0.05621	723,438,817.77
4	-0.30	-1.53	-1.53	4	0.38182	0.06324	0.06324	1,065,721,713.29
5	-0.13	-1.50	-1.50	5	0.44759	0.06629	0.06629	1,386,347,217.08
6	0.01	-1.50	-1.50	6	0.50200	0.06703	0.06703	1,682,487,464.55
7	0.12	-1.50	-1.50	7	0.54800	0.06641	0.06641	1,954,855,464.09
8	0.22	-1.51	-1.51	8	0.58758	0.06495	0.06495	2,205,210,761.71
9	0.31	-1.53	-1.53	9	0.62208	0.06299	0.06299	2,435,529,919.03

Fuente: Elaboración propia.

Figura 3. Evolución del call de la opción real de cambio tecnológico a través del tiempo.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez determinada la viabilidad del cambio tecnológico se hace necesario realizar la valoración de la capacidad de la organización de soportar financieramente el cambio tecnológico a través del tiempo, ya que una adopción tecnológica puede ser técnicamente factible pero no necesariamente económicamente viable, y en este caso en particular, el flujo de efectivo de los ingresos por la venta de energía por parte de las tecnologías carboeléctricas en cuestión, no son suficientes como para posibilitar la implementación tecnológica a corto, mediano o largo plazo. Es por ello que se requiere de un análisis de la capacidad económica de la empresa para tal fin, pudiéndose observar en el Cuadro 10 los flujos de efectivo derivados, del producto de las venta de energía a nivel nacional.

CUADRO 10. PRODUCTOS TOTALES POR LA VENTA DE ENERGÍA ELÉCTRICA A NIVEL NACIONAL (En pesos)

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
ENE	8243714737	8124769623	8057641469	8539062584	9476286000	9863540470	10411583740	10742546210	10945804150	10716881430	10066052480	10405832550	8243714737
FEB	10363193099	10168217813	10465153020	10583746149	11924477146	12198784388	12214922900	12041002034	11903291783	11675843647	11438738982	11092534868	10363193099
MAR	11449212233	11166981788	11701056342	11462990227	12654071498	13067628481	14001661017	14540566527	14772268637	14399474068	13531105425	13381109047	11449212233
ABR	13775359450	13265130990	13133790680	13231927850	13929564020	14596503520	15482649570	15607008040	15549588680	15427936830	15162611890	15069745170	13775359450
MAY	15619045100	15073171450	15441571380	14874563490	16158957110	16673833200	17736836950	18280518620	18142125780	17594929770	17257511920	16698243360	15619045100
JUN	16951073730	16247938000	16527149810	15745664800	16979070980	17330320670	18240328790	19137263990	19360020700	18999478990	18856931220	18275884690	16951073730
JUL	18299773000	18260855030	18574428320	19111428210	20850999350	21640113780	22728363220	23818143600	23899102580	23109619750	22008625240	20268041000	18299773000
AGO	18702211772	16838302454	17163711714	17062389986	18151253821	18073094358	18713013940	19043676775	19919668871	18871215793	18816625805	18559365981	18702211772
SEP	18711532017	18604713916	20369413240	19897879933	20442106756	21173635002	23092936889	22574746922	23053702021	21246668629	20878080472	19189463518	18711532017
OCT	20187475411	20484075727	22116195196	21987137571	23953236144	25198005212	26067023603	26133774017	26397751783	25546690188	24621688451	24150339948	20187475411
NOV	24551716057	24278097159	24880644747	24422582427	26251106307	26482581641	27422033367	27799543813	26994053931	25719275193	25374612884	23751686431	24551716057
DIC	24675615264	23559179923	23525971365	24444246660	26859063684	29246349940	27763782445	28397901206	27167661455	27045152330	26562661472	24915423885	24675615264
TOTAL	**115593715443**	**136069905829**	**156128125290**	**174231816690**	**199551308130**	**212651126370**	**252569493080**	**219914531270**	**249234879315**	**286843393251**	**307927933957**	**314163009629**	**328197628036**

Fuente: elaboración propia a partir de datos de SENER, 2015.

Para realizar la valoración de la viabilidad económica del cambio tecnológico es posible utilizar el call de una opción real de expansión, como sería el siguiente:

$$c_{BS}(S_t, t) = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

Siendo

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Donde *St* es el valor presente de los flujos esperados en *t*, *K* es el costo de inversión en *T*, *r* es la tasa de interés libre de riesgo, σ es la volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto, y *T* – t es el tiempo en que la oportunidad de invertir desaparece. Cabe mencionar que para determinar la estructura de plazos de la tasa libre de riesgos (ver Figura 4), se utilizaron los datos históricos de la tasa de los Certificados de la Tesorería (CETES) a 1 año (subastados mensualmente) con datos comprendidos entre el 26/01/2012 hasta el 11/12/2014 (Banco de México, 2015). Para el cálculo se utilizó el modelo de tasa corta de Cox, Ross y Rubinstein (1979) el cual puede ser representado a través una ecuación diferencial estocástica como es la siguiente:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$$

cuya ecuación discreta puede escribirse como

$$y_{t+1} = \beta_1 y_t^{-1} + \beta_2 y_t + \varepsilon_t$$

donde

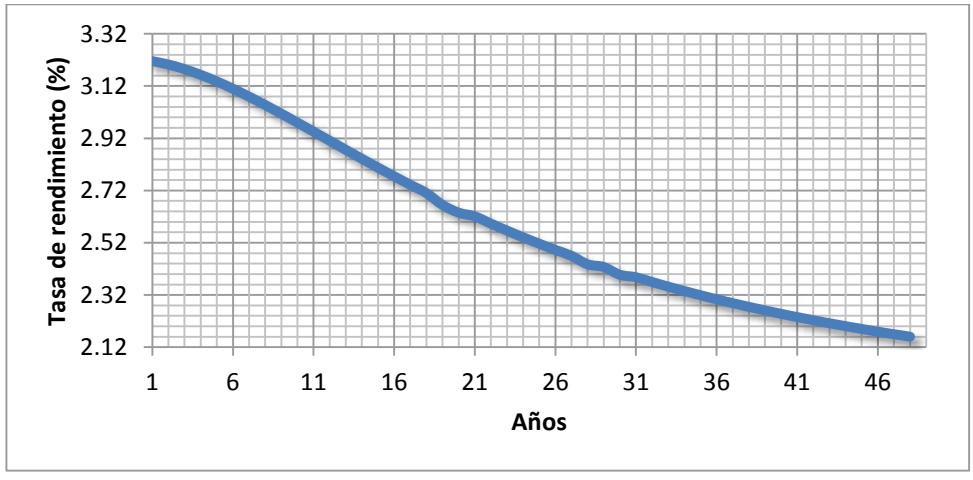
$$y_t = 2\sqrt{r_t}\,,\ \beta_1 = 2ab - \left(\sigma^2/2\right),\ \beta_2 = 1 - \left(a/2\right)$$

y

$$\varepsilon_t \approx N\left(0,\sigma^2\right) \text{ donde } \quad \tilde{a} = 2\left(1-\tilde{\beta}_2\right) \quad \text{y} \quad \tilde{b} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{4\tilde{a}} = \frac{2\tilde{\beta}_1 + \tilde{\sigma}^2}{8\left(1-\tilde{\beta}_2\right)}$$

Cabe señalar que por el cambio tecnológico antes planteado, es posible obtener beneficios asociados al cambio de tecnología, como son los beneficios adicionales de la no emisión de CO_2 (BANECO), es decir, que partiendo de que hasta el año 2014 se han emitido en promedio[5], debido a la producción de energía a través de las carboeléctricas, al menos 18,799,021 toneladas de CO_2 desde el año 2002 al mes de diciembre de 2014 (ver Cuadro 9), además de otros contaminantes (SO_2 y NOx) de efecto invernadero y materia particulada. Es por ello que el cambio tecnológico a un sistema de producción menos contaminante contribuiría al mejoramiento del entorno inmediato de forma importante.

Figura 4. Estimación de la estructura de plazos de la tasa libre de riesgo a través del modelo CIR a partir de la tasa de rendimientos de CETES.



Fuente: Elaboración propia.

[5] Considerando los datos de la COPAR (2013), donde se establece que por cada MW-h producido a partir del carbón, se emiten 1082.98 kg de CO_2, 4.52 kg de SO_2, 1.30 kg de NOx y 1.01 kg de materia particulada.

Sin embargo, dicho cambio tecnológico no sólo posee beneficios ambientales asociados a éste, sino que también es posible obtener recursos económicos adicionales por dicha transición tecnología, si esas no emisiones se pudiesen titularizar bajo un esquema de *CO_2 bonus-malus system*[6] (Baldi, 2010 y Kiriyama *et al*, 2004) estas emisiones podrían generar rendimientos adicionales anuales por $2,013,375,232,511 de pesos (considerando que cada acción pudiera colocarse a $7.00 USD por tonelada (CEC, 2014).

Entonces, si se parte del principio de que una opción real se encuentra circunscrita en un esquema donde una opción real es igual a $\overline{VPN} = VPN + c$, dicha ecuación podría reescribirse, para este caso particular, como $\overline{VPN} = VPN + c + BANECO$ donde *BANECO* representaría los beneficios adicionales de la no emisión de CO_2; considerando que la no emisión de CO_2 al día de hoy tiene un costo o un beneficio, y que éste puede ser susceptible de cuantificarse y de incorporarse a la evaluación económica de cambio tecnológico.

Cuadro 9. Emisiones anuales históricas producidas por la generación de energía en México a partir de tecnologías carboeléctricas

				Emisiones anuales (en kilogramos)*			
Año	***MW-h total anual nacional***	***MW-h total anual carboeléctrica***	***Porcentaje del total***	***CO_2***	***SO_2***	***NOx***	***Material particulado***
2002	155,787,763.70	16,151,910.84	10.37%	17,492,196,401.50	73,006,637.00	20,997,484.09	16,313,429.95
2003	155,839,635.90	16,681,198.88	10.70%	18,06,5404,763.06	75,399,018.94	21,685,558.54	16,848,010.87
2004	166,201,034.10	17,883,260.21	10.76%	19,367,213,142.23	80,832,336.15	23,248,238.27	18,062,092.81
2005	167,157,905.70	18,380281.63	11.00%	19,905,477,399.66	83,078,872.97	23,894,366.12	18,564,084.45
2006	174,963,437.30	17,931203.39	10.25%	19,419,134,647.30	81,049,039.32	23,310,564.41	18,110,515.42
2007	18,2384,260.80	18,100720.47	9.92%	19,602,718,254.60	81,815,256.52	23,530,936.61	18,281,727.67
2008	193,325,773.80	17,789140.47	9.20%	19,265,283,346.20	80,406,914.92	23,125,882.61	17,967,031.87

[6] Cabe destacar que dichos bonos de carbono, forman parte de las prioridades de la política fiscal de algunos países como Francia (Boreau, 2012 y D´Haultfœuille, 2014)

2009	187,488,213.81	16,886209.67	9.01%	18,28,7427,348.42	76,325,667.71	21,952,072.57	17,055,071.77
2010	196,930,360.00	16,485075.94	8.37%	17,853,007,541.50	74,512,543.25	21,430,598.72	16,649,926.70
2011	207,733,426.70	18,158430.52	8.74%	19,665,217,084.55	82,076,105.95	23,605,959.68	18,340,014.83
2012	211,951,447.50	17,724103.14	8.36%	19,194,849,218.56	80,112,946.19	23,04,1334.08	17,901,344.17
2013	208,349,308.20	16,044399.99	7.70%	17,375,764,301.17	72,520,687.95	20,857,719.99	16,204,843.99
2014	208,953,304.70	17,445926.68	8.35%	18,89,358,9675.91	78,855,588.59	22,679,704.68	17,620,385.95

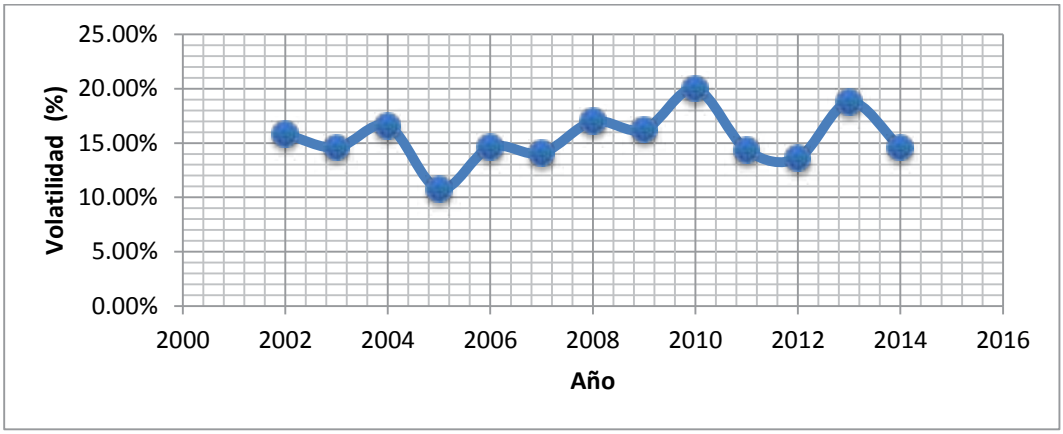
*No se poseen datos sobre la eficiencia de los sistemas anticontaminantes instalados en las carboeléctricas, por lo que se supone que se emiten a la atmósfera en su totalidad todos los contaminantes.

Fuente: Elaboración propia.

Los flujos de efectivo requeridos para la evaluación de la opción real fueron obtenidos a través de los productos por la venta de energía eléctrica totales mensuales a nivel nacional (SENER, 2015), los cuales se pueden observar en el Cuadro 10. De igual manera se obtuvo la volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo (ver Cuadro 11), la cual en promedio resultó ser del 15.35% (ver Cuadro 11 y Figura 5). Cabe señalar que se incorporaron los gastos de mantenimiento y operación a través de un costo promedio, cuyo valor resultó ser de $9.03 USD/MW-año, ya que se efectuó un promedio de costos en donde se involucraron los costos de mantenimiento y operación (M&O) de todas las tecnologías.

El costo de mantenimiento y operación promedio (USD/MW-año) fue multiplicado por la generación bruta de energía anual producida por todas las tecnologías que conforman el sistema (ver Cuadro 11), y descontado de los productos totales anuales por la venta de energía eléctrica, obteniéndose los valores que se presentan en el Cuadro 11. Adicionalmente al descuento de los costos de operación y mantenimiento, se supuso que la entidad gubernamental no poseía otro tipo de obligaciones de inversión o pago, es decir, se consideró que los flujos de efectivo antes de impuestos es el capital con el que se cuenta para el desarrollo de inversiones en nuevos proyectos y modernización tecnológica.

Figura 5. Volatilidad periódica anualizada de los los productos anuales totales por la venta de energía eléctrica.



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 11. Flujos de efectivo a nivel nacional provenientes de los productos por la venta de energía eléctrica

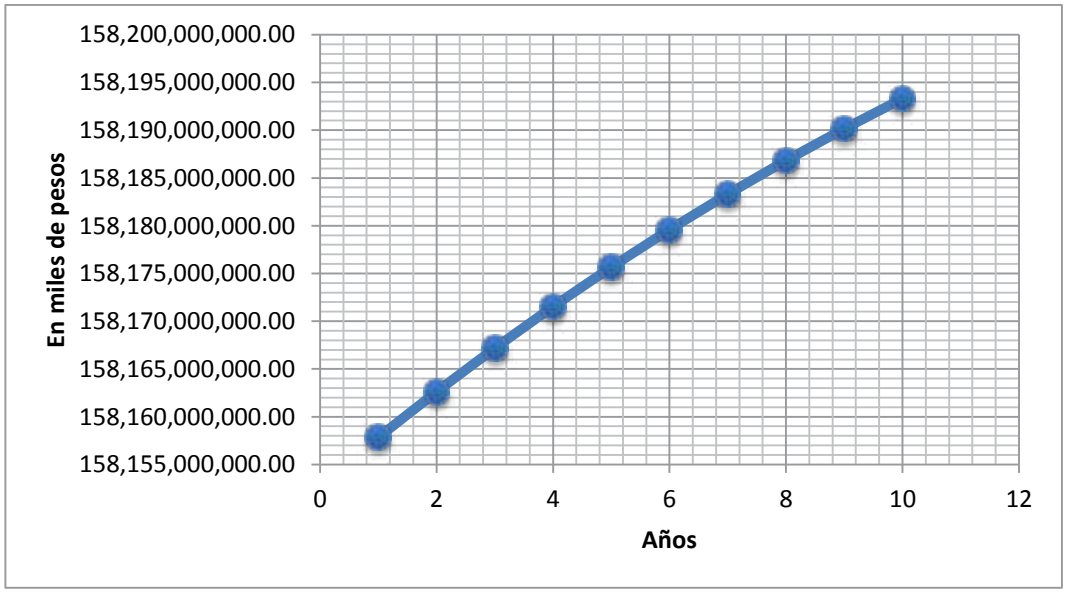
Año	Producción bruta anual (MW-h)	Ventas totales por año (miles de pesos)	Volatilidad anualizada de ventas totales	M&O*	TOTAL - M&O
2002	200362,388.29	115593,715.44	15.83%	145988581.59	115447726861
2003	202595,550.71	136069,905.83	14.58%	150772536.27	135908268496
2004	207018,877.63	156128,125.29	16.58%	161637333.05	155966487957
2005	217158,778.07	174231,816.69	10.75%	166129646.84	174065687043
2006	223563,511.54	199551,308.13	14.64%	162070666.08	199389237464
2007	230926,638.93	212651,126.37	14.06%	163602841.33	212487523529
2008	234096,292.46	252569,493.08	16.98%	160786634.47	252408706446
2009	233471,637.74	219914,531.27	16.22%	152625520.40	219761905750
2010	241490,894.83	249234,879.31	19.98%	148999884.77	249085879430
2011	257883,545.48	286843,393.25	14.35%	164124451.97	286679268799
2012	260497,832.13	307927,933.96	13.60%	160198796.47	307767735161
2013	257860,107.02	314163,009.63	18.77%	145016847.89	314017992781
2014	258255,774.32	328197,628.04	14.57%	157684506.51	328039943529

*M&O: Los costos de mantenimiento y operación están conformado por los costos fijos y los variables. Los costos fijos son aquellos gastos relacionados a la operación de la central, pero no varían significativamente con la generación de energía eléctrica (salarios, prestaciones, mantenimientos, contratos de servicios generales, materiales, insumos, gastos generales. Los costos variables son aquellos que guardan una relación directa con la generación de energía eléctrica (consumo de agua, lubricantes y sustancias químicas, catalizadores, gases, y sustancias para operar la central y los equipos anticontaminantes, equipos, materiales y refacciones relacionadas a la generación de energía y mantenimiento mayor refacciones, equipo y servicios– COPAR, 2013–).

Fuente: Elaboración propia a partir de datos obtenidos a través de la SENER y COPAR (2013).

Los resultados del análisis de la opción real de expansión a través de una opción europea se muestran en el Cuadro 12 y en la Figura 6 donde se observa el valor del call de la opción a través del tiempo; y al igual que la valuación de la opción real de cambio tecnológico, la opción de expansión resulta factible desde el primer año, por lo que es posible concluir que el cambio tecnológico y la implementación de dicho proyecto no sólo resultan rentables a través del tiempo, sino también se presenta como una opción viable para la reducción de la emisión de gases de efecto invernadero a largo plazo.

Figura 6. Factibilidad de la de la opción real de expansión a través del tiempo.



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 12 Resultados de valuación de la opción real
de cambio tecnológico

T (años)	*Tasa(%)*	*call (0,T)*	*call (0,T) - Inversión*
1	3.21	227,007,827,952.34	158,157,827,952.34
2	3.20	227,012,596,774.05	158,162,596,774.05
3	3.18	227,017,159,003.76	158,167,159,003.76
4	3.16	227,021,507,817.86	158,171,507,817.86
5	3.13	22,702,5643,107.64	158,175,643,107.64
6	3.10	227,029,566,360.46	158,179,566,360.46
7	3.07	227,033,285,925.23	158,183,285,925.23
8	3.04	227,036,807,010.79	158,186,807,010.79
9	3.01	227,040,139,937.10	158,190,139,937.10
10	2.98	227,043,295,125.37	158,193,295,125.37

Fuente: Elaboración propia.

6. CONCLUSIONES

A través de la valuación de la viabilidad de cambio tecnológico, se observa de que los sistemas carboeléctricos si bien es cierto que generan una cantidad importante de ingresos por medio de la venta de energía, los costos asociados a la operación y al mantenimiento resultan ser excesivos, ocasionado que la rentabilidad de éstos disminuya considerablemente, dando a lugar a puedan ser sustituidas por otro tipo de tecnologías más eficientes y menos contaminantes.

Aunque dentro del análisis del cambio tecnológico, a través del uso de las opciones reales, resulta viable la adopción de un sistema nucleoeléctrico en sustitución de un sistema de generación carboeleléctrico, la volatilidad periódica anualizada de los flujos de efectivo permite inferir que existe una variabilidad importante dentro del proceso de generación de energía (ya sea que ésta se derive de la operación, la generación, del mantenimiento, la

comercialización o la atención de demandas extraordinarias), la cual es susceptible de administrarse de una mejor manera, con el objeto de obtener una mayor rentabilidad a través de una generación continua y acorde a la capacidad de producción de la planta, ya que de acuerdo al análisis pareciera que el sistema de generación de energía nucleoeléctrico se encuentra hasta cierto punto subutilizado.

Bibliografía

Amram M. and Kulatilaka N., 2000, Strategy and Shareholder Value Creation: The Real, Options Frontier, Journal of Applied Corporate Finance, Bank OF America, Volume 13 Number 2 Summer: 8–21.

Baldi F., 2010, switch, switch, switch! a regime-switching option-based model for valuing a tolling agreement, The Engineering Economist, 55: 268–304, DOI: 10.1080/0013791X.2010.504807.

Banco de México, 2015, http://www.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF114&sector=18&locale=es

Barria, C. y Rudnick, H., 2011, Investment under uncertainty in power generation: Integrated electricity prices modelling and real options approach. IEEE Latin American Transactions, 9(5), 785–792.

Bazán Perkins S., 2005, La energía nuclear, una alternativa de sustentabilidad para resolver la demanda eléctrica de México (Primera parte), Revista INGENIERÍA Investigación y Tecnología, VI. 3, pp.187 – 205.

BID, 2010, Oportunidades y retos de la energía nuclear en México. Nota Técnica No. 170, Departamento de Infraestructura y Medio Ambiente, Banco Interamericano de Desarrollo, New York.

Black, F. y Scholes M., 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81 (3): 637–654. doi:10.1086/260062.

Bollen, N., 1998, Valuing options in regime-switching models. Journal of Derivatives, 6, 8–49.

Boreau D., 2012, The Political Economy of the 2009 French Carbon Tax Project, Organisation for Economic Co–operation and Development, OECD Headquarters, Paris.

Brach M , 2003, Real Options in Practice, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Brealey R. and Myers S., 1991, Principles of Corporate Finance, 4th Ed., New York, McGraw-Hill.

Chatterjee S., Wiseman R. M., Fiegenbaum A. and Devers C. E., 2003, Integrating behavioral and economic concepts of risk into strategic management: The Taiwan Shall meet, Long Range Planning, 36, pp. 61 – 79.

CEC (Climate Economic Chair), 2014, What economic are there for an international agreement? Economic instruments in the climate negotiations, Annual Conference October 15, 2014, Paris-Dauphine University – Amphitheatre Raymond ARON.

Copar, 2013, costos y parámetros de referencia para la formulación de proyectos de inversión del sector eléctrico, generación, comisión federal de electricidad, edición 33, méxico df.

Cox, J., Ross, S. and Rubinstein M., 1979, Option pricing: A simplified approach. Journal of Financial Economics 7 (3): 229. doi:10.1016/0304-405X(79)90015-1.

Cuervo F. y Botero S., 2014, Aplicación de las opciones reales en la toma de decisiones en los mercados de electricidad, Estudios Gerenciales 30: 397–407.

Deng, S. J., Johnson, B. and Sogomonian, A., 2001, Exotic electricity options and the valuation of electricity generation and transmission assets. Decision Support Systems, 30(3), 383–392.

D´Haultfœuille X., Givord P. and Boutin X., 2014, The Environmental Effect of Green Taxation: The Case of French "Bonus/Malus, The Economic Journal, Volume 124, Issue 578, August: 444–480.

Doraszelski U., 2001, The Net Present Value method versus the option value of waiting: a note on Farzin, Huisman and Kort (1998), Journal of Economic Dynamics & Control, 25, pp. 1109 – 1115.

Dixit A. K., Pindick R. S., 1994, Investment under Uncertainty, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.

Duku-Kaakyire, Nanang D., 2004, Applications of real options theory investment analysis, Forest Policy and Economics, 6 pp 539 – 552.

Epaulard. A. and Gallon S., 2001, La valorization du Project Nucléaire EPR par la Méthode des Options Réelles, Economie et Prevision 149 (July-September): 29-50.

Gollier C., Proult, D., Thais, F. y Wlagenwitz, G., 2005, Choice of nuclear power investments under price uncertainty: Valuing Modularity. Energy Economics, 27(4), 667–685.

Hua Yu S. and Hai Tao S., 2013, Applying the Real Option Approach on Nuclear Power Project Decision Making, Energy Procedia 39 193–198.

Hull C., 2002, Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall, 5Th Edition, New Jersey.

Kirby, N. and Davison, M. (2010). Using spark spread valuation to investigate the impact of corn-gasoline correlation on ethanol plant valuation. Energy Economics, 32(6), 1221–1227.

Kiriyama. E. and Suzuki A., 2004, Use of Real Options in Nuclear Power Plant Valuation in the Presence of Uncertainty with CO_2 Emission Credit, Journal of Nuclear Science and Technology, 41(7): 756-764.

Kjaerland, F., 2007, A real option analysis of investments in hydropower — The case of Norway. Energy Policy, 35(11), 5901–5908.

Kodukula P. and Papudesu, C., 2006, Project valuation using real options: A practitioner's guide. New York: J. Ross Publishing.

Lander D. M. and Pinches G., 1998, Challenges to the practical implementation of modeling and valuing real options, The Quarterly Review of Economics and Finance, Vol. 38, 1998, Special Issue, pp. 537 – 567.

Laurikka, H., 2006, Option value of gasification technology within an emissions trading scheme. Energy Policy, 34(18), 3916–3928.

Lee S., 2011, Using real option analysis for highly uncertain technology investments: The case of wind energy technology, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 15(9): 4443–4450.

MacDougall S. L. y Pike R. H., 2003, Consider your options: Changes to strategic value during implementation of advanced manufacturing technology, Omega, The International Journal of Management Science, 31, 2003, pp. 1 – 15.

Madlener, R. and Stoverink, S., 2012, Power plant investments in the Turkish electricity sector: A real options approach taking into account market liberalization Applied Energy, 97, 124–134.

Miller, K. D. y Waller H. G., 2003, Scenarios, Real Options, and Integrated Risk Management, Long Range Planning, 36, pp. 93 – 107.

Moreira, A., Rocha, K. y David, P., 2004, Thermopower generation investment in Brasil — Economic conditions. Energy Policy, 32(1), 91–100.

Mun J., 2006, Real Options Analysis, Tools and Techniques for valuing Strategic Investments and Decisitions, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Naito, Y., Takashima, R., Kimura, H. y Madarame, H., 2010, Evaluating replacement project of nuclear power plants under uncertainty. Energy Policy, 38, 1321–1329.

Panayi S. and Trigeorgis L., 1998, Multi-stage Real Options: The Cases of Information Technology Infrastructure and International Bank Expansion, The Quarterly Review of Economics and Finance, Trustees of the University of Illinois Vol. 38 Special Issue pp 675 – 692.

Pennings E. and Lint O., 1997, The Option value of advanced R&D, European Journal of Operational Research 103 (November), pp 83 – 94.

Pinches G. and Lander D., 1997, The Use of NVP in Newly Industrialized and Developing Countries: a.k.a. “What Have We Ignores?, Managerial Finance: Capital Budgeting, 23 (9): pp 24 – 45.

Rogers J., 2002, Strategy, Value and Risk–Real Options Approach, Ed. Palgrave MacMillan, NY.

Rothwell G., 2006, A Real Options Approach to Evaluating New Nuclear Power Plants, The Energy Journal, Vol. 27. No. 1: 37-53.

Schwartz E., 2013, the real options approach to valuation: challenges and opportunities, Journals of Economics, VOL 50 No .2 (NOV): 163-177.

Sener, 2015, http://sie.energia.gob.mx/bdiController.do?action=temas

sener, 2013, prospectiva del sector eléctrico 2013 – 2017, secretaría de energía, méxico.

Takizawa. S., Omori R., Suzuki A., and Ono K., 2001, Analysis of Critical Electricity Price for the Investment for Constructing a Nuclear Power Plant using Real Options Approach, Journal of Nuclear Science and Technology 38(10): 907-909.

The MIT Press, 1997, Nuclear Power Issues and Choices, International Security, Vol. 2, No. 1 (Summer), pp. 110-119.

Trigeorgis, L., 1996, Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation, Cambridge, MA: MIT Press.

Turvey C., 2001, Mycogen as a Case Study in Real Options, Review of Agricultural Economics, Vol. 23, No. 1 (Spring - Summer, 2001), pp. 243-264.

Vedovoto L. y Prior D., 2015, Opciones reales: una propuesta para valorar proyectos de I+D en centros públicos de investigación agraria, Contaduría y Administración 60 (1), enero-marzo 2015: 145-179.

Venegas Martínez F., 2006, Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre, México, Internacional Thomson Editores, Tomson Learning.

Venetsanos, K., Angelopoulou, P. and Tsoutsos, T., 2002, Renewable energy sources project appraisal under uncertainty: The case of wind energy within a changing energy market environment. Energy Policy, 30(4), 293–307.

Weeds H., 2002, Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition, The Review of Economic Studies, Vol. 69, No. 3 (Jul., 2002), pp. 729-747.

Xinhua Z. and Wei L., 2011, Power Producer's Carbon Capture Investment Timing under Price and Technology Uncertainties, Energy Procedia 5 (2011) 1713–1717.

CAPÍTULO XIII

Sources of Inflation and Output Fluctuations in the Mexican Economy: A Dynamic Vector Error-Correction Approach

Víctor M. Cuevas Ahumada

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco

Abstract

The purpose of this research is to study the basic determinants of inflation and output fluctuations in the Mexican economy during the 2000-2015 period. To that end, a vector error-correction (VEC) model is specified and estimated. Such a model is consistent with a small-open economy with flexible exchange rate, free capital mobility and an inflation targeting central bank. Based on such a model, we attempt to analyze the short-term dynamics of inflation and economic activity, as well as some of the long-term determinants of these two variables. The empirical findings allow us to formulate a few relevant policy recommendations.

Key words: inflation, output, economic policy, Mexico.

JEL Classification: E60, C32.

Introduction

This paper makes use of a vector error-correction (VEC) model to investigate the main sources of inflation and output fluctuations in the Mexican economy. Such a model is consistent with a small open economy with flexible exchange rate and free capital mobility, whose central bank is conducting a full-fledged inflation targeting monetary policy. As is well known, the Bank of Mexico is an inflation targeting central bank since January 2001. The key features of an inflation targeting monetary policy are: (i) the central bank's fundamental mission is to attain price stability, (ii) the central bank is independent of the federal government and makes a commitment with society to achieve a previously announced inflation target, (iii) although the monetary authority is bound to fulfill a public promise with regard to the annual inflation rate, it enjoys considerable freedom in the formulation and implementation of monetary policy measures, and (iv) monetary policy-makers have to provide society with timely and comprehensive information

concerning the short- and long-term inflation targets, as well as the policy tools and measures used to comply with such targets. In the Mexican case, there is an official point target of 3% for the annual rate of inflation, along with a symmetric margin of error of +/- one percentage point around the target. Put differently, the volatility of prices and the country´s vulnerability to external and internal shocks makes it convenient to set a realistic range from 2 to 4% percent for the annual rate of inflation, although the Bank of Mexico is supposed to make every effort to hit the point target of 3%.

In such a context, the effectiveness of monetary policy can be enhanced by the continuous generation of empirical studies regarding the underlying sources of price instability, the responsiveness of inflation and economic growth to different types of economic policy measures, and the lags between economic policy actions and inflationary outcomes. This research is, therefore, aimed at identifying the key sources of inflation and output variations in the Mexican economy. The use of a VEC model is aimed not only at examining the short-term responses of prices and economic activity to several types of shocks, but also at studying the long-term determinants of these two variables. Along these lines, we can formulate a few economic policy prescriptions that can be useful in the short- and long-term scenarios.

This paper is organized as follows. Section 1 is a succinct review of the econometric literature on the subject. Section 2 develops the theoretical model. Section 3 examines the data and explains the econometric methodology and the main findings. Finally, as part of the conclusions, we analyze the economic policy implications of the empirical evidence.

1. Literature Review

The recent empirical literature provides us with several papers specifically related to the sources of inflation in Mexico, but only a few of them are also focused on the sources of output fluctuations. Dornbusch *et al*. (1990) specify a three-variable (inflation, exchange rate and the budget deficit) VAR model to carry out an empirical investigation on inflation determinants in Mexico, Argentina, Brazil Peru and Bolivia. These authors find that the exchange rate is a powerful inflationary factor in Mexico, Argentina, Brazil and Peru, but not as much in Bolivia. The budget deficit influences prices only in Mexico, Bolivia and Peru. In the case of Brazil and

Argentina, they find that inflationary inertia and exchange rate instability are the main driving forces of inflation.

By using a five variable (budget deficit, real exchange rate, money balances, output and prices) VAR model, Wang and Rogers (1998) estimate the responsiveness of prices and output to changes in the other variables of the model. The conclusion is that fiscal and monetary shocks are more inflationary that exchange rate shocks. As to the behavior of output, Wang and Rogers' view is that this variable is more responsive to real and fiscal shocks than to monetary and exchange rate shocks. It is worth-mentioning that, in the case of Colombia, Kamas (1994) makes a similar finding within a VAR framework: monetary expansion is relatively ineffective to stimulate production.

In a multi-country study comprising Mexico, Chile, Korea and Turkey, Agénor and Hoffmaister (1997) make a significant contribution regarding the sources of price instability. Relying on the VAR approach, they show that an expansionary monetary policy is inflationary in all countries. Moreover, exchange rate depreciation is inflationary in Mexico, Chile and Turkey, but certainly not in Korea. Finally, an important conclusion stands out in the case of Mexico: an increase in money supply has a long-lived impact on the price level and a strictly temporary effect on output. In investigating the pass-through effect from exchange rate to prices in sixteen small open economies with flexible exchange rate (including the Mexican economy), Baqueiro, Díaz de León, and Torres (2003) show that the responsiveness of prices to exchange rate variations weakens as the stabilization process progresses. Put differently, the inflationary power of exchange rate depreciation decreases as these economies shift from a high- to a low-inflation scenario.

Combining different econometric methods, Galindo and Catalán (2004) provide evidence of a strong positive relationship between the inflation rate and money supply, as measured by the four monetary aggregates. The authors also point out that a relaxed monetary policy could eventually stimulate economic activity, but the connection between money and output is not as strong as the connection between money and prices.

In a more recent analysis, Ramos-Francia and Torres (2008) point out that both inflation expectations and lagged inflation (inflation persistence) are major sources of price instability in the Mexican economy. Nonetheless, the Mexican transition from a high to a low inflation has reduced the explanatory power of the past inflation in favor of the expected inflation. Therefore, according to this paper, inflation expectations should be regarded as a key inflationary factor. By the same token, Chiquiar, Noriega, and Ramos-Francia (2010) state that, as a result of macroeconomic stabilization, the rate of inflation in Mexico has evolved from being a non-stationary variable to being a stationary one. This change in the random nature of inflation essentially means that the responsiveness of this variable to shocks has decreased. In fact, this finding is consistent with the assertion made by Baqueiro, Díaz de León, and Torres (2003) that the pass-through effect from exchange rate to prices tends to decline as the economy moves from a high- to a low-inflation setting.

Finally, according to Carrasco and Ferreiro (2011), Mexico's inflation stabilization process is not due to the implementation of the inflation targeting (IT) framework in 2001. According to these authors, the fall in the level and variability of inflation took place before the IT came into force and was basically due to the institutional reform of the Bank of Mexico as well as other structural reforms during the 1990s. In this perspective, they conclude that the main contribution of the IT monetary policy has been to reduce the gap between inflation expectations and the inflationary targets set by the Bank of Mexico.

In summary, the econometric literature identifies several variables as significant sources of price instability, such as the budget deficit, money supply, exchange rate, lagged inflation or inflationary inertia, and expected inflation. Moreover, there is some consensus in the empirical literature that: (i) exchange rate depreciation was a powerful inflationary factor in high-inflation Latin American countries, such as Mexico, Argentina and Brazil "during the 1980s" (Dornbusch *et al*., 1990); (ii) more recently, fiscal and monetary shocks become more influential on prices than exchange shocks (Wang and Rogers, 1998); (iii) the responsiveness of prices to exchange rate shocks decreases as the rate of inflation goes down and becomes a stationary process (Ramos-Francia and Torres, 2008; Chiquiar, Noriega, and Ramos-Francia, 2010); and (iv) the inflation targeting monetary policy implemented in Mexico since 2001 has been useful in

anchoring inflationary expectations (Carrasco and Ferreiro, 2011). On the other hand, output can be affected by real and fiscal shocks and, to a lesser extent, by monetary and exchange rate shocks (Wang and Rogers, 1998). Finally, some authors agree that monetary expansion has a temporary positive effect on output and a stronger and long-lasting effect on the price level (Agénor and Hoffmaister, 1997; and Galindo and Catalán, 2004).

2. Theoretical framework

This section is concerned with laying the foundation for a macroeconomic model consisting of seven variables: budget deficit (bd_t), money supply (m_t), interest rate (i_t), real exchange rate (q_t), prices (p_t), output (y_t), and the trade balance (tb_t). The recent literature identifies most of these variables as major sources of inflation and output fluctuations. In this paper, Johansen cointegration tests based on a congruent VAR model will serve the purpose of testing whether and, if so, to what extent the long-run behavior of prices and output is driven by the remaining variables of the system. Once the long-term economic relationships have been identified, we proceed with the estimation of a VEC model which shows not only the long-run equations, but also the short-term dynamic responses of prices and output to unexpected fiscal and monetary expansions, real exchange rate depreciation, and external shocks. We also estimate the responses of prices and output to the so-called own-shocks, in order to evaluate the extent to which there are predetermined (or inertial) components in the behavior of these two variables.

The goods market

A slightly modified version of the *IS-LM* scheme is utilized to specify our multivariate time series model. We depart from two standard assumptions: (i) there is a floating exchange rate system and (ii) the national economy is small enough to take foreign prices and other variables as given. Along these lines, the long-run equilibrium in the goods market is depicted by an amplified IS equation, which can be derived from the national product identity for an open economy:

$$Y = C + I + G + X \qquad (1)$$

where Y stands for total output, C for consumption, I for investment, G for government purchases, and X for net exports. To obtain the *IS* function, we have to recall that C and I bear a positive relationship with income (Y) and a negative relationship with the nominal interest rate (i). Note that in this particular case we make use of the nominal (rather than the real) interest rate, which is due to the fact that a VEC model (such as the one estimated in this paper) can only include nonstationary variables. As opposed to the nominal interest rate which is nonstationary, the real interest rate turned out to be stationary. On the other hand, instead of government spending, we make use of the budget deficit (BD) as an index of fiscal policy. In fact, according to Tanzi and Zee (1997) government revenues, taxes and the budget deficit are all good indicators of fiscal policy. Finally, we have to recall that X is an increasing function of the real exchange rate (Q) and the level of foreign output relative to the level of domestic output ($\frac{Y^*}{Y}$). Based on this set of assumptions, we can get:

$$Y = C(Y,i) + I(Y,i) + BD + X(Q,\frac{Y^*}{Y}) \qquad (2)$$

The next step is to solve equation (2) for Y to obtain the following relationship:

$$Y = F(BD,i,Q,Y^*) \qquad (3)$$

Linearization of equation (3) gives rise to the following a priori long-term economic relationship:

$$y_t = a_0 + a_1 df_t + a_2 i_t + a_3 q_t + a_4 y_t^* \qquad (4)$$

where y_t denotes the log of real domestic output and bd_t the log of the budget deficit with an appropriate "escalation" to include only positive numbers. Furthermore, i_t is a representative nominal interest rate, q_t is the log of the real exchange rate, and y_t^* is the log of real foreign output. To maintain a manageable number of variables, we will leave y_t^* out of the analysis and include a stochastic disturbance term.

$$y_t = a_0 + a_1 bd_t + a_2 i_t + a_3 q_t + \varepsilon_t^y \qquad (5)$$

Therefore, equation (5) represents the long-term equilibrium in the goods market and the disturbance term, symbolized by ε_t^y, is intended to capture the stochastic changes in all the other potentially influential variables excluded from the goods market model. Standard economic theory suggests that the expected parameters signs are: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$. In some cases, a positive sign is attached to a_1 because an expansionary fiscal policy tends to raise aggregate demand and thus have a positive impact on output. However, the sign of a_1 could also be negative, for instance, when the government deficit is financed by borrowing in the domestic financial markets, which in turn raises the cost of credit to both firms and households. Secondly, $a_2 < 0$ since an interest rate increase is likely to discourage investment as well as economic activity. Lastly, the traditional or demand-side view postulates that $a_3 > 0$ given that real currency depreciation stimulates exports by lowering their price abroad, thereby leading to higher production levels. Nonetheless, the supply-side view states that in a developing economy which is highly dependent on imported capital and intermediate goods, real exchange rate depreciation gives rise to cost-push inflation (*i.e.*, prices go up and output goes down) by way of increasing the local-currency cost of those goods (Bruno, 1979; and van Wijnbergen, 1989).

The money market

The traditional long-term equilibrium in the money market is represented by the following *LM* equation:

$$m_t = b_0 + b_1 i_t + b_2 p_t + b_3 y_t + \varepsilon_t^m \qquad (6)$$

where m_t is the log of the nominal money supply, p_t is the price level, and ε_t^m is a stochastic error term, which has been included to account for external shocks to the home-country's money demand. The left-hand side of equation (6) stands for the supply of money, whereas the right-hand specifies the determinants of money demand, which is increasing in prices and output (*i.e.*,

$b_2 > 0$ and $b_3 > 0$) and decreasing in the interest rate (*i.e.*, $b_1 < 0$), given that this particular variable represents the opportunity cost of holding liquid money. The long-run equilibrium condition in the money market is that money demand and money supply are equal. In an inflation targeting framework, the central bank´s policy instrument is the interest rate. For instance, to cope with a demand shock stemming from a fiscal expansion or a higher-than-expected consumption level, the central bank would raise the interest rate. Such an interest rate increase would be aimed at: (i) preventing inflationary expectations from growing beyond the inflation target, and (ii) reducing the output gap and, therefore, the inflationary pressures associated with an excessive demand for goods and services.

The external sector

In order to incorporate the external sector of the economy, we will in principle resort to the balance of payments identity:

$$DR \equiv CAB+NFB \qquad (7)$$

where DR is the net accumulation of international reserve assets, CAB is the current account balance and NFB is the net foreign borrowing. In view of the fact that the Mexican exchange rate regime is flexible and that, under normal circumstances, the central bank tends to refrain itself from intervening heavily in foreign exchange markets, it is reasonable to assume that DR=0 in the long run. Put differently, in the long run the peso-dollar exchange rate adjustments have to equilibrate supply and demand in the foreign exchange market and thus international reserves remain more or less constant. In such a context, the current account balance is useful to capture changes in the net borrowing from the rest of the world (*i.e.*, CAB ≡ -NFB). A country that is a net debtor such as Mexico, and that is running a current account deficit, would have to incur more debt from abroad. Along these lines, the CAB is a fairly good indicator of the performance of the external sector. Moreover, due to the unavailability of monthly data for the CAB, we resort to the trade balance (tb_t) as a proxy variable.

3. Empirical analysis

The selection of variables is based on the theoretical model depicted in section 2 and the literature review of section 1, but it is restricted by the availability of monthly data for the reference period: January 2000 to June 2015 (186 observations in all).[1] As the first step of the empirical work, we proceed to describe the seven variables of the model:

1. As a fiscal policy index we make use of the budget deficit (bd_t), which amounts to the difference between revenue and spending of the federal government, the state-owned enterprises under budgetary control, and the non-budgetary sector. An appropriate escalation is carried out for this variable, so that it takes on only positive values and can be expressed in natural logarithms.
2. The monetary base is used as a proxy for money supply (m_t), which includes all the currency held by the public plus the reserve balances, that is, the money that depository institutions maintain in the central bank. It is worth-mentioning that the central bank exerts more control over this particular measure of money than over the M1 or any other monetary aggregate.
3. The nominal interest rate, i_t, is measured by the 28-day treasury bill rate (or 28-day CETES rate), which is the most important reference rate in the Mexican money market.
4. The real effective exchange rate (REER) index serves the purpose of measuring the real exchange rate (q_t). The REER index is based on consumer prices and reflects changes in Mexico´s international competitiveness vis-à-vis the US and other 110 nations.
5. To measure changes in the price level (p_t) we resort to the Consumer Price Index (CPI).
6. The Global Economic Activity Index (IGAE, by its acronym in Spanish) is used as a proxy for output (y_t), since there is no monthly GDP-data.
7. The trade balance (tb_t) is used as a proxy for the current account balance, owing to the fact that the current account balance is measured on a quarterly basis. Furthermore, an appropriate escalation procedure was applied to the trade balance in order to make this variable positive along the whole reference period and make it possible to express it in natural logarithms. This

[1] Source: National Institute of Statistics and Geography of Mexico (INEGI) and Bank of Mexico.

transformation does not alter the empirical results and represents a necessary step to estimate the long-run elasticities.

As stated before, we gathered monthly data for each of these variables for the period January 2000-June 2015. Second, the data for all variables are seasonally adjusted. Lastly, with the exception of the interest rate, all series are expressed in natural logarithms.

Integration and cointegration analyses

To determine the order of integration of the variables, we consider appropriate to undertake two types of standard tests: Generalized Least Squares-detrended Dickey-Fuller (DF-GLS, 1996) and Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, and Shin (KPSS, 1992). In testing for unit roots (or for the presence of stationarity), an important question is how to specify the test equation. The tests applied offer two basic options: (i) a constant and a linear trend, or (ii) only a constant. To provide a satisfactory answer we utilized Hamilton's methodology (1994, p. 501), which essentially means choosing in each case the specification that is more consistent with the behavior of the time series, both under the null and under the alternative hypotheses. After carrying out this exercise, we concluded that it is reasonable to treat all variables as integrated of order 1 (*i.e.*, I(1)) in levels and stationary or integrated of order 0 (*i.e.*, I(0)) in first differences.[2]

To determine the long-term equilibrium relationships among the variables, we follow Johansen´s method, which consists of estimating an unrestricted and congruent VAR model in seven variables:

$$Y_t = \mathrm{A}_1 Y_{t-1} + \mathrm{A}_2 Y_{t-2} + ,...,+ \mathrm{A}_p Y_{t-p} + \Psi X_t + \eta_t \qquad (8)$$

where Y_t is a 7x1 vector of endogenous variables, X_t is a 2x1 vector of deterministic trends containing a 1, which captures the intercept term in each equation, and a time trend *t*. On the other hand, η_t is a 7x1 vector of innovations while A_i and Ψ are coefficient matrices with

[2] Unit root and stationarity test results are not presented here for the sake of brevity, but are available upon request.

dimensions 7x7 and 7x2, respectively. The value *p* represents the lag length of the VAR model and was determined in an empirical fashion, given that the use of different automatic lag length selection criteria did not succeed in achieving model congruency (*i.e.*, did not produce homoscedastic and serially uncorrelated residuals). In this manner, a VAR model with eleven lags for each variable in each equation is not only congruent, but also keeps a large enough number of degrees of freedom to efficiently estimate all the coefficients of the model. Table 1 displays the results of the multivariate serial correlation Lagrange Multiplier (LM) tests. Both the LM statistics and corresponding *p*-values indicate that, at the five percent significance level, no serial correlation is present up lag order thirteen. Along these lines, Table 2 shows the outcome of the multivariate version of the White Heteroscedasticity test. In this case, the null hypothesis of homoscedasticity cannot be rejected neither at the 5% nor at the 10% significance levels.

Table 1. Multivariate serial correlation *LM* tests

H_0 : there is no serial correlation at lag order *p*

Lag order (*p*)	*LM*-Statistics	Prob.
1	59.27868	0.1492
2	65.99173	0.0530
3	54.11591	0.2855
4	41.60129	0.7644
5	54.14727	0.2845
6	43.62740	0.6900
7	49.38106	0.4579
8	57.23419	0.1961
9	42.47849	0.7331
10	64.28607	0.0703
11	50.28843	0.4222
12	38.14752	0.8688
13	51.22722	0.3864

Note:

2. Probabilities from Chi-squared distribution with 49 degrees of freedom.

Table 2. White heteroscedasticity test for VAR residuals H_0 : homoscedasticity		
Chi-Squared statistic (χ^2)	Degrees of freedom	Prob.
4322.207	4312	0.4534

Notes:
This result corresponds to the joint test.
The test is performed in levels and squares only (no cross terms are included).

Notwithstanding the fact that this seven-variable VAR model with eleven lags is congruent, the presence of several outliers prevents it from having normally distributed residuals. This problem remains regardless of: (i) the number lags and (ii) the number of variables included in the VAR model. Furthermore, the inclusion of dummy variables to attain residual normality is not recommended in this particular case, because it can alter the behavior of the cointegration tests statistics (*i.e.*, the maximum eigenvalue and the trace statistics) in an unpredictable fashion and, therefore, reduce the reliability of the Johansen cointegration tests. Fortunately, Johansen (1995, p. 20) relaxes the normality requirement in this particular instance, indicating that the congruency property (which means serially uncorrelated and homoscedastic residuals) makes a VAR model suitable for cointegration analysis. To carry out Johansen's cointegration tests, we first reparameterize equation (8) as a VEC model:

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta Y_{t-2} + ,...,+ \Gamma_{(p-1)} \Delta Y_{t-(p-1)} + \Psi X_t + \eta_t \qquad (9)$$

where $\Pi = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{A}_i - I$, $\Gamma_i = -\sum_{j=i+1}^{p} Aj$, and η_t is an *i.i.d.* vector of innovations with mean zero and variance Ω. Notice that, as a result of this rearrangement of equation (8), the *p*th order VAR model translates into a (*p*-1)th order VEC model. It is worth-mentioning that the reliability of the

cointegration tests requires η_t to be *i.i.d.* and not *n.i.i.d.* Furthermore, by virtue of the fourth implication of the Granger Representation Theorem (Engle and Granger, 1987), one can say that if a *k*-dimensional vector of variables is I(1) and involves one or more cointegrating relationships, then there exists a VEC model such as the one represented by equation (9). Formally speaking, if variables in vector Y_t are non-stationary or I(1) and the coefficient matrix Π is of reduced rank ($r<k$, where *r* denotes the rank and *k* the number of variables in the model or the dimension of the matrix), then coefficient matrices α and β (both with dimension *kxr* and rank *r*) exist and meet the following conditions: (i) $\Pi = \alpha\beta'$ and (ii) $\beta' Y_{t-1}$ is stationary. Therefore, the columns of β are the cointegrating vectors and $\beta' Y_{t-1}$ contains the *r* long-run equilibrium relationships among the *k* variables, where *r* can also be referred to as the cointegrating rank. The elements of matrix α are the adjustment coefficients of the VEC model, whose values indicate the speed at which disequilibrium is eradicated after a shock takes place. According to Engle and Granger (1987), the short-run dynamics also depends on the coefficient matrices $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_{(p-1)}$.

The design of a VEC model enables one to perform long-term analysis, by way of the cointegrating equations, and short-term analysis, by means of the impulse-response functions. Following Johansen's approach we will estimate equation (9) by maximum likelihood and then proceed to determine if the restrictions associated with the reduced rank of matrix Π can be eliminated**.** Hence, Johansen´s the first step is to find out the cointegrating rank of matrix Π (or the number of long-run equilibrium relationships) by means of a battery of cointegration tests. To perform these tests, we have to determine whether intercepts and trends have to be included in the cointegrating space and in the data space (or VAR model). Given that the model is linear, at least in the logarithms of the variables, it is convenient to include a constant in the cointegrating space so that the long-run equilibrium relationships among the variables do not have to cross the origin (Patterson, 2000, p. 625). Furthermore, owing to the fact that most variables of the model, when expressed in levels, tend to grow over time, we also find it convenient to include a constant in the VAR model; which, according to Patterson (2000, p. 625), gives rise to an increasing trend in the time series (or data space).

Two types of likelihood ratio (LR) tests are suggested by Johansen in order to determine the cointegrating rank of Π (*i.e.*, the value of *r*): the trace test, whose statistics are denoted λ_{trace}, and the maximum eigenvalue test, whose statistics are symbolized by $\lambda_{\max}$. Even though both statistics are LR statistics, they do not follow a standard χ^2 distribution under the null hypothesis. This problem is resolved by using the non-standard critical values proposed by Osterwald-Lenum (1992). Johansen's trace and maximum eigenvalue tests for cointegration are reported in Tables 3 and 4, respectively.

Table 3. Johansen trace tests for cointegration

Null hypothesis	Alternative hypothesis	λ_{trace}-statistic	5% critical value	1% critical value
$r = 0$ **	$r \geq 1$	221.6062	124.24	133.57
$r \leq 1$**	$r \geq 2$	137.6791	94.15	103.18
$r \leq 2$ **	$r \geq 3$	83.28168	68.52	76.07
$r \leq 3$	$r \geq 4$	45.00114	47.21	54.46
$r \leq 4$	$r \geq 5$	26.83050	29.68	35.65
$r \leq 5$	$r \geq 6$	10.34648	15.41	20.04
$r \leq 6$	$r \geq 7$	0.675391	3.76	6.65

Notes:

The letter *r* stands for the number of cointegrating equations.

Asterisks '*' and '**' denote rejection of the null hypothesis at the 5% and 1% significance levels, respectively.

Trace tests indicate the existence of 3 cointegrating equations at the 5% and 1% significance levels.

The lag length of the VAR is eleven. A constant in the cointegrating space and a linear trend in the data space are included.

Table 4. Johansen maximum eigenvalue tests for cointegration				
Null hypothesis	Alternative hypothesis	λ_{max} -statistic	5% critical value	1% critical value
$r = 0$ **	$r = 1$	83.92710	45.28	51.57
$r \leq 1$**	$r = 2$	54.39740	39.37	45.10
$r \leq 2$ *	$r = 3$	38.28054	33.46	38.77
$r \leq 3$	$r = 4$	18.17063	27.07	32.24
$r \leq 4$	$r = 5$	16.48402	20.97	25.52
$r \leq 5$	$r = 6$	9.671093	14.07	18.63
$r \leq 6$	$r = 7$	0.675391	3.76	6.65

Notes:

The letter *r* stands for the number of cointegrating equations.

Asterisks '*' and '**' denote rejection of the null hypothesis at the 5% and 1% significance levels, respectively.

Maximum eigenvalue tests indicate the existence of 3 (2) cointegrating equations at the 5% (1%) significance level.

The lag length of the VAR is eleven. A constant in the cointegrating space and a linear trend in the data space are included.

As is well known, trace and maximum eigenvalue tests are performed in a sequential fashion, from r=0 to $r \leq k$-1. According to trace tests, there are three cointegrating relationships at the 5 and 1% significance levels. On the other hand, the maximum eigenvalue tests indicate that there are three cointegrating equations at the 5% percent significance level, and only two at the 1% significance level. Thus, the two tests yield contradictory outcomes at the 1% significance level. In a case like this, there are two important aspects to remember. The first has to do with Johansen's recommendation to resolve the contradiction on the basis of the number of cointegrating relationships that have a meaningful economic interpretation, while the second is that the maximum eigenvalue tests are more powerful than the trace tests (Patterson, 2000, p. 620-21). After performing several normalizations for the cointegrating vectors, the conclusion is that there are only two long-run equations that are consistent economic theory. See Table 5:

Table 5. Maximum likelihood estimates of cointegrating vectors (the β matrix)		
Variable	Goods market	Money market
y_t	-1	0
p_t	0	-1
bd_t	-0.06**	0.01
m_t	0.3***	0.3***
i_t	-0.04***	-0.008***
q_t	0.002	0.1***
tb_t	0.04*	0.03***
Intercepts	1.21^{na}	2.31^{na}
Notes: Asterisks '*', '**', and '***' indicate that the long-term parameter estimate is statistically significant at the 10, 5 and 1 percent levels, respectively. n.a. = not available		

To convey a straightforward interpretation, we can express the long-run equilibrium relationships as follows:

$$y_t = 1.21 - 0.06bd_t + 0.3m_t - 0.04i_t + 0.002q_t + 0.04tb_t \qquad (10)$$

$$p_t = 2.31 + 0.01bd_t + 0.3m_t - 0.008i_t + 0.1q_t + 0.03tb_t \qquad (11)$$

Equation (10) can be regarded as an "IS equation" or an aggregate demand equation, which suggests that economic activity (y_t) bears a negative relationship with the budget deficit (bd_t) in the long run, which may be due to the fact that the government deficit is partially financed by borrowing in the domestic money and capital markets, which in turn raises interest rates and crowds out private investment. By the same token, a monetary expansion (*i.e.*, a rise in m_t) encourages economic activity while an interest rate increase produces the opposite effect. An

improvement in the trade balance brings about higher output in the long term. Finally, real exchange rate depreciation (*i.e.*, an increase in q_t) seems to stimulate output in the long run.[3]

Equation (11) can be interpreted as an inverted *LM* equation or a price equation. Moreover, this equation indicates that in the long run: (i) both fiscal and monetary expansions escalate prices and, therefore, are inflationary,[4] (ii) higher interest rates reduce inflationary pressures on the grounds of lowering aggregate demand, (iii) real currency depreciation brings prices up, presumably by increasing the local currency cost of capital and intermediate inputs, and (iv) a trade balance improvement puts more pressure on prices, by means of boosting aggregate demand and reducing capacity utilization.

Before presenting the matrix of estimated adjustment coefficients, previously referred to as matrix α, we have to rewrite equations (10) and (11) as error-correction terms (ECT):

$$ECT1_t = -y_t + 1.21 - 0.06bd_t + 0.3m_t - 0.04i_t + 0.002q_t + 0.04tb_t \qquad (10')$$

$$ECT2_t = -p_t + 2.31 + 0.01bd_t + 0.3m_t - 0.008i_t + 0.1q_t + 0.03tb_t \qquad (11')$$

In this manner, equation (9) can be rewritten as:

$$\Delta Y_t = \alpha ECT_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta Y_{t-2} + ,...,+ \Gamma_{(p-1)} \Delta Y_{t-(p-1)} + \Psi X_t + \eta_t \qquad (9')$$

where $ECT_{t-1} = \beta Y_{t-1}$ denotes the vector of error-correction terms, so that $ECT1_t$ and $ECT2_t$ represent the long-run equilibria of output and prices, respectively. As stated before, shocks cause prices and output to depart from long-run equilibria (*i.e.*, the error-correction terms differ from

[3] However, the long-term coefficient associated with the real exchange rate (q_t), in particular, is not statistically significant.

[4] In the case of equation (11), all the coefficients are statistically significant at the 1 percent significance level, except for the budget deficit which is marginally significant at the 20 percent level. So, fiscal expansions might not have a strong inflationary effect in the long run.

zero). Any given departure, in turn, brings about an adjustment process, that is, a process to restore the long-term equilibrium. The dynamic adjustment process is captured by a 7x2 matrix of estimated adjustment (or short-term) coefficients, denoted α .

Table 6. Matrix of estimated adjustment coefficients (the α matrix)		
Equation	$ECT1_{t-1}$	$ECT2_{t-1}$
Δy_t	-0.092***	-0.49***
Δp_t	0.004	0.001
Δbd_t	-1.92***	-5.39**
Δm_t	0.064	0.54***
Δi_t	8.35***	15.71***
Δq_t	-0.04	-0.02
Δtb_t	-0.17*	21.20
Note: Asterisks '*', '**', and '***' indicate that the parameter estimate is statistically significant at the 10, 5 and 1 percent levels, respectively.		

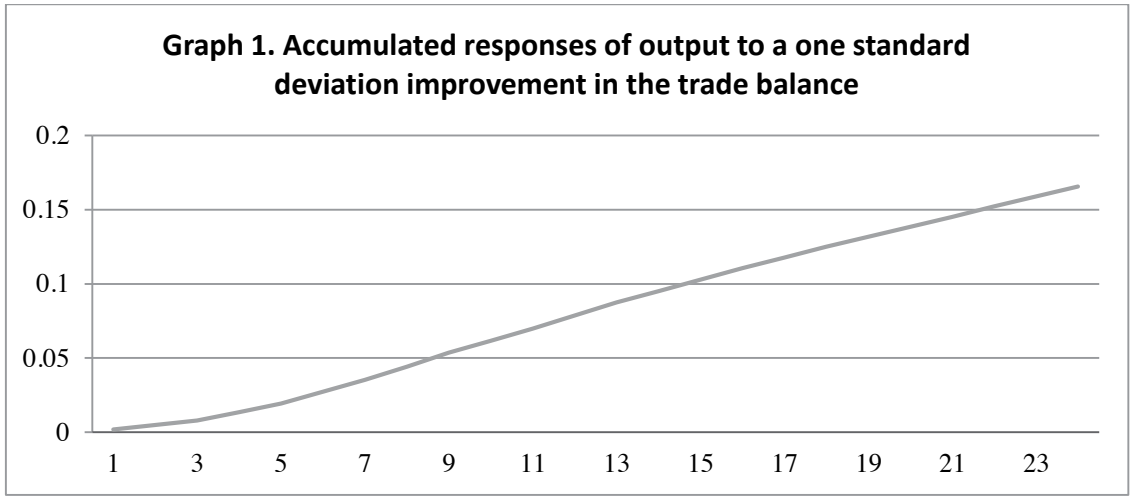
Table 6 shows that the short-term behavior of output is highly responsive to departures from long-run equilibrium in the goods and money markets. The same conclusion applies to the short-run behavior of the budget deficit and the rate of interest. Put differently, these three variables tend to return, in a short-term period, to its long run equilibrium after a shock takes place, either in the goods or in the money market. By the same token, the trade balance tends to return to long-run equilibrium in the face of a shock in the goods market, but not in the money market.

Finally, at least in the short-term scenario, prices and the real exchange rate do not seem to go back to their long-run equilibria following a disturbance, either in the goods or in the money market. According to Johansen (1995), these two variables should be treated as "weakly exogenous" and, therefore, should not be included in the impulse-response analysis. Furthermore,

the fact that the price level is weakly exogenous is consistent with the notion that prices have a strong predetermined component, so that past inflation has a significant bearing on future inflation. In this context, the only short-term inference that can be made about the dynamics of prices is the one related to the matrix of estimated adjustment coefficients.

Impulse-response analysis

By definition, the impulse-response analysis is a short-term sensitivity analysis. So far we have identified some of the long-term determinants of output and prices. However, under the Johansen's methodology prices cannot be included in the sensitivity analysis as this variable (together with the real exchange rate) turned out to be weakly exogenous. Consequently, we now focus our attention on estimating the dynamic response of output to different types of shocks. A shock must be thought of as a one-standard deviation unexpected increase in a given variable. The task of estimating dynamic responses to shocks is undertaken through generalized impulse response functions (Pesaran and Shin, 1998), whose main advantage is that they do not depend on the VAR ordering. In the context of a VEC model, however, the available software does not allow the econometrician to estimate 95% confidence intervals (or two-standard error bounds) for the impulse responses. To counterweigh this inconvenience, we estimate "accumulated" impulse responses (AIRs)[5] and consider only those AIRs which clearly depart from zero as time progresses. It is worth-noting that an AIR becomes horizontal when the effects of a shock dissipate.



[5] An accumulated impulse response function can be defined as the total sum of responses that one variable exhibits, at different points in time, as a result of a shock in another variable.

Graph 1 depicts the accumulated response of output to an unexpected improvement in the trade balance. Unfortunately, shocks to the other variables of the systems failed to produce AIRs that clearly depart from zero. In contrast, a trade balance shock (*i.e.*, an unexpected improvement in tb_t) brings about production gains which clearly build up over time.

4. Conclusions

This paper is concerned with analyzing the short- and long-term sources of inflation and output fluctuations in the Mexican economy. Such a task is undertaken through the specification and estimation of a seven-variable VEC model. The variable selection is based on previous empirical evidence and economic theory, but it is restricted by the availability of monthly data for the period January 2000-June 2015. Based on the aforementioned VEC model, Johansen cointegration tests are perform and accumulated impulse response functions (AIRs) are estimated. The long-run (or cointegrating) equations indicate that: (i) fiscal expansion engenders more inflation and less economic activity.[6] As explained before, this recessionary effect is consistent with the notion that larger budget deficits eventually make domestic credit more expensive which, in turn, crowd out private investment, (ii) monetary expansion and an improvement in the trade balance, both lead to demand-pull inflation given that both prices and output rise, and (iii) in agreement with conventional economic theory, a restrictive monetary policy in the shape of higher interest rates alleviates inflationary pressures while discouraging production of goods and services. Broadly speaking, the econometric results underline the importance of maintaining sound public finances while implementing economic policy measures to lower the cost of credit and stimulate net exports. On the other hand, the long-term parameter estimates suggest that higher interest rates can be used to alleviate inflationary pressures, counteracting to a certain degree the destabilizing effects of exchange rate depreciation.

Given that prices and the real exchange rate turned out to be weakly exogenous, these two variables could not be part of the impulse-response analysis in line with the procedure developed

[6] As the reader might recall, fiscal expansion is more influential on economic activity than on the price level.

by Johansen (1995). Therefore, we could only estimate the accumulated impulse-responses of output to unanticipated changes in the following four variables: the budget deficit, money supply, the rate of interest and the trade balance. In this manner, the conclusion is that only a trade balance improvement (*i.e.*, an increase in net exports) can significantly increase economic activity in the short-term horizon. Moreover, this finding is consistent with the cointegration analysis, meaning that higher net exports can boost economic activity both in the short- and long-term scenarios. Finally, the weak exogeneity of prices is consistent with the idea that the behavior of this variable involves a strong predetermined component in the short term, which would explain the fact that the rate of inflation has been relatively unresponsive to the recent depreciation of the peso vis-à-vis the U.S dollar.

References

Agénor, P., and Hoffmaister, A. (1997). *Money, wages and inflation in middle-income developing countries* (IMF Working Paper No. 174). Washington, D.C.: International Monetary Fund.

Baqueiro, A., Díaz de León, A., and Torres, A. (2003). *¿Temor a la flotación o a la inflación? La importancia del traspaso del tipo de cambio a los precios* (Documento de Investigación 2 de la Dirección General de Investigación Económica). México: Banco de México.

Bruno, M., (1979). *Stabilization and stagflation in a semi-industrialized economy*. In R. Dornbusch, and J. Frankel (Eds.), International Economic Policy, John Hopkins University Press, Baltimore, MD.

Carrasco, C. A., and Ferreiro, J. (2011). Inflation targeting and economic performance: The case of Mexico. *Panoeconomicus*, *58*(5), 675-692.

Chiquiar, D., Noriega, A. E., and Ramos-Francia, M. (2010). A time-series approach to test a change in inflation persistence: the Mexican experience..*Applied Economics*, *42*(24), 3067-3075.

Dornbusch, R., Sturzenegger, F., and Wolf, H. (1990). Extreme inflation: dynamics and Stabilization. *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, 1-64.

Elliott, G., Rothenberg, T., and Stock, J. (1996). Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica,* 64, 813-836.

Engle, R., and Granger, C. (1987). Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica*, 55, 251-276.

Galindo, L., and Catalán, H. (2004). Los efectos de la política monetaria en el producto y los precios en México: un análisis econométrico. *Economía, Sociedad y Territorio*, Dossier especial, 65-101.

Goldfajn, I., and Werlang, S. (2000). *Exchange rate pass-through in Brazil: a panel study*. (Documento de Trabajo 5). Brasilia: Banco Central de Brasil.

Hamilton, J. (1994). *Time series analysis*. Princeton: Princeton University Press.

Johansen, S. (1995). *Likelihood-based inference in cointegrated vector autoregressive models*. Oxford: Oxford University Press.

Kamas, L. (1995). Monetary policy and inflation under the crawling peg: some evidence from VARs for Colombia. *Journal of Development Economics*, 46, 145-161.

Kwiatkowski, D., Phillips, P., Schmidt, P., and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationary against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54, 159-178.

McCarthy, J. (1999). *Pass-through of exchange and import prices to domestic inflation in some industrialized economies* (Working Paper 79). Basle: Bank for International Settlements.

Patterson, K. (2000). *An introduction to applied econometrics: a time series approach*. London: MacMillan Press LTD.

Ramos-Francia, M., and Torres, A. (2008). Inflation dynamics in Mexico: a characterization using the new Phillips curve. *The North American Journal of Economics and Finance*, *19*(3), 274-289.

Tanzi, V., and Zee, H. (1997). *Fiscal Policy and Long-Run Growth* (International Monetary Fund Staff Papers No. 44). Washington, D.C.: International Monetary Fund.

Van Wijnbergen, S. (1989). Exchange rate management and stabilization policies in developing countries. *Journal of Development Economics*, 23, 227-47.

Wang, P. and Rogers, J. (1994). Output, inflation, and stabilization in a small open economy: Evidence from Mexico. *Journal of Development Economics*, 46, 271-293.

CAPÍTULO XIV

Modelación Garch multivariada de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios: un estudio para México, Canadá y Estados Unidos.

Antonio Ruíz Porras

Universidad de Guadalajara

Javier Emmanuel Anguiano Pita

Universidad de Guadalajara

Resumen

Estudiamos las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios en México, Canadá y Estados Unidos mediante doce modelos GARCH multivariados. Los resultados sugieren que: 1) Los modelos de tipo DBEKK son los que describen mejor las series de cada país; 2) el modelo CCC es el que mejor describe las series de la región; 3) hay algunas relaciones e interrelaciones a nivel regional y muchas a nivel nacional; 4) estas interrelaciones son más relevantes para México que para los otros países; 5) no se puede modelar la inflación de Canadá; y 6) las buenas y malas noticias tienen impactos asimétricos sobre la volatilidad de las series. El estudio usa series mensuales para el periodo comprendido entre febrero de 1992 y febrero de 2015.

Palabras Clave: Modelos GARCH Multivariados; Tasas de Interés; Tipos de Cambio; Precios; Norte América

1. Introducción

Tradicionalmente suele asumirse en la economía global que los fenómenos económicos y financieros están muy relacionados e interrelacionados entre sí a nivel nacional e internacional.

Estas relaciones e interrelaciones determinan la dinámica de las variables económicas y financieras, su volatilidad, así como la correlación y transmisión de la volatilidad entre las variables. Más aun, en el contexto de los países que tienen estrechos vínculos comerciales y una cierta identificación regional, se suele argumentar que estas relaciones e interrelaciones llevan a sincronizarlos macroeconómicamente.[1] Por estas razones, el estudio de las mismas resulta necesario para entender el comportamiento dinámico de las economías.

Paradójicamente, en la literatura especializada hay muy pocos trabajos que hayan estudiado estas relaciones e interrelaciones entre las variables económicas y financieras. El desarrollo de estos estudios ha sido limitado por varias razones. Una primera razón radica en que el estudio de estas interrelaciones requiere la modelación y análisis de series de tiempo desde un enfoque multivariado (i.e., considerando grupos de series de manera simultánea). Esto, en la práctica resulta muy complejo.[2] Una segunda es que los modelos de análisis son relativamente novedosos y poco conocidos. Estos modelos suelen ser del tipo GARCH multivariado.[3] Finalmente, una tercera razón es porque los modelos suelen requerir grandes cantidades de datos.

En esta investigación se usan modelos GARCH multivariados para estudiar las relaciones e interrelaciones de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios en los países de América del Norte. Las series de variaciones se estudian considerando agrupamientos a nivel nacional y regional. El estudio se sustenta en análisis de estadística descriptiva, pruebas de raíz unitaria y de efectos ARCH y doce modelos GARCH multivariados. Los modelos se usan con

---

[1] Hay varios estudios empíricos que han defendido esta idea. Entre otros se encuentran Imbs (2004), Ruíz Porras (2010) y Xie Cheng y Chia (2013).

[2] En este contexto, cabe señalar que las series económicas y financieras, incluso a un nivel univariado, son difíciles de modelar porque presentan características que no pueden ser analizadas mediante técnicas econométricas convencionales. Estas características pueden incluir curtosis excesivas, clusters de volatilidad, volatilidades no constantes, distribuciones no normales y movimientos conjuntos de la volatilidad entre distintos activos y mercados financieros. Además, la volatilidad de las series frecuentemente experimenta reacciones asimétricas ante "shocks informacionales", i.e. perturbaciones rezagadas, de la misma magnitud y signo contrario.

[3] En la literatura se reconoce que el primer modelo GARCH multivariado es el desarrollado por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988). Este modelo se le conoce indistintamente como VECH-GARCH o VEC-GARCH, (*Vectorized GARCH model*). El modelo DVECH usado en este estudio es una simplificación del mismo.

fines de modelación econométrica y de análisis de las características de las series. La muestra incluye series mensuales de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios de México, Canadá y Estados Unidos para el período comprendido entre febrero de 1992 y febrero de 2015.

Analíticamente, esta investigación complementa la literatura referida a la modelación y análisis multivariados de series, y la referida a las relaciones económicas y financieras de América del Norte. Las series analizadas aquí son importantes porque se vinculan directamente con las políticas monetarias, cambiarias e inflacionarias de la región. Asimismo, porque refieren a potenciales equilibrios en los niveles nacional e internacional. Metodológicamente, los modelos GARCH multivariados sólo se han usado para estudiar las relaciones e interrelaciones de los mercados bursátiles de la región. Por esta razón, una contribución de este estudio consiste en extender las aplicaciones de estos modelos a los ámbitos económicos y financieros.

El estudio de las series de México, Canadá y Estados Unidos está organizado en siete secciones. La Sección 2 incluye la revisión de la literatura. En la Sección 3 se describe la metodología de análisis. La Sección 4 describe la base de datos y muestra la estadística descriptiva. La Sección 5 muestra los resultados del análisis de raíces unitarias y de efectos ARCH. La Sección 6 muestra los ejercicios de modelación y análisis econométricos. La Sección 7 sintetiza los resultados econométricos y discute las implicaciones económicas y financieras de los mismos. Finalmente, el Apéndice muestra, de manera gráfica, el comportamiento en el tiempo de las series de variaciones empleadas en el presente trabajo.

2. Revisión de la literatura

La modelación de series económicas y financieras ha tenido gran desarrollo en las últimas décadas. Los modelos GARCH han sido los más usados para describir y analizar dichas series. Los modelos GARCH se denominan así porque asumen que las series siguen procesos generalizados autorregresivos con heteroscedasticidad condicionada (*Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH*). Los modelos GARCH permiten describir series con comportamientos caracterizados por no linealidades, volatilidades excesivas clusters de volatilidad, volatilidades no constantes y distribuciones no normales. Particularmente, los

modelos GARCH multivariados (*Multivariate GARCH, MGARCH*) se usan para modelar la media y varianza de conjuntos de series (i.e. sus relaciones e interrelaciones).[4]

Los modelos GARCH multivariados son útiles para entender los co-movimientos, i.e. las interrelaciones, de las series (Silvennoinen y Teräsvirta, 2009). Esta característica es muy apreciada, en la práctica, porque las series económicas y financieras suelen moverse de manera conjunta a lo largo del tiempo. Particularmente, en los estudios económicos, los modelos GARCH multivariados comúnmente se usan para modelar y analizar efectos de derrame (*spillover effects*), externalidades, contagios financieros y la transmisión de volatilidades entre economías. En los estudios financieros, los modelos se usan para facilitar la valuación de activos financieros, la administración de riesgos y la toma de decisiones de portafolio.

Metodológicamente, los modelos GARCH multivariados asumen diversos supuestos sobre la dinámica conjunta de las series económicas y financieras. Estas dinámicas se postulan mediante supuestos relativos al vector de la media condicional, de la matriz de varianza-covarianza condicional, de la especificación del impacto de los shocks informacionales y de la distribución de densidad multivariada de las perturbaciones. Particularmente, los supuestos sobre las matrices de varianza-covarianza condicional, H_t, definen la estructura dinámica de las relaciones e interrelaciones de los modelos multivariados. En la literatura especializada, las matrices de varianza-covarianza más usadas son de los tipos DVECH (*Diagonal VECH*), DBEKK (*Diagonal BEKK*) y CCC (*Constant Conditional Correlation*).

Matemáticamente, la matriz de varianza-covarianza condicional del tipo DVECH se caracteriza por tener un número bajo de parámetros a estimar (véase Bollerslev, Engle y Wooldridge, 1988). Esta propiedad permite que el número de parámetros de las relaciones e interrelaciones sea relativamente reducido y por tanto sencillo de estimar. Esta matriz de varianza covarianza condicional, H_t, es la siguiente:

$$H_t = \Omega + A \circ \varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1} + B \circ H_{t-1} \qquad (1)$$

[4] Véase los trabajos de Bauwens, Laurent y Rombouts (2006), Minovic (2009) y Silvennoinen y Teräsvirta, (2009) para revisiones extensivas de los modelos GARCH multivariados.

, donde las matrices de coeficientes Ω, A y B son matrices simétricas de $N \times N$[5] y donde "$\circ$" denota el producto Hadamard.[6]

La matriz de varianza-covarianza condicional del tipo DBEKK se caracteriza por ser siempre positiva semi-definida (véase Engle y Kroner, 1995). Esta propiedad hace que este modelo siempre se pueda estimar de manera adecuada. Esta propiedad es importante porque no todas las matrices de varianza-covarianza existentes en la literatura satisfacen esta condición (Bauwens, Laurent y Rombouts, 2006). Esta matriz de varianza covarianza, H_t, es la siguiente:

$$H_t = \Omega\Omega' + A\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}A' + BH_{t-1}B' \qquad (2)$$

donde las matrices de coeficientes Ω, A y B son matrices diagonales $N \times N$.

La matriz de varianza-covarianza condicional del tipo CCC no es diagonal (véase Bollerslev, 1990). En esta matriz, las correlaciones condicionales son constantes en el tiempo y las covarianzas condicionales son proporcionales al producto de las desviaciones estándar condicionales correspondientes. Así, los elementos de la matriz H_t, del modelo CCC son definidos como:

$$h_{iit} = c_i + a_i\varepsilon^2_{it-1} + d_i I^-_{it-1}\varepsilon^2_{it-1} + b_i h_{iit-1} \qquad (3)$$

$$h_{ijt} = \rho_{ij}\sqrt{h_{iit}h_{jjt}}$$

donde c_i a_i d_i b_i son constantes y donde h_{iit}, h_{ijt} y ρ_{ij} son, respectivamente, la varianza, covarianza y coeficiente de correlación condicionales.

Estadísticamente, las estimaciones de los modelos GARCH multivariados requieren que las series y los modelos satisfagan ciertos requisitos para que las estimaciones sean confiables. Los requisitos que deben satisfacer las series son los siguientes: 1) Las series deben ser estacionarias a fin de evitar la posibilidad de correlaciones espurias; y 2) las series deben manifestar efectos

[5] Las matrices Ω, A y B incluyen, respectivamente, a los términos constantes, ARCH y GARCH de la matriz de covarianza condicional. Se definen como matrices indefinidas para efectos de estimación econométrica.

[6] El producto de Hadamard de dos matrices *mxn* A y B se denota por $A \circ B$ y es una matriz *mxn* cuyas entradas están dadas por $(A \circ B) = a_{ij}b_{ij}$.

ARCH. Los requisitos que deben satisfacer los modelos son las siguientes: 1) Los modelos deben ser lo suficientemente flexibles para representar las dinámicas de la varianza y covarianzas condicionales; 2) los modelos deben ser parsimoniosos para evitar la estimación de un gran número de parámetros; y 3) las matrices de varianza-covarianza estimadas deben ser positivas semi-definidas.[7]

En la literatura econométrica, los estudios que han modelado y analizado series mexicanas con modelos GARCH multivariados son relativamente escasos.[8] Los estudios enfocados en América del Norte son todavía más escasos y suelen estudiar únicamente a los mercados bursátiles de la región. Entre estos estudios se hallan los de López-Herrera, Ortiz y Cabello (2009) y Lahrech y Sylwester (2013). El primero analiza las relaciones e interrelaciones de la volatilidad y los rendimientos bursátiles de la región. El segundo encuentra que el TLCAN ha incrementado la relación entre los mercados bursátiles mexicano y estadounidense y entre los mercados mexicano y canadiense.

Finalmente, debe señalarse que esta revisión sugiere que existe un amplio margen para el desarrollo de estudios sustentados en modelos GARCH multivariados. Particularmente, aquí se modelan y analizan las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios de México, Canadá y Estados Unidos. Se consideran estos países porque han experimentado un proceso de integración que lleva más de dos décadas. En este contexto, y tal como se ha mencionado, una contribución de este estudio consiste en extender el uso de los modelos multivariados más allá del ámbito bursátil. Así, aquí se modelan series económicas y financieras de América del Norte y se analizan de las características de las mismas a nivel nacional y regional.

3. Metodología de análisis

En esta sección se describe la metodología usada para modelar las series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios. Las series incluyen datos mensuales comprendidos entre los

[7] Entre los especialistas de series de tiempo una discusión vigente se refiere a la naturaleza de las matrices de varianza-covarianza condicionales. Así, hay quienes argumentan que deben ser positivas y quienes argumentan que deben ser semi-definidas positivas. Aquí se adopta el segundo criterio por conveniencia computacional.

[8] Una revisión reciente de estos estudios se encuentra en Ruiz Porras y Ruiz Robles (2015).

años 1992 y 2015. Por convención, las series de tasas de interés, tipos de cambio y precios se definen en términos de logaritmos naturales. Las series de variaciones se definen como las diferencias de las variables logaritmizadas. Así, el valor de la variable *i* en el mes *t*, se define como $\ln V_{it}$. Asimismo la variación mensual en términos porcentuales de la variable *i* en el periodo *t*, r_{it}, se define como:

$$r_{it} = \ln V_{it} - \ln V_{it-1} \qquad (4)$$

Metodológicamente, la investigación se sustenta en un enfoque multivariado para modelar de la mejor manera posible las variaciones de las tasas de interés, los tipos de cambio y los precios. Específicamente, el estudio se sustenta en análisis de estadística descriptiva, en pruebas de raíz unitaria y de efectos ARCH y en doce distintos tipos de modelos GARCH multivariados. El análisis de estadística descriptiva se usa para caracterizar las relaciones e interrelaciones de las series. La pertinencia de la modelación econométrica se evalúa mediante pruebas de raíz unitaria y de efectos ARCH. Los modelos GARCH multivariados se usan con fines de modelación econométrica y de análisis de las características de las series.

La pertinencia de la modelación econométrica se evalúa mediante pruebas de raíces unitarias y de efectos ARCH. Como ya se ha indicado, los ejercicios de modelación sólo son válidos cuando las series son estacionarias y cuando manifiestan efectos ARCH. Particularmente, aquí se usa el test de Phillips-Perron (*PP*) para analizar el orden de integración de las series (Phillips y Perron, 1988). Se usa este test porque, a diferencia del test tradicional de Dickey-Fuller, el test incorpora residuales autocorrelacionados. La hipótesis nula del test es que existen raíces unitarias. Asimismo, se usa el test ARCH de Multiplicadores de Lagrange (*ARCH-LM*) propuesto por Engle (1982) y Bollerslev (1986). La hipótesis nula del test es que no existen efectos ARCH.

Los modelos GARCH multivariados se usan con fines de modelación de las series y de análisis de las características de las series analizadas. Como ya se indicado, los modelos usados aquí son de los tipos DVECH (*Diagonal VECH*), DBEKK (*Diagonal BEKK*) y CCC (*Constant Conditional Correlation*). Estos modelos son variaciones de los propuestos, respectivamente, por Bollerslev, Engle y Wooldridge (1988), Engle y Kroner (1995) y Bollerslev (1990). Los

modelos estimados incluyen especificaciones de tipo GARCH y TGARCH para evaluar si existen efectos asimétricos en la volatilidad de las series cuando hay buenas y malas noticias. [9] Asimismo, incluyen distintas distribuciones de densidad multivariada.

Los modelos GARCH multivariados permiten estudiar las características de las relaciones e interrelaciones en las series de variaciones. Estas características se analizan con base en supuestos sobre: 1) la matriz de varianza-covarianza condicionada; 2) la especificación del impacto de los shocks informacionales; y 3) la distribución de densidad multivariada. Particularmente, las matrices de varianza-covarianza condicionada, H_t, son aquellas de los modelos DVECH, DBEKK y CCC. [10] Las especificaciones de impacto son del tipo GARCH y TGARCH. Las distribuciones son la normal y *t* de Student multivariadas. Estadísticamente estos supuestos definen a los doce modelos usados en esta investigación.

Matemáticamente, la estructura dinámica de cada modelo usado en este estudio se plantea como un sistema de ecuaciones matriciales. Las tres expresiones que integran la estructura de los modelos GARCH multivariados son las siguientes:

$$r_{it} = \phi_{i0} + \phi_{i1} r_{it-1} + \varepsilon_{it} \tag{5}$$

$$\varepsilon_t = H^{\frac{1}{2}}(\theta) z_t \tag{6}$$

$$VarCov(r_t | I_{t-1}) = H^{\frac{1}{2}} Var_{t-1}(z_t) \left(H^{\frac{1}{2}} \right)' = H_t \tag{7}$$

[9] Tradicionalmente los modelos se estiman bajo una especificación GARCH que asume que los efectos de las noticias sobre la volatilidad son simétricos. La especificación TGARCH asume que los efectos son asimétricos.

[10] En este contexto, debe señalarse que hay supuestos adicionales sobre las matrices de varianza-covarianza que definen a las restricciones sobre los coeficientes ARCH estimados. Estos supuestos son los siguientes: 1) Para los modelos DVECH se asume una matriz indefinida de constantes; 2) para los modelos CCC se asumen constantes escalares; y 3) para los modelos DBEEK se asume una matriz diagonal de constantes.

, donde r_t es un vector que incluye una serie de tiempo multivariada de N procesos estocásticos; θ es un vector de parámetros; $H^{\frac{1}{2}}(\theta)$ es una matriz definida positiva $N \times N$; y z_t es un vector aleatorio $N \times 1$, tal que $E(z_t) = 0$ y $Var(z_t) = I_N$.

Metodológicamente, el ejercicio de modelación econométrica utiliza cuatro grupos de series. Los tres primeros grupos incluyen, respectivamente, las series de México, Canadá y Estados Unidos. El grupo regional incluye todas las series de los países de América del Norte. La agrupación propuesta permite modelar y analizar las relaciones e interrelaciones de las series en los niveles nacional y regional. Para cada grupo de series se modela y analiza su comportamiento mediante cada uno de los modelos GARCH multivariados. Por tanto, para cada grupo se ajustan doce estimaciones distintas. Estas estimaciones se realizan usando el método de Máxima Verosimilitud (*Maximum Likelihood, ML*).

El análisis de las relaciones e interrelaciones de las series se hace evaluando la significancia de los parámetros de los modelos estimados. Particularmente, el análisis se centra en los parámetros: 1) ρ_i (autorregresivo de la expresión de la media); 2) de las matrices de varianza-covarianza; y 3) de la distribución *t* de Student multivariada. Se debe señalar que en las estimaciones de los modelos se asume que las perturbaciones siguen procesos autorregresivos AR(12). Este supuesto se formaliza definiendo la perturbación, ε_{it}, como: $\varepsilon_{it} = c + \rho_i \varepsilon_{it-12} + v_{it}$; donde c es una constante y v_{it} es ruido blanco. En todos los casos, el análisis de las series se sustenta en los p-values asociados a los parámetros estimados.

Finalmente, debe señalarse que el análisis de modelación econométrica se sustenta en dos consideraciones: 1) La primera consideración se refiere a la naturaleza de las matrices de varianza-covarianza estimadas. Las mismas deben ser semi-definidas positivas para garantizar que las estimaciones sean válidas; y 2) La segunda consideración concierne a la bondad de ajuste de los modelos estimados. Particularmente, en este estudio, el análisis de bondad de ajuste se sustenta en el criterio de información de Akaike. Se usa este criterio en virtud de que el mismo

permite seleccionar la estimación que describe de mejor manera a un agrupamiento de series cuando se analizan modelos no anidados (Burnham y Anderson, 2002:88-89).

4. Base de datos y estadística descriptiva

Este estudio emplea series mensuales de tasas de interés, tipos de cambio y precios de México, Canadá y Estados Unidos para el periodo de enero de 1992 a febrero de 2015. Todos los datos son nominales. Las series incluidas son aquellas para las que existen datos completos para el periodo analizado. Por convención, las series representativas de las tasas de interés, tipos de cambio y precios se definen en términos de logaritmos naturales. Las series de variaciones se definen con base en la ecuación (4). Así, la muestra se integra por un total de 9 series representativas y 9 series de variaciones. Cada serie de variaciones incluye 277 observaciones mensuales. La Tabla 1 muestra los datos utilizados para construir las series representativas.

Tabla 1. Series incluidas en el estudio

Serie	Abreviatura	Fuente	Periodicidad
Tasas de interes			
Certificados de la Tesoreria de la Federación a 91 días de México	CETES91	Banco de México	Mensual
Letras del Tesoro a Tres Meses de Canadá	TBILL_CA	CANSIM Tabla 176-0043	Mensual
Letras del Tesoro a Tres Meses de Estados Unidos	TBILL_US	Reserva Federal U.S.	Mensual
Índices de precios			
Índice de Precios al Consumidor de México	INPC	INEGI	Mensual
Índice de Precios al Consumidor de Canadá	CPI_CA	CANSIM Tabla 326-0020	Mensual
Índice de Precios al Consumidor de Estados Unidos	CPI_US	Bureau of Labor Statistics	Mensual
Tipos de cambio			
Tipo de Cambio Spot de México	R_MX	Banco de México	Mensual
Tipo de Cambio Spot de Canadá	R_CA	CANSIM Tabla 176-0064	Mensual
Tipo de Cambio Spot de Estados Unidos	R_US	Reserva Federal U.S.	Mensual

Nota: Las series incluye valores nominales de las tasas de interés, los índices de precios y los tipos de cambio. Las series de índices de precios tienen diferentes bases. La serie de México tiene como base la segunda quincena de diciembre de 2010. La serie de Canadá tiene como base el año 2002. Las series de Estados Unidos tienen como base el periodo 1982-84. Las series de tipo de cambio de México y Canadá expresan los valores de sus monedas en términos de dólares de Estados Unidos. La serie del tipo de cambio de Estados Unidos expresa el valor de la moneda estadounidense en términos de libras esterlinas. Las series comprenden datos mensuales de enero de 1992 a febrero de 2015.

La Tabla 2 muestra la estadística descriptiva de las series de variaciones mensuales durante el periodo analizado. Esta tabla provee valores para caracterizar el comportamiento dinámico de las series. La tabla muestra que la variación promedio de la tasa de interés, los precios y los tipos de

cambio ha sido, respectivamente, negativa, positiva y negativa. Esta situación sugiere la existencia de movimientos conjuntos de las medias de las series. La tabla también muestra que 7 series exhiben un sesgo negativo y las restantes un sesgo positivo. Por tanto, la evidencia sugiere que las series son asimétricas. Además, la tabla muestra que todas las series son leptocúrticas y que ninguna se distribuye normalmente (véase P-value asociado al estadístico de Jarque-Bera).

Analíticamente, la Tabla 2 sugiere que existen ciertas regularidades económicas y financieras en América del Norte. Las estimaciones sugieren que las tasas de interés han tendido a disminuir, los precios a elevarse y las monedas a devaluarse[11] de manera consistente a lo largo del tiempo. Las estimaciones también sugieren que la condición de paridad de poder de compra (*Purchasing Power Parity, PPP*) [12] es válida en la región porque las tasas de inflación están relacionadas directamente con las tasas de devaluación cambiaria. [13] Sin embargo, también sugieren que los efectos doméstico e internacional de Fisher no son válidos en la región. [14] Las variaciones en las tasas de interés, a diferencia de lo que predice la teoría, son negativas

[11] Adviértase que el dólar ha tendido a devaluarse con respecto a la libra esterlina. Evidentemente, y por la manera de definir los tipos de cambio de la región, el dólar estadounidense ha tendido a apreciarse con respecto a las monedas de México y Canadá.

[12] La PPP es una teoría que sostiene que el precio de los bienes comerciables internacionalmente debe ser el mismo en todos los países, y por lo tanto el tipo de cambio entre dos monedas debe ser igual a la razón de los precios en los dos países. Véase Eiteman, Stonehill y Moffet, (2007).

[13] Adviértase que variaciones positivas en los índices de precios implican que existe inflación; variaciones negativas en los tipos de cambio implican devaluaciones de las monedas.

[14] El Efecto Fisher y el Efecto Fisher Internacional son dos teorías sobre las condiciones internacionales de paridad (Eiteman, Stonehill y Moffet, 2007). La primera sostiene que las tasas nominales de interés en dos o más países deben ser iguales a la tasa de retorno real requerida por los inversionistas más una compensación por el monto esperado en la inflación de cada país. La segunda sostiene que el tipo de cambio spot debe variar por un monto igual a la diferencia en las tasas de interés entre dos países.

Tabla 2. Estadística descriptiva de las series de variaciones mensuales y pruebas de normalidad de Jarque-Bera.

	Tasa de interés			Indice de precios			Tipo de cambio		
	México	Canadá	Estados Unidos	México	Canadá	Estados Unidos	México	Canadá	Estados Unidos
Promedio	-0.0061	-0.0091	-0.0190	0.0073	0.0015	0.0019	-0.0057	-0.0002	-0.0006
Desv. Est.	0.1031	0.1239	0.2633	0.0089	0.0034	0.0034	0.0355	0.0230	0.0221
Mediana	-0.0041	0.0000	0.0000	0.0055	0.0016	0.0020	-0.0005	-0.0001	0.0003
Mínimo	-0.3302	-0.7170	-1.8458	-0.0074	-0.0104	-0.0193	-0.3302	-0.1238	-0.1108
Máximo	0.6929	0.5596	1.4663	0.0767	0.0115	0.0121	0.0932	0.0887	0.0599
Coef. Asim.	2.2130	-0.9350	-0.4495	3.3798	-0.1948	-1.0847	-4.1325	-0.3480	-0.8764
Curtosis	15.8574	13.7252	18.9055	20.9338	3.9393	8.7272	33.0560	6.5618	6.4256
Jarque-Bera	2134.06	1367.99	2929.20	4239.43	11.94	432.89	11214.70	152.02	170.90
P-value	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0026	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Observaciones	277	277	277	277	277	277	277	277	277

Notas: Las variaciones mensuales en terminos porcentuales son estimadas usando las diferencias de los valores expresados en terminos de logaritmos

Finalmente debe enfatizarse que la evidencia muestra que las series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios manifiestan curtosis excesivas, clusters de volatilidad, asimetrías, distribuciones no normales, volatilidades no constantes y movimientos conjuntos de medias y varianzas. [15] Asimismo, la evidencia sugiere que existe evidencia mixta sobre la validez de las condiciones de paridad internacional en América del Norte. Así, mientras la PPP parece ser validada, los efectos Fisher parecen no serlo. Esta situación sugiere que existen oportunidades de arbitraje de tasas de interés en la región y que los bancos centrales distorsionan los mercados monetarios de manera efectiva. Asimismo, esta situación implica que las series pudieran ser modelables econométricamente.

5. Análisis de raíces unitarias y de efectos ARCH

Metodológicamente, los análisis de raíces unitarias y de efectos ARCH se usan para analizar la pertinencia de modelar las series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios. Como se ha señalado, la modelación econométrica requiere, para ser desarrollada de manera adecuada, que las series sean estacionarias y que manifiesten efectos ARCH. En este contexto, en

[15] Estas conclusiones se obtienen con base en el análisis gráfico de las series de variaciones y de estadística descriptiva. En el Apéndice se muestran las gráficas del comportamiento de las series.

el estudio se usa el test PP para analizar el orden de integración de las series representativas. Asimismo, el test *ARCH-LM* se usa para analizar si las series manifiestan efectos ARCH. Las estimaciones del test PP para las series se muestran en la Tabla 3. Las estimaciones del test ARCH-LM se muestran en la Tabla 4.

Tabla 3. Pruebas Phillips Perron de las series en niveles y en diferencias

Serie	Niveles		Diferencias		I(d)
	P-value	Rezagos	P-value	Rezagos	
Tasa de interés de México	0.1699	7	0.0000	11	1
Tasa de interés de Canadá	0.2222	9	0.0000	8	1
Tasa de interés de Estados Unidos	0.6236	6	0.0000	12	1
Índice de precios de México	0.8952	11	0.0001	10	1
Índice de precios de Canadá	0.3914	11	0.0000	21	1
Índice de precios de Estados Unidos	0.9009	10	0.0000	24	1
Tipo de cambio de México	0.6134	2	0.0000	5	1
Tipo de cambio de Canadá	0.5150	6	0.0000	5	1
Tipo de cambio de Estados Unidos	0.2127	5	0.0000	1	1

Notas: La hipótesis nula de la prueba Philips Perrón es que hay una raíz unitaria. Las pruebas incluyen una tendencia lineal e intercepto como regresores externos. El número de resagos se estima con base en el criterio de información de Schwartz. El criterio de decisión supone un nivel de significancia del 5%. Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales.

Las Tablas 3 y 4 sugieren que la mayoría de las series de variaciones son susceptibles de ser modeladas mediante modelos GARCH multivariados. Particularmente, la Tabla 3 muestra que todas las series de tasas de interés, tipos de cambio y precios son integradas de orden uno, I(1). Intuitivamente, esta situación sugiere que pudiera haber relaciones de largo plazo entre estas series. Asimismo, esta situación implica que todas las series de variaciones son estacionarias y potencialmente modelables de manera no espuria. Sin embargo, debe señalarse que la Tabla 4 también muestra que la serie de variaciones de precios de Canadá no manifiesta efectos ARCH bajo ninguno de los niveles de significancia tradicionales (10, 5 y 1 por ciento).

Tabla 4. Prueba de efectos ARCH-LM para las series en diferencias.

Variable	Estadístico F	P-value
Tasa de interés de México	7.9650	0.0000
Tasa de interés de Canadá	5.9705	0.0000
Tasa de interés de Estados Unidos	40.7612	0.0000
Índice de precios de México	23.0785	0.0000
Índice de precios de Canadá	0.7206	0.6085
Índice de precios de Estados Unidos	7.7844	0.0000
Tipo de cambio de México	11.0496	0.0000
Tipo de cambio de Canadá	2.9584	0.0129
Tipo de cambio de Estados Unidos	6.5876	0.0000

Notas: La hipótesis nula es que no hay efectos ERCH. El criterio de decisión supone un nivel de significancia del 5%. Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales.

Analíticamente, estos resultados tienen implicaciones sobre la modelación y análisis de las series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios. Particularmente, los resultados de las pruebas de Phillips-Perron implican que estimar regresiones con las series de tasas de interés, tipos de cambio y precios conllevaría a estimaciones espurias. Por tanto, la modelación y análisis solo serían viables para las series de variaciones. Sin embargo, la evidencia también sugiere que la serie de variaciones de precios de Canadá no puede ser descrita ni analizada mediante modelos de la familia ARCH. [16] Por esta razón, esta última serie es excluida de los ejercicios de modelación y análisis de la siguiente sección.

6. Ejercicios de modelación y análisis econométricos

Los modelos GARCH multivariados usados en este estudio comparten una estructura similar para efectos de estimación econométrica. En todos los modelos, los vectores de la media condicional requieren estimar los parámetros ϕ_{i1} y ρ_i. Asimismo, requieren hacer estimaciones de los

[16] Resulta interesante señalar que la política monetaria en Canadá durante el periodo analizado ha tenido el objetivo de mantener una inflación baja, estable y predecible. Los instrumentos para llevar cabo dicho objetivo han incluido metas de control de la inflación (*inflation-control target*) y un régimen cambiario flexible. Una revisión de la política monetaria canadiense desde 1991 y hasta 2015 puede hallarse en Bank of Canada (s.f.).

parámetros de las matrices de varianza-covarianza, $VarCov(r_t|I_{t-1}) = H_t$. Por comparabilidad y simplicidad, el comportamiento dinámico de las series de variaciones se describe y analiza usando los modelos multivariados descritos anteriormente. Las estimaciones se agrupan en los cuatro grupos de series nacionales y a nivel regional. Estas estimaciones están sintetizadas en las Tablas 6, 7, 8 y 9. La bondad de ajuste asociada a todos los modelos estimados se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Estimaciones de bondad de ajuste de los modelos MGARCH de México, Canadá y Estados Unidos.

Modelo	Criterio de Información de Akaike				Modelo con mejor bondad de ajuste
	DVECH		CCC	DBEKK	
	Modelos estimados para las series de México				
AR(12)-GARCH(1,1)	-14.9054	*	-14.9782	-14.8019	CCC
AR(12)-TGARCH(1,1)	-14.9455	*	-15.0341	-14.8348	CCC
AR(12)-GARCH(1,1) t Student	-15.4765	*	-15.4852	-15.4950	***DBEKK***
AR(12)-TGARCH(1,1) t Student	-15.4977	*	-15.4891	-15.4894	DBEKK
	Modelos estimados para las series de Canadá				
AR(12)-GARCH(1,1)	-6.6909	*	-6.6285	-6.6631	DBEKK
AR(12)-TGARCH(1,1)	-6.8362	*	-6.7680	-6.7836	DBEKK
AR(12)-GARCH(1,1)-t Student	-7.1038	*	-7.0714	-7.1160	DBEKK
AR(12)-TGARCH(1,1)-t Student	-7.1234	*	-7.0974	-7.1422	***DBEKK***
	Modelos estimados para las series de Estados Unidos				
AR(12)-GARCH(1,1)	-15.5221	*	-15.4831	-15.5040	DBEKK
AR(12)-TGARCH(1,1)	-15.4979	*	-15.5358	-15.5758	DBEKK
AR(12)-GARCH(1,1)-t Student	-15.5819	*	-15.5813	-15.5840	DBEKK
AR(12)-TGARCH(1,1)-t Student	-15.5816	*	-15.6078	-15.6326	***DBEKK***
	Modelos estimados para las series de la región del TLCAN				
AR(12)-GARCH(1,1)	-35.934	*	-37.251	-36.478	CCC
AR(12)-TGARCH(1,1)	-36.074	*	-37.494	-37.166	CCC
AR(12)-GARCH(1,1)-t Student	-36.890	*	-38.069	-37.795	CCC
AR(12)-TGARCH(1,1)-t Student	-36.639	*	-38.160	-38.112	***CCC***

Notas: Un asterisco denota que los modelos estimados no cumplen con la condicion de que la matriz de varanza-covarianza sea definida positiva. El modeo con mejor bondad de ajuste se determina con base en el criterio de informacion de Akaike. Se identifica con italicas y negritas al modelo con mejor bondad de ajuste de cada grupo de series.

La Tabla 5 muestra los estimadores de bondad de ajuste para cada una de las estimaciones realizadas. Particularmente, la tabla muestra que los modelos de tipo DBEKK son los que describen mejor las relaciones e interrelaciones de las series de cada país. Esto implica que la media y la volatilidad condicionales de las series de un país pueden explicarse mediante modelos

sencillos.[17] Sin embargo, debe señalarse que estas conclusiones no se validan a nivel regional. La tabla muestra que los modelos que describen mejor a las series de América del Norte son del tipo CCC. Por tanto, a nivel regional, las correlaciones condicionadas entre las series de un país parecen explicar la media y la volatilidad conjuntas de las series de otros países.

La Tabla 5 permite señalar los modelos que tienen una mejor bondad de ajuste considerando los cuatro grupos de series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios. Particularmente, la evidencia sugiere que el modelo que mejor describe las series mexicanas es el AR(12)-DBEKK-GARCH(1,1). El modelo que mejor describe las series canadienses y estadounidenses es el AR(12)-DBEKK-TGARCH(1,1). El modelo que mejor describe de manera conjunta las series de los tres países es el AR(12)-CCC-TGARCH(1,1). La distribución de densidad que siguen las perturbaciones de todos los modelos señalados es la distribución *t* de Student multivariada.

Los resultados sugieren que hay ciertos patrones de relaciones e interrelaciones en las series de variaciones de México, Canadá y Estados Unidos: 1) la predominancia de los modelos DBEKK, a nivel nacional, sugiere que la varianza condicional de una serie depende los valores rezagados de las otras series (i.e., hay relaciones entre las series a nivel nacional); 2) la predominancia de los modelos CCC, a nivel regional, sugiere que hay algunas interrelaciones entre la volatilidad y las series de variaciones de México, Canadá y Estados Unidos; 3) por tanto, las series dependen de interrelaciones nacionales e internacionales; y 4) la predominancia de la especificación TGARCH sugiere que las buenas y malas noticias tienen impactos asimétricos sobre la volatilidad conjunta de las series de la región.

[17] Los parámetros estimados de los modelos DBEKK son menores en número que los correspondientes a los modelos DVECH o CCC. Esto se puede advertir si se comparan los parámetros estimados de los modelos cuando cambia la matriz de varianza-covarianza. Véase las Tablas 6, 7, 8 y 9.

Tabla 6. Modelos MGARCH estimados para las series en diferencias de México con efectos ARCH

	Modelo	Parámetros	AR(12)-GARCH(1,1) Normal		AR(12)-TGARCH(1,1) Normal		AR(12)-GARCH(1,1) t-Student		AR(12)-TGARCH(1,1) t-Student	
Media	DVECH	ρ	*0.0333*	***	*0.0484*	***	*0.0733*	***	*0.0719*	***
		Estimados	4		4		4		4	
		Significativos	2		2		2		2	
	CCC	ρ	*0.0287*	***	*0.0352*	***	*0.0698*	***	*0.0791*	***
		Estimados	4		4		4		4	
		Significativos	2		2		2		2	
	DBEKK	ρ	*0.0574*	***	*0.0471*	***	*0.1864*	***	*0.1689*	***
		Estimados	4		4		4		4	
		Significativos	3		2		2		2	
Varianza Covarianza	DVECH	Estimados	18		24		18		24	
		Significativos	12		14		11		14	
	CCC	Estimados	12		15		12		15	
		Significativos	9		9		8		8	
	DBEKK	Estimados	9		12		9		12	
		Significativos	8		10		8		9	
Distribución t	DVECH	Estimados					1		1	
		Significativos					1		1	
	CCC	Estimados					1		1	
		Significativos					1		1	
	DBEKK	Estimados					1		1	
		Significativos					1		1	
Varianza Covarianza Transformada	DVECH	Estimados	18		24		18		24	
		Significativos	12		14		11		14	
	CCC	Estimados	12		15		12		15	
		Significativos	9		9		8		8	
	DBEKK	Estimados	9		12		9		12	
		Significativos	8		10		8		9	

Notas: Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales. Los modelos son estimados asumiendo una matriz de varianza-covarianza indefinida, escalar y diagonal para los modelos DVECH, CCC y DBEKK respectivamente. El coeficiente del término auto regresivo se reporta en negritas e itálicas. Se reporta el número de parámetros estimados y significativos de cada una de las especificaciones de los modelos. Se considera un nivel de significancia del 10% para determinar los parámetros significativos. Uno, dos y tres asteriscos denotan nivel de significancia del 10, 5 y 1 %.

La Tabla 6 muestra las estimaciones de los modelos que describen conjuntamente las series de variaciones de México. El modelo que las describe mejor es el AR(12)-DBEKK-GARCH(1,1) con un distribución *t* de Student multivariada. Este modelo muestra que el 50 por ciento de los

parámetros de la media (ϕ_{i1}, ρ_i) son significativos (2 de 4). También muestra que el 89 por ciento de parámetros de la matriz de varianza-covarianza son significativos (8 de 9). [18] Además, el parámetro de grados de libertad es significativo. Más aun, la evidencia sugiere que las series tienden a manifestar ciclos estacionales (ρ_i significativa). Por tanto, la tabla muestra que el 79 por ciento de los parámetros del modelo son significativos (11 de 14). [19]

La Tabla 7 muestra las estimaciones de los modelos que describen las series de variaciones de Canadá. Como se ha señalado, el modelo que las describe mejor es el AR(12)-DBEKK-TGARCH(1,1) con un distribución *t* de Student multivariada. Este modelo muestra que ninguno de los parámetros de la media es significativo (0 de 3). También muestra que el 75 por ciento de parámetros de la matriz de varianza covarianza son significativos (6 de 8). Además, y al igual que en el modelo anterior, el coeficiente de grados de libertad es significativo. Sin embargo, la evidencia sugiere que las series no manifiestan ciclos estacionales. Por tanto, la tabla muestra que el 58 por ciento de los parámetros del modelo son significativos (7 de 12).

[18] Los cálculos sobre el número de coeficientes de la matriz de varianza-covarianza, H_t, se refieren a la forma "transformada" de la matriz. Se utilizan los coeficientes en forma transformada porque los mismos explicitan cada uno de los términos que integran a las diversas matrices que conforman a la matriz H_t. Adviértase que en las tablas se muestran los coeficientes de las matrices, H_t, tanto en forma la "bruta" como en la "transformada".

[19] Adviértase que el total de coeficientes estimados incluye los correspondientes a las especificaciones de la media, de la matriz de varianza-covarianza transformada y de la distribución de densidad.

Tabla 7 Modelos GARCH estimados para las series en diferencias de Canada con efectos ARCH.

	Modelo	Parámetros	AR(12)-GARCH(1,1) Normal	AR(12)-TGARCH(1,1) Normal	AR(12)-GARCH(1,1) t-Student	AR(12)-TGARCH(1,1) t-Student
Media	DVECH	ρ	*-0.0367*	*-0.0333*	*-0.0176*	*-0.0200*
		Estimados	3	3	3	3
		Significativos	0	0	0	0
	CCC	ρ	*-0.0346*	*-0.0295*	*-0.0172*	*-0.0175*
		Estimados	3	3	3	3
		Significativos	0	0	0	0
	DBEKK	ρ	*-0.0298*	*-0.0290*	*-0.0156*	*-0.0186*
		Estimados	3	3	3	3
		Significativos	0	0	0	0
Varianza Covarianza	DVECH	Estimados	9	12	9	12
		Significativos	6	6	5	5
	CCC	Estimados	7	9	7	9
		Significativos	6	6	4	4
	DBEKK	Estimados	6	8	6	8
		Significativos	5	6	5	6
Distribución t	DVECH	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	CCC	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	DBEKK	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
Varianza Covarianza Transformada	DVECH	Estimados	9	12	9	12
		Significativos	6	6	5	5
	CCC	Estimados	7	9	9	12
		Significativos	6	6	5	5
	DBEKK	Estimados	6	8	6	8
		Significativos	5	6	5	6

Notas: Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales. Los modelos son estimados asumiendo una matriz de varianza-covarianza indefinida, escalar y diagonal para los modelos DVECH, CCC y DBEKK respectivamente. El coeficiente del término auto regresivo se reporta en negritas e itálicas. Se reporta el número de parámetros estimados y significativos de cada una de las especificaciones de los modelos. Se considera un nivel de significancia del 10% para determinar los parámetros significativos. Uno, dos y tres asteriscos denotan nivel de significancia del 10, 5 y 1 %.

La Tabla 8 muestra las estimaciones de los modelos que describen las series de variaciones de Estados Unidos. El modelo que las describe mejor es el AR(12)-DBEKK-TGARCH(1,1) con un distribución *t* de Student multivariada. Este modelo muestra que el 25 por ciento de los parámetros de la media son significativos (1 de 4). También muestra que el 75 por ciento de

parámetros de la matriz de varianza covarianza son significativos (9 de 12). Nuevamente, el coeficiente de grados de libertad es significativo y las series parecen no manifestar ciclos estacionales. Por tanto, la tabla muestra que el 65 por ciento de los parámetros estimados del modelo son significativos (11 de 17).

Tabla 8. Modelos GARCH estimados para las series en diferencias de Estados Unidos con efectos ARCH.

	Modelo	Parámetros	AR(12)-GARCH(1,1) Normal	AR(12)-TGARCH(1,1) Normal	AR(12)-GARCH(1,1) t-Student	AR(12)-TGARCH(1,1) t-Student
Media	DVECH	ρ	*-0.0029*	*-0.0025*	*-0.0025*	*-0.0024*
		Estimados	4	4	4	4
		Significativos	2	1	1	1
	CCC	ρ	*-0.0021*	*-0.0021*	*-0.0021*	*-0.0021*
		Estimados	4	4	4	4
		Significativos	2	2	1	1
	DBEKK	ρ	*-0.0023*	*-0.0023*	*-0.0023*	*-0.0024*
		Estimados	4	4	4	4
		Significativos	2	1	1	1
Varianza Covarianza	DVECH	Estimados	18	24	18	24
		Significativos	12	11	9	9
	CCC	Estimados	12	15	12	15
		Significativos	8	9	6	7
	DBEKK	Estimados	9	12	9	12
		Significativos	9	11	7	9
Distribución t	DVECH	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	CCC	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	DBEKK	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
Varianza Covarianza Transformada	DVECH	Estimados	18	24	18	24
		Significativos	12	11	9	9
	CCC	Estimados	12	15	12	15
		Significativos	8	9	6	7
	DBEKK	Estimados	9	12	9	12
		Significativos	9	11	7	9

Notas: Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales. Los modelos son estimados asumiendo una matriz de varianza-covarianza indefinida, escalar y diagonal para los modelos DVECH, CCC y DBEKK respectivamente. El coeficiente del término auto regresivo se reporta en negritas e itálicas. Se reporta el número de parámetros estimados y significativos de cada una de las especificaciones de los modelos. Se considera un nivel de significancia del 10% para determinar los parámetros significativos. Uno, dos y tres asteriscos denotan nivel de significancia del 10, 5 y 1 %.

La Tabla 9 muestra las estimaciones de los modelos que describen las series de variaciones de México, Canadá y Estados Unidos. Como se ha señalado, el modelo que las describe mejor es el AR(12)-CCC-TGARCH(1,1) con un distribución *t* de Student multivariada. Este modelo muestra que el 33 por ciento de los parámetros de la media (ϕ_{i1}, ρ_i) son significativos (3 de 9). También muestra que el 35 por ciento de parámetros de la matriz de varianza covarianza son significativos (21 de 60). Nuevamente, el coeficiente de grados de libertad es significativo y las series parecen no manifestar ciclos estacionales. Por tanto, la tabla muestra que sólo el 36 por ciento de los parámetros del modelo son significativos (25 de 70).

Tabla 9. Modelos MGARCH estimados para las series en diferencias de México, Canadá y Estados Unidos con efectos ARCH.

	Modelo	Parámetros	AR(12)-GARCH(1,1) Normal	AR(12)-TGARCH(1,1) Normal	AR(12)-GARCH(1,1) t-Student	AR(12)-TGARCH(1,1) t-Student
Media	DVECH	ρ	*0.0007*	*0.0015*	*0.0334* ***	*0.0320* ***
		Estimados	9	9	9	9
		Significativos	2	2	3	3
	CCC	ρ	*-0.0020*	*-0.0010*	*-0.0014*	*-0.0012*
		Estimados	9	9	9	9
		Significativos	3	2	3	3
	DBEKK	ρ	*0.0008*	*0.0006*	*0.0006*	*0.0004*
		Estimados	9	9	9	9
		Significativos	4	3	4	3
Varianza Covarianza	DVECH	Estimados	108	144	108	144
		Significativos	49	30	56	39
	CCC	Estimados	52	60	52	60
		Significativos	21	23	21	21
	DBEKK	Estimados	24	32	24	32
		Significativos	21	23	21	23
Distribución t	DVECH	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	CCC	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
	DBEKK	Estimados			1	1
		Significativos			1	1
Varianza Covarianza Transformada	DVECH	Estimados	108	144	108	144
		Significativos	49	30	56	39
	CCC	Estimados	52	60	52	60
		Significativos	21	23	21	21
	DBEKK	Estimados	24	32	24	32
		Significativos	21	23	21	23

Notas: Las series de diferencias son aquellas de las variaciones mensuales. Los modelos son estimados asumiendo una matriz de varianza-covarianza indefinida, escalar y diagonal para los modelos DVECH, CCC y DBEKK respectivamente. El coeficiente del término auto regresivo se reporta en negritas e itálicas. Se reporta el número de parámetros estimados y significativos de cada una de las especificaciones de los

modelos. Se considera un nivel de significancia del 10% para determinar los parámetros significativos. Uno, dos y tres asteriscos denotan nivel de significancia del 10, 5 y 1 %.

Econométricamente, los resultados anteriores sugieren que hay relativamente pocas relaciones e interrelaciones entre México, Canadá y Estados Unidos. El bajo número de parámetros significativos sugiere que la capacidad descriptiva del modelo es limitada. Sólo hay algunas interrelaciones entre la volatilidad y las series de México, Canadá y Estados Unidos. De hecho, la escasez de parámetros significativos del modelo AR(12)-CCC-TGARCH(1,1) sugiere que los modelos DBEKK pudieran ser mejores para describir las series. Intuitivamente, la evidencia sugiere que los países de la región se encuentran parcialmente integrados y segmentados. Quizá como consecuencia de diferencias regulatorias, fiscales, institucionales y de desarrollo entre los tres países.

Finalmente, pueden sintetizarse los principales resultados de esta sección de la siguiente manera: 1) Los modelos de tipo DBEKK son los que describen mejor las series de cada país; 2) el modelo que describe mejor las series de la región es el AR(12)-CCC-TGARCH(1,1); 3) hay relativamente pocas relaciones e interrelaciones a nivel regional; 4) a nivel nacional hay relaciones e interrelaciones entre las series de los países; 5) estas interrelaciones son más relevantes para México, que para los otros países; 6) las buenas y malas noticias tienen impactos asimétricos sobre la volatilidad conjunta de las series de la región; y 7) las perturbaciones de los modelos con mejor bondad de ajuste siguen la distribución *t* de Student multivariada.

7. Conclusiones y discusión

En esta investigación se han usados modelos GARCH multivariados para estudiar las relaciones e interrelaciones de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios en los países de América del Norte. Las series se han estudiado considerando agrupamientos a nivel nacional y regional. El estudio se ha sustentado en análisis de estadística descriptiva, pruebas de raíz unitaria y de efectos ARCH y doce modelos GARCH multivariados. Los modelos se han usado con fines de modelación econométrica y de análisis de las características de las series. La muestra usada incluye series mensuales de las variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios de México, Canadá y Estados Unidos entre febrero de 1992 y febrero de 2015.

Los resultados del estudio muestran que las series de variaciones de tasas de interés, tipos de cambio y precios manifiestan curtosis excesivas, clusters de volatilidad, asimetrías, distribuciones no normales, volatilidades no constantes y movimientos conjuntos de medias y varianzas. La evidencia también sugiere que existe evidencia mixta sobre la validez de las condiciones de paridad internacional en América del Norte. Así, mientras la PPP parece ser validada, los efectos Fisher parecen no serlo. Además, la evidencia sugiere que la serie de variaciones de precios de Canadá no puede ser descrita ni analizada mediante modelos de la familia ARCH. Las mismas no manifiestan efectos ARCH.

Los ejercicios de modelación y análisis de las series de variaciones muestran que: 1) Los modelos de tipo DBEKK son los que describen mejor las series de cada país; 2) el modelo que describe mejor las series de la región es el AR(12)-CCC-TGARCH(1,1); 3) hay relativamente pocas relaciones e interrelaciones a nivel regional; 4) a nivel nacional hay relaciones e interrelaciones entre las series de los países; 5) estas interrelaciones son más relevantes para México, que para los otros países; 6) las buenas y malas noticias tienen impactos asimétricos sobre la volatilidad conjunta de las series de la región; y 7) las perturbaciones de los modelos con mejor bondad de ajuste siguen una distribución *t* de Student multivariada.

Analíticamente, los resultados anteriores tienen implicaciones sobre la integración de América de Norte. La evidencia sugiere que ha habido un proceso de integración parcial entre los países. Incluso, la evidencia sugiere que las tasas de interés, los tipos de cambio y los precios de bienes y servicios distan de estar en equilibrio. Por tanto, los resultados justifican las prácticas de cobertura, diversificación y de arbitraje al interior de la región. Asimismo, la evidencia muestra que hay interrelaciones importantes entre la volatilidad y las series a nivel nacional. Estas interrelaciones son más relevantes en México, que en Canadá y en Estados Unidos. [20] Por tanto, la evidencia sugiere que México es muy vulnerable ante choques internos y externos.

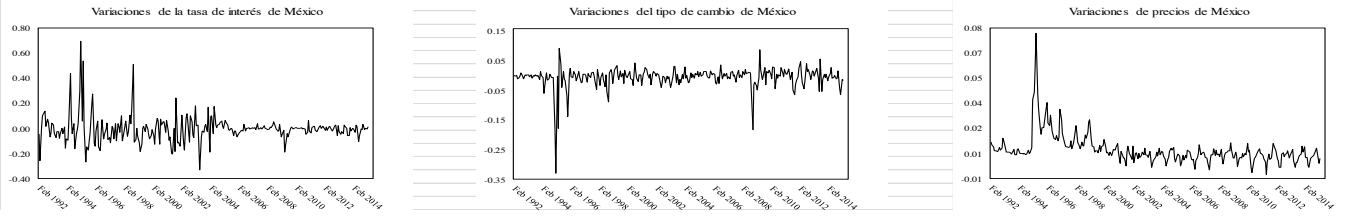
[20] La relevancia de las interrelaciones se estima con base en la proporción de parámetros significativos de la matriz de varianza-covarianza. En México, dicha proporción es del 89 por ciento (16 de 18 parámetros). Véase Tabla 6.

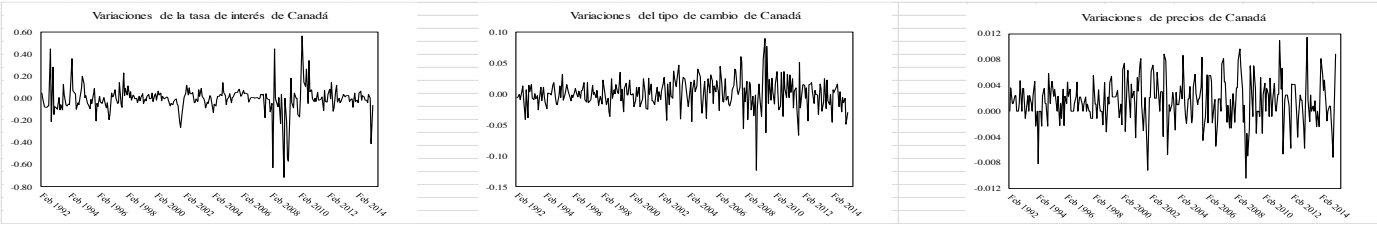
Los resultados del estudio también tienen implicaciones financieras y econométricas. Particularmente, desde una perspectiva financiera, la evidencia sugiere que la adopción de estándares internacionales de regulación y administración de riesgos en la región debiera hacerse con sumo cuidado debido a la predominancia de patrones nacionales de comportamiento dinámico. Por tanto, la adopción de dichos estándares podría inducir efectos no esperados debido a la existencia de relaciones e interrelaciones específicas a cada país. Econométricamente, los resultados del análisis también sugieren que futuros estudios debieran considerar que las perturbaciones de los modelos siguen distribuciones no normales.

Finalmente, debe enfatizarse que la investigación referida a la modelación econométrica y el análisis de series tiene amplias posibilidades de desarrollo. En los países de América del Norte, la importancia de este tipo de investigación se vincula directamente con el desarrollo económico y financiero. Los resultados de las políticas monetarias, cambiarias y de estabilidad de precios; así como las prácticas de regulación financiera y de administración de riesgos dependen en buena medida de las relaciones e interrelaciones de las tasas de interés, los tipos de cambio y los precios. Por estas razones, la necesidad de desarrollar investigación teórica y aplicada para entender a las series económicas y financieras se justifica plenamente.

APÉNDICE

En este apéndice se muestran las series de variaciones de los países de América del Norte. Se incluyen estas gráficas para ilustrar la existencia de clusters de volatilidad, volatilidades no constantes y movimientos conjuntos de medias y varianzas.





Bibliografía

Bank of Canada, (s.f.), Monetary Policy, Recuperado el 4 de abril de 2015, de http://www.bankofcanada.ca/core-functions/monetary-policy/#inflation

Bauwens, L., Laurent, S., y Rombouts, J. V. K., (2006), "Multivariate GARCH models: A survey", Journal of Applied Econometrics, 21(1), 79-109

Bollerslev, T., (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity", Journal of Econometrics, 31(3), 307-327

Bollerslev, T., (1990), "Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model", Review of Economics and Statistics, 72(3), 498-505

Bollerslev, T., Engle, R. F., y Wooldridge, J. M., (1988), "A capital asset pricing model with time-varying covariances", Journal of Political Economy, 96(1), 116-131

Burnham, K. P. y Anderson, D.R., (2002), Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach, Segunda edición, Nueva York, Springer-Verlag
Eiteman, D.K., Stonehill, A.I. y Moffet M.H., (2007), Multinational Business Finance, Onceava edición, Estados Unidos, Boston, Pearson/Addison Wesley

Engle, R.F. y Kroner, F., (1995), "Multivariate simultaneous generalized ARCH", Econometric Theory, 11(1), 122-150

Engle, R.F., (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation", Econometrica, 50(4), 987-1007
Imbs, J., (2004), "Trade, finance, specialization and synchronization", Review of Economics and Statistics, 86(3), 723-734

Lahrech, A. y Sylwester, K., (2013), "The impact of NAFTA on North American stock market linkages", The North American Journal of Economics and Finance, 25(1), 94-108
Lederman, D., Maloney, W.F. y Servén, L., (2005), Lessons from NAFTA for Latin America and the Caribbean, Palo Alto, Stanford University Press y World Bank

López Herrera, F., Ortíz, E. y Cabello. A., (2009), "Las interrelaciones de volatilidad y rendimientos entre los mercados de valores del TLCAN", Investigación Económica, 68(267), 83-114

Minovic, J., (2009), "Modeling multivariate volatility procesess: Theory and evidence", Theoretical and Applied Economics, 5(5), 21-44

Phillips, P.C.B. y Perron. P., (1988), "Testing for a unit root in time series regression", Biometrika, 75(2), 335-346

Ruiz Porras, A., (2010), "Globalización, ciclos económicos y crisis global, 2007-2010", Expresión Económica, 24, 43-61

Ruíz Porras, A. y Ruíz Robles, B., (2015), "La hipotesis de eficiencia y la modelación de series bursátiles mexicanas: Un análisis mutivariado", Economía Informa, 390, 28-57

Silvennoinen, A. y Teräsvirta, T., (2009), "Multivariate GARCH models", en T.G. Andersen, R.A. Davis, JP, Kreiß y T. Mikosch, (eds.), Handbook of Financial Time Series, Springer-Verlag, Berlín, Alemania, 201-229

Xie, S. Cheng, T. y Chia WM., (2013), "Trade, finance, specialization and synchronization in the Asia-Pacific", Journal of the Asia Pacific Economy, 18(2), 253-273.

CAPÍTULO XV

A Study of Co-Movements between Oil Price, Stock Index and Exchange Rate under a Cross-Bicorrelation Perspective: The Case of Mexico

Semei Coronado[1], Omar Rojas[2]

Abstract

In this chapter we studied the nonlinear co-movements between the Mexican Crude Oil price, the Mexican Stock Market Index and the USD/MXN Exchange Rate, for the sample period from 1994 to date. We used a battery of nonlinear tests, cf. (Patterson & Ashley, 2000) and one multivariate test, in order to determine the dynamic co-movement exerted from the oil prices to the stock and exchange rate markets. Such co-movement and time windows are exposed using the Brooks & Hinich (1999) cross-bicorrelation statistical test. The effects of oil spills on other markets have been studied from different angles and on several financial assets. In this study, we focus our attention on the detection, not only of the correlations amongst markets but on the epochs in which such nonlinear dependence might occur. This is important in order to understand better, how the markets that drive the economy interact with each other. We hope to contribute to the literature with such findings, filling a gap in the emerging markets context, in particular, for the Mexican case.

Keywords: Nonlinear tests; Co-movement; Financial markets
JEL Classification: C22, G15, N26

[1] Universidad de Guadalajara, Profesor del Departamento de Métodos Cuantitativos, México; e-mail: semeic@cucea.udg.mx
[2] Universidad Panamericana, Campus Guadalajara, Profesor-Investigador de la Escuela de Ciencias Económicas y Empresariales, México; e-mail: orojas@up.edu.mx

1. Introduction

The study of oil prices is of vital importance, given the high volatility levels that it has reached in the last years and the impact it has on other financial markets and macroeconomic variables of all countries of the world and, in particular, in importing and exporting countries, as is the case of Mexico. Furthermore, oil is a product from which other products are derived, so they can be used in different ways, having an impact on financial markets and exchange rates; the fluctuation of oil prices might affect the global economy behavior: raising the costs of production of goods and services, having and impact on inflation, transfer of wealth from oil consumers to oil products and consumer's trust, amongst others, cf. (Blanchard & Gali, 2007; Jiménez-Rodríguez & Sánchez, 2005; Turhan, Hacihasanoglu, & Soytas, 2013).

If oil prices have a spillover impact on financial markets, then it would be expected for such prices to be correlated to the prices of stocks. As Jones *et al*. (2004) states, "Ideally, stock values reflect the market's best estimate of the future profitability of firms, so the effect of oil price shocks on the stock market is a meaningful and useful measure of their economic impact. Since asset prices are the present discounted value of the future net earnings of firms, both the current and the expected future impacts of an oil price shock should be absorbed fairly quickly into stock prices and returns, without having to wait for those impacts to actually occur." Therefore, if there is a rise on the oil prices, the stock, markets would experience a decrease on their returns, depending on whether it is an importing or exporting country: for an importing country, the rise on the oil price puts decreasing pressure on the exchange rate and a rise on the internal inflation (R. D. Huang, Masulis, & Stoll, 1996); in this way, oil prices are related to exchange rates due to import and exports of consumers and producers, as already pointed out by Golub (1983) and Krugman (1983), and more recent studies, cf. (Akram, 2004; Amano & Van Norden, 1998; Bénassy-Quéré, Mignon, & Penot, 2007; Lizardo & Mollick, 2010; Park & Ratti, 2008; Reboredo, Rivera-Castro, & Zebende, 2014). Therefore, the study of the relationship between oil, exchange rate and financial markets, in particular in the case of Mexico, if of great interest, given that Mexico is an oil producer and considered a growing emerging economy.

There are different studies on the relationships between oil prices and macroeconomic variables, specifically between exchange rate and financial markets. Such studies have

been done in developed and emerging markets, and in countries that import and export oil, view from different economic and financial perspectives, if the markets are efficient. Regime switching thresholds, supply and demand equilibrium points, long-run relationships, monetary and fiscal policy impacts on oil prices, appreciation or depreciation of currency usually with respect to US dollar or Euro provide better understanding of portfolios for stock holders and managers, amongst others, cf. (Abdalla & Murinde, 1997; Syed A Basher & Sadorsky, 2006; Syed Abul Basher, Haug, & Sadorsky, 2012; Eryigit, 2012; B.-N. Huang, Hwang, & Peng, 2005; Imarhiagbe, 2010; Jawadi & Leoni, 2009; Liu, Ji, & Fan, 2013; Narayan & Narayan, 2010; Sahu, Mondal, & others, 2015).

In the case of Mexico, there are some studies that have focused their attention on the relationship of the oil price and the financial market, applying different methodologies, cf. (Filis, Degiannakis, & Floros, 2011; Hammoudeh & Li, 2005; Maghyereh, 2004; Mohanty, Nandha, Turkistani, & Alaitani, 2011); for the relationship between oil price and exchange rate cf. (Turhan et al., 2013), whereas for the relationship between exchange rate and financial market, cf. (Diamandis & Drakos, 2011; Ocampo, 2009; Volkov & Yuhn, 2015).

The research presented in this chapter analyzed the case of Mexico, given that it is an oil exporting country and a growing emerging economy. In this chapter we study the nonlinear co-movements between the Mexican Crude Oil Price –not the Brent or the West Texas International–, the Mexican Stock Market Index (IPC), and the USD/MXN Exchange Rate, for the sample period from 1994 to date. We used a battery of nonlinear tests, cf. (Patterson & Ashley, 2000) and one multivariate test, in order to determine the dynamic co-movement exerted from the oil prices to the stock and exchange rate markets. Such co-movement and time windows are exposed using the Brooks & Hinich (1999) cross-bicorrelation statistical test, which is a non-linear multivariate test that uses cross-bicorrelation, in order to determine the functional non-lineal relationship between a pair of time series. It uncovers the direction of flow for such bi-correlations and the significant lag through the third order distribution moments. This test has been successfully applied to different economic and financial nonlinear time series, cf. (Coronado-Ramírez, Rojas, Romero-Meza, & Venegas-Martinez, 2015; Czamanski,

Dormaar, Hinich, & Serletis, 2007; Romero-Meza, Coronado, & Serletis, 2014; Serletis, Malliaris, Hinich, & Gogas, 2012).

The effects of oil spills on other markets have been studied from different angles and on several financial assets. In this study we focus our attention on the detection, not only of the correlations amongst markets, but on the episodes in which such nonlinear dependence might occur. This is important in order to understand better how the markets that drive the economy interact with each other. We hope to contribute to the literature with such findings, filling a gap in the emerging markets context, in particular for the Mexican case.

The structure of the document is as follows: in section 2 we study the time series of prices and returns from a univariate point of view, showing descriptive statistics, stationarity and nonlinearity tests; in section 3 we describe the methodology used, namely the Brooks and Hinich cross-bicorrelation test; section 4 presents the results and discussion of the empirical analysis, whereas section 5 concludes.

2. Empirical Data

Three time series prices are analyzed in this paper: Mexican Mayan Crude Oil (Oil), Exchange Rate US dollar/ Mexican peso (USD/MXN) and Mexican Stock Market Index (IPC). All prices were collected from *Bloomberg*. The time period analyzed spans from February 01, 1998 to January 30, 2014, for a total 4,278 observations per series.

In order to make the data usable for the analysis, they were transformed to eliminate any linear dependencies. The resulting transformed series were used to test for co-movements and dependency. Next we show the data transformation process.

As a first step, prices were transformed into a series of continuously compounded percentage returns, by taking the difference of the logarithms of consecutive observations, *i.e.* $r_t = 100\ (\ln(p_t) - \ln(p_{t-1}))$, where p_t is the price of the series on day t. Fig. 1 shows the prices and returns for all series.

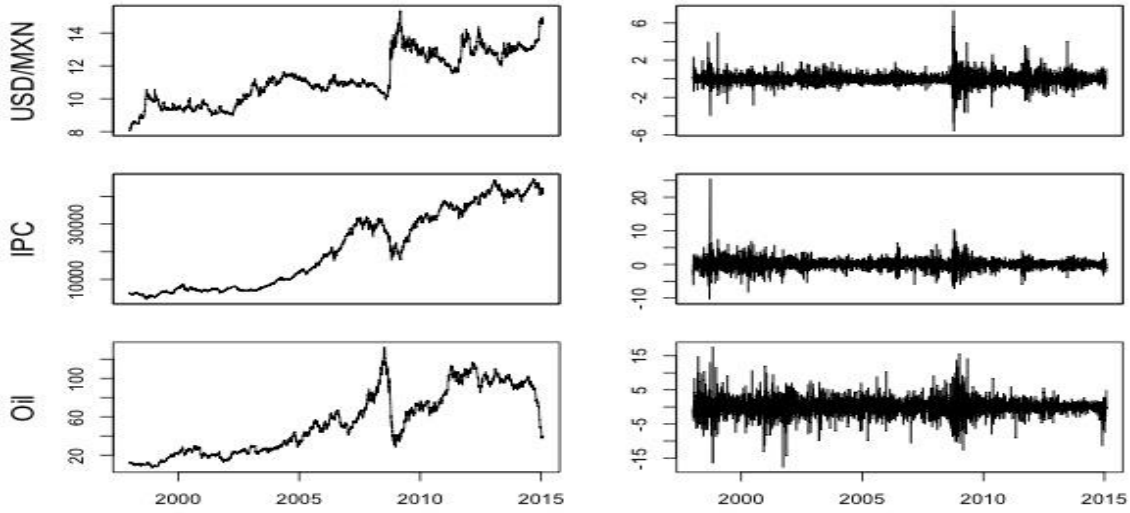


Fig. 1 Time series plot of prices (left) and returns (right) for USD/MXN **(top), IPC (middle) and Oil (bottom). Source: Authors elaboration using *Bloomberg* data.**

2.1. Descriptive Statistics

Summary statistics for the returns are shown in Table 1. The statistics are consistent, as expected, with some of the stylized facts of financial time series (Cont, 2001). In particular, the kurtosis indicates that return distributions are leptokurtic. Furthermore, the Jarque-Bera statistic confirms returns not normally distributed.

Table 1. Summary statistics for the return time series

Statistics	Oil returns	USD/MXN returns	IPC returns
Observations	4277	4277	4277
Mean	0.03	0.01	0.05
Standard Deviation	2.45	0.63	1.51
Skewness	-0.04	0.77	1.10
Kurtosis	6.09	13.91	22.55
Jarque-Bera	1699.89	21639.46	68938.14

2.2. Stationarity tests

In table 2, we present results of the ADF (Dickey & Fuller, 1981) and RALS (Im, Lee, & Tieslau, 2014) tests. As it is well known, as more negative the value of the statistic, the stronger the rejection of the hypothesis, that there is a unit root at the 1%, 5% and

10% significance level chosen. As we can observe, both tests imply rejection of the null hypothesis.

Table 2. Results from the ADF and RALS stationarity tests.

Series	Statistic	
	ADF	RALS
Oil	-14.88	-15.82
USD/MXN	-17.73	-19.09
IPC	-17.29	-18.37

*significant at 1%, 5% and 10%. The critical value for the ADF test is -3.96,-3.41,-3.12 respectively

2.3. Tests of nonlinear serial dependence

We present the results of the three nonlinear tests applied to the sample, from the battery of nonlinear tests of Patterson and Ashley (2000): McLeod and Li (1983), Engle LM (1982) and BDS (Broock, Scheinkman, Dechert, & LeBaron, 1996). A series of conventional linear tests, as those mentioned in the introduction, were run beforehand and are available from the authors upon request. These tests are incapable of capturing nonlinear patterns in the data.

The series were adjusted an $AR(1)$, $AR(5)$ and an $AR(4)$, prior to the application of the tests, in order to remove any linear dependence, where the optimal lag was chosen to minimize the Schwarz's Bayesian Information Criterion. Therefore, we reject the null hypothesis, given the significance level of 5% (see table 3), where the pure white noise is explained solely by the nonlinearity of the historic series.

Table 3. Nonlinearity test results

Test	OIL	USD/MXN	IPC
	$AR(1)$	$AR(5)$	$AR(3)$
McLeod-Li test			
Lag 5	0.000	0.000	0.000
Lag 15	0.000	0.000	0.000
Lag 20	0.000	0.000	0.000
Engle LM test			
Lag 5	0.000	0.000	0.000

Lag 15	0.000	0.000	0.000
Lag 20	0.000	0.000	0.000
BDS test			
m = 2, ε = 0.5s	0.000	0.000	0.000
m = 3, ε = 1s	0.000	0.000	0.000
m = 4, ε = 1.5s	0.000	0.000	0.000

3. Methodology

Brooks and Hinich (1999) claim that the cross-bicorrelation test would permit a researcher to identify any existence of nonlinear dependence between two pairs of variables. The size of the sample series is *N*, with two stationary variables $x(t_k)$ and $y(t_k)$. As we are working with the first lagged differences and small sub-samples of the total series, the assumption of stationarity is reasonable. Each series is separated into equal length non-overlapping moving time windows or frames, where *t* is an integer and *k* represents the *k*-th window, and both series are jointly covariance stationary, which have been standardized. The test's null hypothesis states that the two variables $x(t_k)$ and $y(t_k)$ have no dependence and in fact are pure white noise. The alternative hypothesis states that the series have cross-bicovariances, $C_{xxy}(r,s)$ defined as $E[x(t_k)x(t_k+r)y(t_k+s)]$, different from zero.

Under the null hypothesis, $C_{xxy}(r,s)$ is zero for every r,s except when $r=s=0$. According to the test, there is dependence between a pair of variables if $C_{xxy}(r,s) \neq 0$ for at least one value of r or a pair of values of r and s. Next, we present the statistics that give the r,s sample xxy cross-bicorrelation

$$C_{xxy}(r,s) = (N-m)^{-1} \sum_{t=1}^{N-m} x(t_k)x(t_k+r)y(t_k+s)$$

where $m = \max(r,s)$.

We can interpret the cross-bicorrelations, as the degree of relation of the value of one variable, with the value of the cross-correlation of the two variables. The second-order test does not include current elements, and is executed on the errors terms of an $AR(p)$ fit to clean out the univariate autocorrelation arrangement. Thus, current correlations will not be a reason for rejecting the null hypothesis. To perform the third-order test, we apply the test on the error terms of a $VAR(1)$ for USD/MXN-IPC and OIL-IPC, $VAR(2)$ for OIL-USD/MXN; the model having a current term in one of the equation

(the order p of the $AR(p)$ and $VAR(p)$ models is chosen to minimize the Schwartz (BIC) criterion). The pre-whitening step is grounded on the elimination of any presence of linear correlation or cross-correlation. Therefore, any outstanding dependence between the variables, should be classified as nonlinear. Let $L = N^c$ where $0 < c < 0.5$ (for our case of study we selected $c = 0.4, N = 4277$, to have 152 non-overlapped windows of length 28 days). The corresponding test statistics for non-zero cross-bicorrelations are,

$$H_{xxy}(N) = \sum_{s=-L}^{L} \sum_{r=1}^{L} (N-m) C_{xxy}^2(r,s), \quad ' - s \neq -1,1,0$$

In these statistics L is the number of times that the correlations are verified and $L(2L-1)$ is the number of times that the cross-bicorrelations are probed. Following Hinich (1996), we state that H_{xxy} are asymptotically χ^2 distributed with L and $L(2L-1)$ degrees of freedom, as $N \to \infty$.

4. Results and discussion

In table 4 we present the results of the Brooks and Hinich cross-bicorrelation test. The first column shows the total number of non-overlapped windows, in which the sample was partitioned, the second column the length of each window measured in days, the third column the pair of series for which the cross-bicorrelation is tested, the fourth column shows the number (and percentage from the total) of significative windows, where periods of nonlinearity were found, and the fifth column presents the correlation between the pair of return time series under study.

Table **4**. Cross-Bicorrelation test results

Windows Total	**Window**	**Series**	**Significative xxy windows**	**Correlation (xxy, yyx)**
152	28	OIL-USD/MXN	73 (48.0 %)	0.40
152	28	USD/MXN-IPC	16 (10.5 %)	0.65
152	28	OIL-IPC	120 (78.9 %)	0.62

As can be observed from the table, there is more cross-bicorrelation or co-movements between Oil and IPC, indicating a clear spillover, although this pair is not the one with

the highest correlation from the three pairs of series studied. The higher nonlinear dependence observed in the Oil-IPC might be due to the fact that the Mexican economy is highly dependent on oil exports and when there are high volatility periods in the oil price, the uncertainty in such price might affect the prices of firms listed in the IPC. From Fig. 1, it can be observed that the Oil and IPC time series have the same tendency from which a positive bidirectional relationship can be inferred, although there is a period between 2007 and 2009, where both series decrease and then increase again.

The USD/MXN-IPC pair of return time series is the one with highest correlation (0.65) although with the smallest (10.5%) percentage of cross-bicorrelation windows. We explain such a high correlation from the fact that Mexico, being an oil exporter and a growing emerging economy, attracts foreign investments that come in and out according to financial market expectations, which impacts the exchange rate and the stock market.

Finally, the Oil-USD/MXN pair of return series exhibits 48% of significant cross-bicorrelation windows with the lowest correlation (0.40) of all series under study. The periods of co-movement might be due to the fact that when there is an increase in oil prices it impacts financial markets, appreciating the exchange rate in oil exporting economies, as is the case of Mexico.

In Fig. 2 we show the $(1-p)$-values of the significant cross-bicorrelation non-overlapped windows, where nonlinear dependence amongst the pairs of return time series occurs. One can observe, how the cross-correlation method allows the researcher to localize in time, the periods of such dependence. All dates of each window are available from the authors upon request.

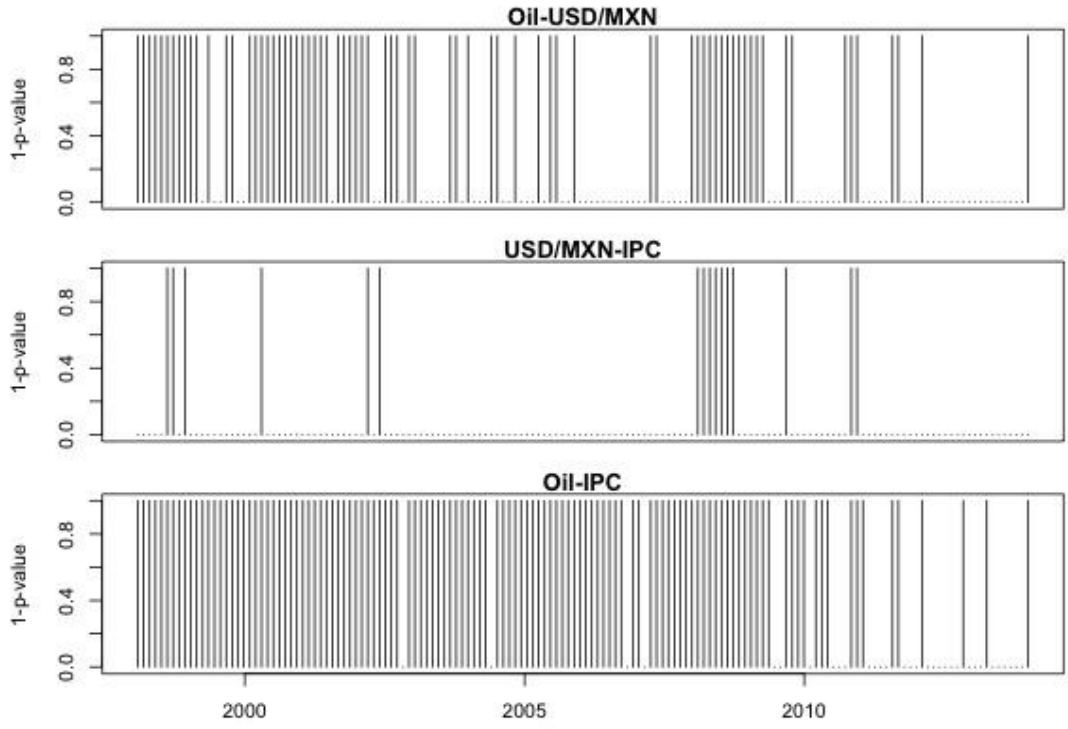


Fig 2. (*1*−□*)*-values of the significant cross-bicorrelation windows by date. Source: The authors.

5. Conclusions

We have studied the stationarity and nonlinearity of the return time series of Mexican Crude Oil, USD/MXN exchange rate and Mexican Stock Index (IPC). After proving the series stationary and nonlinear, we used the Brooks and Hinich crosss-bicorrelation statistical test, which enabled the researcher to uncover co-movement, through periods of nonlinear dependence, on pairs of time series. We found a number of significant windows of nonlinear dependence amongst the Oil-IPC (78.9%), Oil-USD/MXN (48%) and USD/MXN-IPC (10.5%) and gave plausible interpretations for such periods of nonlinear dependence. Some of the cross-bicorrelation moments identified, might be prone to a deeper exploration, from an economical point of view and is left as work in progress.

Acknowledgements

We thank Rubén Chavarín-Rodriguez for constructive comments that enabled us to improve our manuscript. All possible errors remain the sole responsibility of the authors.

References

References

Abdalla, I. S. A., & Murinde, V. (1997). Exchange rate and stock price interactions in emerging financial markets: evidence on India, Korea, Pakistan and the Philippines. *Applied Financial Economics*, *7*(1), 25–35.

Akram, Q. F. (2004). Oil prices and exchange rates: Norwegian evidence. *The Econometrics Journal*, *7*(2), 476–504.

Amano, R. A., & Van Norden, S. (1998). Oil prices and the rise and fall of the US real exchange rate. *Journal of International Money and Finance*, *17*(2), 299–316.

Basher, S. A., Haug, A. A., & Sadorsky, P. (2012). Oil prices, exchange rates and emerging stock markets. *Energy Economics*, *34*(1), 227–240.

Basher, S. A., & Sadorsky, P. (2006). Oil price risk and emerging stock markets. *Global Finance Journal*, *17*(2), 224–251.

Bénassy-Quéré, A., Mignon, V., & Penot, A. (2007). China and the relationship between the oil price and the dollar. *Energy Policy*, *35*(11), 5795–5805.

Blanchard, O. J., & Gali, J. (2007). *The Macroeconomic Effects of Oil Shocks: Why are the 2000s so different from the 1970s?*

Broock, W. A., Scheinkman, J. A., Dechert, W. D., & LeBaron, B. (1996). A test for independence based on the correlation dimension. *Econometric Reviews*, *15*(3), 197–235.

Brooks, C., & Hinich, M. J. (1999). Cross-correlations and cross-bicorrelations in Sterling exchange rates. *Journal of Empirical Finance*, *6*(4), 385–404.

Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, *1*, 223–236.

Coronado-Ramírez, S., Rojas, O., Romero-Meza, R., & Venegas-Martinez, F. (2015). *A study of co-movements between USA and Latin American stock markets: a cross-bicorrelations perspective. Forthcoming.*

Czamanski, D., Dormaar, P., Hinich, M. J., & Serletis, A. (2007). Episodic nonlinearity and nonstationarity in Alberta's power and natural gas markets. *Energy Economics*, *29*(1), 94–104.

Diamandis, P. F., & Drakos, A. A. (2011). Financial liberalization, exchange rates and stock prices: Exogenous shocks in four Latin America countries. *Journal of Policy Modeling*, *33*(3), 381–394.

Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1981). Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*.

Eryigit, M. (2012). The dynamical relationship between oil price shocks and selected macroeconomic variables in Turkey. *Ekonomska Istrazivanja*, *25*(2), 263.

Filis, G., Degiannakis, S., & Floros, C. (2011). Dynamic correlation between stock market and oil prices: The case of oil-importing and oil-exporting countries. *International Review of Financial Analysis*, *20*(3), 152–164.

Golub, S. S. (1983). Oil prices and exchange rates. *The Economic Journal*, 576–593.

Hammoudeh, S., & Li, H. (2005). Oil sensitivity and systematic risk in oil-sensitive stock indices. *Journal of Economics and Business*, *57*(1), 1–21.

Hinich, M. J. (1996). Testing for dependence in the input to a linear time series model. *Journal of Nonparametric Statistics*, *6*(2-3), 205–221.

Huang, B.-N., Hwang, M. J., & Peng, H.-P. (2005). The asymmetry of the impact of oil price shocks on economic activities: an application of the multivariate threshold model. *Energy Economics*, *27*(3), 455–476.

Huang, R. D., Masulis, R. W., & Stoll, H. R. (1996). Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets*, *16*(1), 1–27.

Im, K. S., Lee, J., & Tieslau, M. A. (2014). More powerful unit root tests with non-normal errors. In *Festschrift in Honor of Peter Schmidt* (pp. 315–342). New York: Springer.

Imarhiagbe, S. (2010). Impact of oil prices on stock markets: empirical evidence from selected major oil producing and consuming countries. *Global Journal of Finance and Banking Issues Vol*, *4*(4).

Jawadi, F., & Leoni, P. (2009). Threshold cointegration relationships between oil and stock markets. In *Management and Service Science, 2009. MASS'09. International Conference on* (pp. 1–4).

Jiménez-Rodríguez, R., & Sánchez, M. (2005). Oil price shocks and real GDP growth: empirical evidence for some OECD countries. *Applied Economics*, *37*(2), 201–228.

Jones, D. W., Leiby, P. N., & Paik, I. K. (2004). Oil price shocks and the macroeconomy: what has been learned since 1996. *The Energy Journal*, 1–32.

Krugman, P. (1983). Oil shocks and exchange rate dynamics. In *Exchange rates and international macroeconomics* (pp. 259–284). University of Chicago Press.

Liu, M.-L., Ji, Q., & Fan, Y. (2013). How does oil market uncertainty interact with other markets? An empirical analysis of implied volatility index. *Energy*, *55*, 860–868.

Lizardo, R. A., & Mollick, A. V. (2010). Oil price fluctuations and US dollar exchange rates. *Energy Economics*, *32*(2), 399–408.

Maghyereh, A. (2004). Oil price shocks and emerging stock markets: A generalized VAR approach. *International Journal of Applied Econometrics and Quantitative Studies*, *1*(2), 27–40.

McLeod, A. I., & Li, W. K. (1983). Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis*, *4*(4), 269–273.

Mohanty, S. K., Nandha, M., Turkistani, A. Q., & Alaitani, M. Y. (2011). Oil price movements and stock market returns: Evidence from Gulf Cooperation Council (GCC) countries. *Global Finance Journal*, *22*(1), 42–55.

Narayan, P. K., & Narayan, S. (2010). Modelling the impact of oil prices on Vietnam's stock prices. *Applied Energy*, *87*(1), 356–361.

Ocampo, J. A. (2009). Latin America and the global financial crisis. *Cambridge Journal of Economics*, *33*(4), 703–724.

Park, J., & Ratti, R. A. (2008). Oil price shocks and stock markets in the US and 13 European countries. *Energy Economics*, *30*(5), 2587–2608.

Patterson, D. M., & Ashley, R. A. (2000). *A Nonlinear Time Series Workshop: A Toolkit for Detecting and Indentifying Nonlinear Serial Dependence* (Vol. 2). Springer.

Reboredo, J. C., Rivera-Castro, M. A., & Zebende, G. F. (2014). Oil and US dollar exchange rate dependence: A detrended cross-correlation approach. *Energy Economics*, *42*, 132–139.

Romero-Meza, R., Coronado, S., & Serletis, A. (2014). Oil and the economy: A cross bicorrelation perspective. *The Journal of Economic Asymmetries*, *11*, 91–95.

Sahu, T. N., Mondal, D., & others. (2015). Crude Oil Price, Exchange Rate and Emerging Stock Market: Evidence from India. *Jurnal Pengurusan*, *42*, 75–87.

Serletis, A., Malliaris, A. G., Hinich, M. J., & Gogas, P. (2012). Episodic nonlinearity in leading global currencies. *Open Economies Review*, *23*(2), 337–357.

Turhan, I., Hacihasanoglu, E., & Soytas, U. (2013). Oil prices and emerging market exchange rates. *Emerging Markets Finance and Trade*, *49*(sup1), 21–36.

Volkov, N., & Yuhn, K.-H. (2015). Oil Price Shocks and Exchange Rate Movements. *Available at SSRN 2577409*.

CAPÍTULO XVI
Technological Catching up across Countries in Bio-Pharmaceutical Field. A Volterra Integro-Differential Equations Applications, 1980-2010

Fabián D. Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa

G. Alenka Guzmán

Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa

J. Delgado

Universidad Autónoma Metropolitana, Iztapalapa

Abstract

The aim of this research is to model the heredity principle of the Volterra integro-differential equations (*VIDE*) in the case of sectoral technological catching-up favoring its economic growth. We work on the assumption of a "non heredity principle" when considering that the future of a system for a determined moment only depends on its current state. This is a restrictive hypothesis, as sometimes, the future of a system seems to be dependent on primary states, as it is the case of the heredity. The functional form of the equation is one in which appears a convolution integral. The latter represents the hereditary part. The problem we are faced with refers to the process by which countries can benefit from the existence of a knowledge production stock that is available in this field of expertise in the rest of the world for a determined period of time.

Keywords: Patent gaps, Volterra integro-differential equations application
JEL Classification: CO1, O30

1. Introduction

We pose the following question: the technological convergence and catch up that indeed have had an impact on economic growth, can suggest that the *VIDE´*s coefficient of heredity (Research and Development for this model) will determine the trajectory of countries' patents? In this sense, the research is devoted to study in what way the stability of trajectory of patents, (specifically

conditioned by the level of accumulation of *R&D*) helps to understand the process of convergence and/or catching up. This technological variable approach is introduced in one endogenous growth model with transitional dynamics leading towards an analysis to determine and see if technological and economic convergence (sectoral *GDP* per-capita) occurs. We will lean on the specific case of the bio-pharmaceutical sector, known for its high *R&D* spending amounts and its importance regarding patents, between 1980-2008. We have based our study on *USPTO* patents classes 514, 424, 435 and 800 from the bio-pharmaceutical field and we have based our equations on developed and emerging countries (China, India and Mexico).

2. Theoretical Framework

One of the most influent contributions to the modern theory of economic growth is the one of Solow (1956) and Swan (1956); in particular, the acknowledgment of *technologic* progress as an explicative exogenous variable for *PIB* growth, in the long term was decisive for the development of new models of exogenous growth.

We are concerned of how technology and capital are related in such a way that the technological progress of an economy will largely depend on the past history of this relationship. Discoveries and innovations are born from the experience that is accumulated in the production (Arrow, 1962). Romer (1986) then creates a model where growth is sustained in a long-term basis, explained by the knowledge spillover. The activities of a firm will affect the knowledge accumulation of another. At an individual level, the decreasing capital returns will not disappear, but the economy as a whole will at least notice constant returns. In these contributions to the theory, the endogenous determinants of a sustained long-term growth rate are fundamental, as patents and *R&D*.

The measure of technology variable is a rather dark even in modern growth theory. An alternative to it is to use patent statistics as indicators of the level of technological advance (Fagerberg, 1987). The question that comes up when analyzing this is to find out how to take this concept into growth models? The integral equation

$$W(t) = kP + \int_{t_0}^{t} H(t,s)P(s)ds \qquad (1.1)$$

It is an example proposed by Volterra (Davis, 1962) to solve the problem of torsion on a rope. A first approximation of the problem considers the relationship between the torsion partner P and the angle of torsion, W, is the lineal equation

$$W(t) = kP \tag{1.2}$$

Where k is constant. Nevertheless, the elastic body has experimented fatigue of previous distortions and hence, it has *inherited,* in some way characteristics from the past. To model the previously presented he considered that the heredity effect could be an integral that sums up the contributions for a period of time $[t_o, t]$, like in (1.1), where $H(t, s)$ the kernel of the integral equations is the heredity coefficient. In a concrete way, two aspects determine the future: the current state time plus the contributions of the past heredity. The level trajectory through a period of time is thus explained by the level of patents through period t, the position of $p(t)$ in the present plus the patents correlation trajectory, and other time factors. The solution behavior of the integro-differential solution by Volterra (*VIDE*) of second class, will determine the trajectory of the patents.

The heredity factor is the sum of past contributions to the creation of knowledge for a determined time period $[t_o, t]$. The growth rate of long-term patents is, then explained by the level of patents in the t period, its position in present time, added to the path of the correlation patents and *R&D* in the time frame. A *VIDE* is suggested in this case to shape patent behavior.

The solution of this equation indicates that in long-term terms, $p(t)$ is always close to zero (Appleby, 2002b; Burton, 2005; Davis 1962). New knowledge lacks long-term dynamics. The speed at which it does depend on if capital is bounded above or not. The *R&D* level determines the rhythm in which the production of new knowledge is exhausted. The $p(t)$ trajectory can be exponentially asymptotic if the capital accumulation is limited in case there are no limits to the accumulation of *R&D,* it can display a sub-exponential behavior (Applebyb, 2002; Murakami, 1991). Following a Romer-type shaping (1986) we found out that there is an endogenous growth with transitional dynamics even under increasing returns to capital. The dynamic of Innovation is crucial in the understanding of technological gaps.

3. Endogenous growth with dynamic technology

In Romer model (1986), the relation externalities associated with knowledge accumulation, generate that optimal competitive balance is not reached. The market balance drives to a level of inversion inferior to the optimal for social inversion. The critiques to this model part from the externalities that favor an explosive growth. Parting from a more general abstraction, we could say, except from the η that there is not such thing as a long-term, sustained and stable growth trajectory, which exists under very restrictive hypothesis. It is said that there is a visible structural instability in these models reflected upon the explosive growth. The idea that backs up the endogenous growth models is simple: the new knowledge is born from previous one; they grow according to the inversion in the *R&D*. For some it is necessary to back up this idea with works dealing with the history of technology.

The $A\hat{k}p$ model

This work is considered the application of the heredity principle to the technological catch up problem. The last one refers to the process for which the countries can have a benefit because of the existence of a knowledge production stock available in the rest of the world. When the catch up happens, it is expected that the poorer countries experiment a faster economic growth. This investigation wants to verify if the technological and innovative gaps, specially, the patents level gaps, which are strongly related to the differences between the developed countries and those in development. The means to catch up in a high tech industry for non developed countries could be explained with higher growth rates than those registered in the industrialized countries, this subject to an important development in the industrial and technological capacities. The correlation between *R&D* and the patents is a factor that may contribute to explain the dynamics in the technological convergence. Differently explained, it means to understand the performance of the Innovation capacity (the patent capacity in our case). In this situation, the convergence leads to the creation of a virtuous cycle that together with the technological transference and the growth in the productivity, could lead the non-developed countries to a convergence trajectory and a catch up. A crucial point to go through this work is the trajectory that follows the patent

production and how it determines if convergence is possible or not. This was mentioned before through the introduction of this work, and it implied assuming that the technology is not a constant as the models (Solow and endogenous) propose.

If the growth of the patent stock (finished projects) in time only depend in the knowledge in the period *t,* it means that there is not such thing as a heredity effect from the past (the integral in the (1.1) equation. When the expense in *R&D* is not considered, it will give as a result that the number of patents per year decreases at a constant rate a^a. Without new ideas there is no advance, hence $p(t)$ is decreasing

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -ap(t) \\ p(t) &= p(0)e^{-at} \end{aligned} \tag{2.1}$$

The last equation in (2.1) shows that in long term the knowledge production will be null. Nevertheless, the heredity factor implies us to consider the past of the trajectory followed by the patents in a period of time $[\tau,t]$, in that sense we have that

$$\begin{aligned} &\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t H(t-\tau)\,p(\tau)d\tau \\ &a > 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

In (2.2) the heredity factor $H(t-\tau)$ capital can be $K(t)$, the inversion in *R&D*, a constant or a discount rate such as the Romer example (2001). In that same way as in the Volterra model (Davis, 1962), the trajectory of the patents level through a time period is explained by the level of patents in the period t , the position of $p(t)$ in the present plus the trajectory of the patents correlation and other time factors. The behaving of the (2.2) solution will determine the possibility of the catch up. Because the patents are a non-rivalry good, inputs for producing goods and knowledge.

The capital $K(t)$ is destined to the production of goods

$$Y(t) = [K(t)\,p(t)]^{\alpha}[AL(t)^{1-\phi}]^{1-\alpha} \tag{2.3}$$

And the combination with the available knowledge, $p(t)$, is a source of technical progress

$$A = B[K(t)\,p(t)]^{\phi}, B > 0,\ \phi \geq 0 \tag{2.4}$$

Where ϕ is the scale parameter of knowledge and $k = K/L$. If $\phi = 0$ and $p(t) = 1$, the equation (2.3), is the function of production Cobb-Douglas; in case of $\phi = 1$ and $p(t) = 1$, we talk about the *AK* function. The rest of the equations are

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K(t) \tag{2.5}$$

$$\dot{L}(t) = nL(t) \tag{2.6}$$

With $n > 0$, $s > 0$, $\delta > 0$ y $0 < \alpha < 1$. The equation (2.5) refers to the inversion and the equation (2.6) shaping the work dynamic, and the equations (2.1) to (2.6) shape the economy.

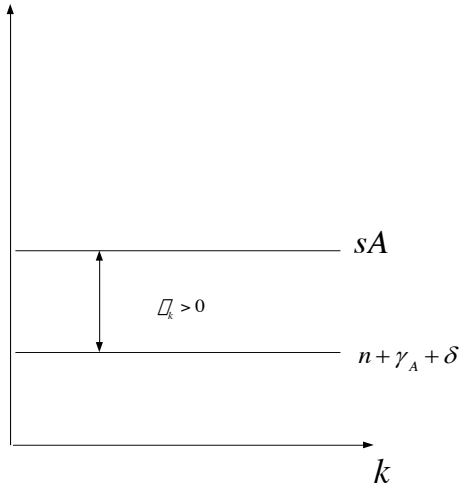
3 Solution to the $\hat{A}kp$ model

Introduction

The models of endogenous growth are mainly characterized by observing the performance at least not as capital decrement in a long term (Barro and Sala-i-Martin, 1999). In the endogenous growth theory, the long-term capital tendency to present decrement returns must be eliminated. The most elemental of those models is when $Y = AK$ where the medium product and the marginal product for each worker is the same to the A constant. This fact means that the growth rate for any level is k, is $\gamma_k = sA - [n + \delta]$: in a long term, the product per capita can grow even though it does not exist (whatever the reason is) exogenous technical progress, this is $\gamma_A = 0$. The absence of decrement returns of capital is the fundamental property of the exogenous growth models. For some economists it is explained if the concept of capital is expanded in order to

include the human capital (Knight, 1944). The distance between the sA parallels and $[n+\delta]$ of graphic 3.1 represents the capital growth rate, γ_k .

Graphic 3.1 *The AK model*



Considering $sA>[n+\delta]$ the capital growth rate is positive and constant, in that case, there is perpetual growth of k even without a technical progress. Accordingly, to this, the balance growth rate γ_k^* is equal to γ_k for any level of k , $\gamma_k=\gamma_k^*$. If we define the consumption per-capita as $c=(1-s)y$, we find out that $\gamma_c^*=\gamma_k^*$. In the same way $\gamma_y=\gamma_k$ for all $t\in[0,\infty)$ because the product per capita is $y=Ak$.

In this way the product, the capital and the consumption per-capita grow at the same rate $\gamma=\gamma^*=sA-[n+\delta]$. The growth rate of the economy depends in the exogenous variables. For example, when the saving rate is elevated or the technology level A , γ^* is raised permanently.

The population growth n or to raise the depreciation δ leads to a contrary effect and a permanent one in γ^* . Contrary to the Solow model (1956), the *AK* model does not exhibit the property of absolute convergence, neither conditional, translating in $\partial\gamma_y/\partial y=0$ for all $t\in[0,\infty)$. This result is the principal critique to the model because the empirical evidence in favor of the conditional convergence is important. Our analysis refers to the convergence study when the technology (the number of patents) is modeled by the (2.2) equation.

Before getting to what refers to the convergence again the functions of goods and knowledge production considered in section 2[1]

$$Y(t) = [K(t)\,p(t)]^{\alpha}[AL(t)^{1-\phi}]^{1-\alpha}$$

$$A = B[K(t)\,p(t)]^{\phi},\ \ B > 0$$

The production function takes the form of

$$Y(t) = \hat{A}L^{1-\alpha-\phi(1-\alpha)}(pK)^{\alpha}(pK)^{\phi(1-\alpha)} \tag{3.1}$$

and $\hat{A} = B^{1-\alpha}$. When the function is rewritten in per-capita terms when divided between L

$$y(t) = \hat{A}k^{\alpha}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}k^{\phi(1-\alpha)} \tag{3.2}$$

We suppose as in the Romer case (1986), that $k(t)$ is the same both in $Y(t)$ as in A. The product per worker is then (intensive form)

$$y(t) = \hat{A}(kp)^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \tag{3.3}$$

If the capital accumulation is accordingly to a[2]

$$\dot{K} = sY(t) - \delta K(t) \qquad s > 0\,,\ \ \delta > 0 \tag{3.4}$$

---

[1] B is a positive constant that represents displacement in the knowledge function.

[2] It is the same as in the Solow model of just one sector of the economy. The product produced product can be used either for consumption or for investment. If $\dot{K} = Y - C$ we define the total consumption of the economy as in $C = (1-s)Y + \delta K$. See Rogers (2003).

We may consider the fundamental equation in Solow terms with a per-capita population growth and depreciation

$$\dot{k} = sf(k,p) - [n+\delta]k \tag{3.5}$$

Where $f(k,p) = \hat{A}(kp)^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$. When substituting the equation (3.3) and dividing by k

$$\begin{aligned} \gamma_k^* &= s\frac{f(k,p)}{k} - [n+\delta] \\ \gamma_k^* &= \frac{\dot{k}}{k} = s\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} - [n+\delta] \end{aligned} \tag{3.6}$$

On the other hand $f'(k)$ is

$$f'(k,p) = [\alpha+\phi(1-\alpha)]\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \tag{3.7}$$

Then $f(k,p)/k = f'(k,p)/[\alpha+\phi(1-\alpha)]$. People speak of endogenous growth if the associated growth rate γ_k^* is positive. In that case, the capital for each worker is not delimited (Barro and Sala-i-Martin, 1999). Simply because γ_k^* is positive when $k \to \infty$

$$f(k,p)/k = \hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} > [n+\delta]1/s \tag{3.7'}$$

The equation on the left is the average product, if the limit exists, then

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(k,p)}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{f'(k,p)}{[\alpha+\phi(1-\alpha)]} > \frac{1}{s}[n+\delta] \tag{3.8}$$

It could be said that the inequality showed before is the necessary and only condition for the model to show endogenous growth in a stable state. If the production function $f(k,p)$ observed decreasing capital output, the marginal product of capital $f'(k,p)$ must be bounded from below so that the condition (3.8) is achieved. There are two variables to consider in this convergence

analysis. The first one is the value of ϕ. We assume that it is greater than zero. The other variable is $p(t)$. Let us remember that it is defined by means of the integro-differential equation (2.2)

$$\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t H(t-\tau)\, p(\tau) d\tau$$
$$a > 0$$

That reflects the influence of the past knowledge in the creation of new knowledge (patents). The $H(t-\tau)$ kernel is the capital destined to research and development, $K_{R\&D}$. Its accumulation degree is decisive for the convergence dynamics. Let us look at the convergence study.

Transition to convergence when p(t)≡constant

The first case is to consider that $\phi < 1$ and p is constant. Given that

$$f'(k) = [\alpha + \phi(1-\alpha)]\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]} p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$$
$$\frac{f(k)}{k} = \hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]} p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$$

Then

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$$
$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = 0 \qquad (3.9)$$
$$\gamma_k = s\frac{f(k)}{k} - [n+\delta]$$

This first result is the Solow (1956) one. Of course that, the conditions of Inada[3] are not violated. It exists absolute or relative convergence, given that $\partial\gamma_k/\partial k<0$ is achieved. Small values of k, correspond to mayor values of γ_k. When $\gamma_y=\gamma_c=[\alpha+\phi(1-\alpha)]\gamma_k$ the analysis of γ_y y γ_c is identical. The next case is when $\phi=1$ and p is a constant. Where

$$f'(k)=\hat{A}p$$
$$\frac{f(k)}{k}=\hat{A}p$$

Then

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}f'(k)=\hat{A}p>0\\&\lim_{k\to 0}f'(k)=\hat{A}p>0\\&\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k}=\hat{A}p\\&\gamma_k=s\hat{A}p-[n+\delta]\end{aligned}\qquad(3.10)$$

Like in the AK model the Inada conditions are violated, it exists endogenous growth in a stable state[4], nevertheless neither absolute nor conditional convergence is observed, the same as in the neoclassical model. The convergence property is derived from maintaining the inverse relationship between $f(k)/k$ *and* k, which does not happen here. If $\hat{A}p>[n+\delta]$ (the growth rate for k is positive for all k) then k grows in a rate of stable state given by $s\hat{A}p-[n+\delta]$. At last, the case where $\phi>1$ and p is constant

Where

$$f'(k)=[\alpha+\phi(1-\alpha)]\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$$
$$\frac{f(k)}{k}=\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}$$

Then

[3] Si $\phi<1$ then $1-(\alpha+\phi(1-\alpha))>0$

[4] The necessary and sufficient condition is achieved $\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k}>\frac{1}{s}([n+\delta])$

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = \infty$$
$$\lim_{k\to 0} f'(k) = 0$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = \infty \tag{3.11}$$
$$\gamma_k = s[\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)}] - [n+\delta]$$

This result also violates the conditions of Inada. There is no convergence. The growth is explosive. The capital growth rate has a positive relationship with the capital, so that $\partial\gamma_k/\partial k > 0$. A particular matter deserves our attention. Under the initial supposition that p is constant, we retake the equation (2.2) supposing that the kernel is the $K_{R\&D}$ capital. Because of the commutative property of convolution, it's has to

$$\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t p(t-\tau)K_{R\&D}(\tau)d\tau$$
$$0 = -a\overline{p} + \int_0^t \overline{p}K_{R\&D}(\tau)d\tau \tag{3.12}$$
$$a = \int_0^t K_{R\&D}(\tau)d\tau$$

When applying the Laplace transform

$$aL\{1\} = L\left\{\int_0^t K_{R\&D}(\tau)\right\}$$
$$a\frac{1}{s} = \frac{\mathrm{K}(s)}{s} \tag{3.13}$$
$$a = \mathrm{K}(s)$$

When resolving for the capital with the corresponding inverse Laplace transform

$$L^{-1}[\mathrm{K}(s)] = aL^{-1}[1]$$
$$\frac{K_{R\&D}(t)}{a} = \delta(t) \tag{3.14}$$

The inverse Transform of (3.13) is the Dirac Delta defined as

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \ t \neq 0 \\ \delta(t) = \infty, \ t = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

The Dirac delta[5] is not a function in the sense that is not defined by calculus books. This one is part of the generalized functions class[6].

To assume that there is no technological change in this case means that the number of patents is constant for a period in the economy. This neoclassical supposition has its own different result in our model. It is observed that before a constant patents trajectory, this meaning the simply reproduction of knowledge, the capital involved in the production of knowledge has an enormous impulse in the initial period $t = 0$, and then it is null for the rest of the period. This result reveals the relationship between technology (number of patents) and $K_{R\&D}$ capital, when the first one is modeled as in (2.2). This is the big failure in the neoclassical model of perfect competition: thinking that the capital is qualitatively heterogeneous, the relationship with the technology level is of an endogenous character, even though it is supposed to be set and exogenous the orthodox current. Going back to (3.14) and according to the (3.15) definition, the Dirac delta is defined

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, \lim_{a \to 0} \dfrac{K_{R\&D}(t_0)}{a}, & t = t_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

The particular case where the technological change consists of reproducing the achieved in the last period obliges to invert a great quantity of capital, if increasing the per-capita product is wanted. If it is considered that the capital in the production function is the same class that the one

[5] In *The Principles of Quantum Mechanics* published in 1930, the Physics Nobel prize Paul Adrian Maurice Dirac first introduced the Dirac delta.

[6] Given the special characteristics of the Dirac's delta and its importance for the results of this investigation, it is conveniently considered for those that do not know some of its properties to consult the previously cited work. Chapter III, section 15.

involved in the knowledge production (*R&D* in (2.2)), the capital behaves as an impulse function. In the initial period the per-capita product is

$$y_0 = \hat{A}(p(t_0)\delta(t-t_0))^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \tag{3.17}$$

in addition, the production for any given period is defined as in

$$y(t) = \hat{A}\left[\sum_{i=0}^{n} p(t_i)\delta(t-t_i)\right]^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \tag{3.18}$$

Where $\Psi(t) = \sum_{i=0}^{n} p(t_i)\delta(t-t_i)$ it has the formula of an impulse train (Shah function) meaning that

$$y(t) = \hat{A}\left[\Psi(t)\right]^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \tag{3.19}$$

This result contradicts the continuity of the neoclassical production function. Supposing that the capital involved in the knowledge production, and the one represented in the production function are differentiated, we would find the same production function as in (3.3) and the capital in (2.2) it is revealed an Arrow-Debreu security (Chance, 2008). In this last point it matches up with the neoclassical model: there are no incentives for the innovation. Nevertheless, the destined capital to produce knowledge exists and it is a continent claim (Arrow-Debreu security). We will return to this in the conclusion of this work.

Transition to the convergence when p≡p(t)

Before getting to this section, we will remember some of the results from the integral equation theory related to the solution in the (2.2) equation.

According to Appleby (2002b), the asymptotic behavior of the *VIDE* solutions such as in ($K_{R\&D} \equiv \mathrm{k}$)

$$\dot{p}(t) = -ap(t) + \int_0^t \mathrm{k}(t-\tau)\, p(\tau) d\tau \tag{3.20}$$

A scalar equation of the convolution type, is as followed. Suppose that $a > 0$ and the destined capital to *R&D*, $\mathrm{k}(t)$[7] is fulfilled as in, $\mathrm{k}(t) : [0,\infty) \to (0,\infty)$, $\int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt < \infty$ (continuous, integrable and limited, positive and without changing signs) and

$$-a + \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt \neq 0$$

In such a case, if

$$a > \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt \tag{3.21}$$

The following equivalent arguments can sustain (Appleby, 2002b)

i) Each solution $p(t)$ in (3.20) converge to zero as $t \to \infty$.

ii) Each solution $p(t)$ in (3.20) is in $L^1[0,\infty)$.

iii) The zero solution is Asymptotically Stable (AS) therefore is Uniformly Asymptotically Stable (UAS)

In other words (Burton, 2005, theorem 2.6.2) if all solutions $p(t)$ of (3.20) converge to zero as $t \to \infty$ it implies that the condition

$$-a + \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt < 0$$

Is fulfilled, this at the same time leads every $p(t)$ solution is $L^1[0,\infty)$ and the zero solution shows UAS. We arrive to a contradiction when

$$-a + \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt > 0$$

Since it is only fulfilled if for the $p(t)$ solutions from (3.20), $p(t) \to \infty$ exponentially as $t \to \infty$. In other words, the solutions do not converge. For the case where

[7] To simplify the $K_{R\&D} \equiv \mathrm{k}$

$$a = \int_0^{\infty} \mathrm{k}(t)dt$$

The proposal is as followed. If for every $t \in [0,\infty)$, $t\mathrm{k}(t)$ is associated, so that if $f : t \mapsto t\mathrm{k}(t)$ is integrable in $[0,\infty)$ then the zero solution will US but not UAS. However, if $f : t \mapsto t\mathrm{k}(t)$ is not integrable, the zero solution will have AS but not UAS. We can now make a resume regarding the behaving of (3.20).

Theorem 3.3.1. (First Convergence Theorem)

When $\mathrm{k}(t)$, the kernel in (3.20), is a positive, continuous and integrable function $\mathrm{k}(t) \in L^1[0,\infty)$, then if

a) $-a + \int_0^{\infty} \mathrm{k}(t)dt < 0$, Each solution $p(t)$ of (3.20) converges (UAS), $p(t) \to 0$ as $t \to \infty$

b) $-a + \int_0^{\infty} \mathrm{k}(t)dt > 0$, Each solution $p(t)$ of (3.20) diverges, $p(t) \to \infty$ exponentially as $t \to \infty$.

c) $a = \int_0^{\infty} \mathrm{k}(t)dt$, Each solution $p(t)$ of (3.20):

- It is US if $t \mapsto t\mathrm{k}(t)$ is integrable and
- It is AS if $t \mapsto t\mathrm{k}(t)$ is not integrable.

The convergence will be determined for the level of decrease of the number of patents per year, and the quantity of capital that can get involved in the production of new knowledge.

Corollary 1 (Murakami, 1994, Theorem 1) the solution $p(t) \equiv 0$ of (3.20) is UAS and if the condition is fulfilled (necessary and sufficient)

$$\int_0^{\infty} |\mathrm{k}(t)| e^{\gamma t} dt < \infty$$

For any constant $\gamma > 0$ then is at the same time Exponentially Asymptotically (ExAS). Where $\mathrm{k}(t) \in L^1[0,\infty)$ is exponentially integrable (it is bounded from above) if the condition is fulfilled (Appleby, 2002a). In this way if $p(t) \equiv 0$ is ExAS, then $p(t) \to 0$ is at least exponentially.

Corollary 2. If now $\mathrm{k}(t)$ does not fulfill the necessary and sufficient condition in Corollary 1, meaning that, it is not bounded, What is the convergence rate so that $p(t) \to 0$ as $t \to \infty$ when $\mathrm{k}(t)$ is not anymore exponentially integrable? The convergence rate (Appleby, 2002a, Theorems 6.2 y 6.3) proposed is the following.

Theorem 3.3.2. (Second Convergence Theorem) (Appleby, 2002b and Burton, 2005)

Let $\mathrm{k}(t)$ be a positive *sub-exponential* function[8]. Suppose that $\mathrm{k}(t)$ also meets $-a + \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt < 0$.

Then the solution $p(t)$ of the (3.20) equation satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{\mathrm{k}(t)} = \frac{p(0)}{\left[a - \int_0^\infty \mathrm{k}(t)dt\right]^2} > 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{p'(t)}{p(t)} = 0 \qquad (3.22)$$

The last example could be the case when $p(t)$ does not converge to zero faster $\mathrm{k}(t)$. Moreover, the equation (3.22) implies that $p(t)$ is also a *sub-exponential* function. In which case

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \lim_{t\to\infty} -a + \frac{\mathrm{k}(t) * p(t)}{p(t)} = 0$$

That is fulfilled when $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{k}(t) * p(t)}{p(t)} = a$ (Appleby, 2002a).

The $\mathrm{k}(t)$ kernel is not exponentially integrable. This belongs to the class of *sub-exponential* functions that satisfy $\mathrm{k}(t)e^{\gamma t} \to \infty$ condition regarding $t \to \infty$ for every $\gamma > 0$. Therefore $\mathrm{k}(t)$ is not limited form above (**Corollary 1**) and the solution for (3.20) is not an ExAS. It is a *sub-exponential (it decreases slower than an exponential function).*

[8] See more in Appleby, 2002b. Some of the examples of *sub-exponential* functions are the Pareto, Lognormal and Weibull distributions.

Before continuing it is necessary to clear up the meaning of (3.22) . It is the capital involved in the knowledge production (k(t) in the (3.20) equation) that determines the velocity in which the number of patents per year decreases. Two possibilities exist: first, if this is bounded from above, $p(t)$ exponentially converges to zero when $t \to \infty$; on the contrary, $p(t)$ converges to zero when $t \to \infty$ but not exponentially, but to the (3.22) rate, which is why it behaves as a *sub-exponential* function.

This being exposed, it exists the possibility to conclude this chapter taking up again the same analysis of convergence made for the case here $p(t)$ is a constant. Once more, we take in consideration the equations (3.1) to (3.8) and (2.2) in order to study the transitional dynamics. Lets start once again defining a product, a marginal product and an average product of the capital for each worker (indirectly it is a function of t)

$$\begin{aligned} y(t) &= f(k,p) = \hat{A}(kp)^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \\ \frac{\partial f}{\partial k} &= f'(k,p) = [\alpha+\phi(1-\alpha)]\hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \\ \frac{f(k,p)}{k} &= \hat{A}k^{-[1-(\alpha+\phi(1-\alpha))]}p^{\alpha+\phi(1-\alpha)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Theorem 3.3.3. (Third Convergence Theorem)

For $t \to \infty$, $k \to \infty$ y $p \to 0$ and for $t \to 0$, $p \to p(0)$ y $k \to 0$,

I) $\phi < 1$	II) $\phi = 1$	III) $\phi > 1$
$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} f'(k,p) = 0$	$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} f'(k,p) = 0$	$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} f'(k,p) = 0$
$\lim_{\substack{p\to p(0) \\ k\to 0}} f'(k,p) = \infty$	$\lim_{\substack{p\to p(0) \\ k\to 0}} f'(k,p) = \hat{A}p(0)$	$\lim_{\substack{p\to p(0) \\ k\to 0}} f'(k,p) = 0$
$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} \frac{f(k,p)}{k} = 0$	$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} \frac{f(k,p)}{k} = 0$	$\lim_{\substack{p\to 0 \\ k\to\infty}} \frac{f(k,p)}{k} = 0$
$\gamma_k = s\frac{f(k,p)}{k} - [n+\delta]$	$\gamma_k = s\frac{f(k,p)}{k} - [n+\delta]$	$\gamma_k = s\frac{f(k,p)}{k} - [n+\delta]$

(3.24)

The first result reflects the model of Solow (1956). The production of knowledge shows the decreasing outputs, $\phi < 1$. The Inada conditions are not violated. It exists absolute or relative

convergence, given that $\partial\gamma_k/\partial k<0$ is fulfilled. Small values of k, correspond to bigger γ_k values. Nevertheless, there is an important difference. The velocity of convergence is conditions- in one part- for the rate in which $p(t)\to 0$ as it was before exposed in the theorems **3.3.1 to 3.3.3**. It is the result of the long-term relationship between capital destined to *R&D* and the available knowledge. The balance is stable. In other words, the capital is bounded.

The second result is the model $\hat{A}kp$ (version with *AK technology*). The production of knowledge shows constant outputs, $\phi=1$. Even when the Inada conditions are violated, the convergent trajectory is maintained even though the equation $\partial\gamma_k/\partial k<0$ is not fulfilled, given that $\partial\gamma_k/\partial k=0$. This is because $p(t)\to 0$ for any level of capital $k(t)$. The transitional dynamics determines the rates $p(t)\to 0$ and the initial conditions $p(0)$. The balance is stable. The third case is a convergence, too. The production of knowledge shows crescent outputs, $\phi>1$. Again, the decreased trajectory of $p(t)$, allows the evolution to the convergence. Once again, the conditions of Inada are infringed. In the conditions of crescent outputs of the product, $\partial\gamma_k/\partial k>0$ and the balance is instable.

4. - Methodology and Data

The empirical analysis of this research is supported by the methodological current of panel data econometrics as below:

1. Multivariate econometric analysis of the patent trajectory set out by the *VIDE*.
2. Multivariate econometric analysis of the growth rate of income per-capita.
3. Convergence sigma analysis according to the coefficient of variation (*CV*).
4. We have based our study on *USPTO* patents kinds 514, 424, 435 and 800 from the bio-pharmaceutical field and we have based our equations on industrialized and emerging countries. [9]

[9] Selected countries: US, Japan, Germany, France, UK, Australia, Belgium, Denmark, NL, Ireland, Mexico, Brazil, Argentina, Korea, China, India and Greece.

5. **The Convergence**

Data

The annual guaranteed patent report for each country, in the United States was obtained from the database of the *United States Patent and Trademark Office* (*USPTO*). The research took the types linked o the pharmaceutical industry in the *USPTO*, those corresponding to drugs: 514 (Medicaments and components for the treatment of biological and corporal infections) and 424 (Drugs, bioaffection and the composition of corporal treatments) and those belonging to the biotechnology: 435 (Chemistry: microbiology and molecular) and 800 (Multicellular organisms and the same non-modified parts and related process). The *USPTO* is consulted according to the volume of systematized information that it has, linked to the importance that the *US* has in technology competitiveness.

The data for the added value in the pharmaceutical industry[10] and the fixed brute inversion for each country in their local currency were obtained in the *STAN Database for Structural Analysis (ISIC Rev.3)* 2005 and 2008 of the *OCDE* for the years 1980-2005, except of India. For this country its correspondent *Statistical Yearbook* was consulted. The added value and the fixed brute inversion at common prices were deflected to 1990 prices and converted to dollars so that the 1990 purchasing power parity (*PPP*) related to the *US* could be used. The population for each country was obtained in the *Annual Population Statistics* of the United Nations for several years. The *GDP* per-capita was calculated on the basis of the *GDP* and the population corresponding to each country.

The level of stock knowledge was calculated using the perpetual inventory method (Mohen, 1990):

$$\boldsymbol{STOCKID} = \sum_{\zeta=0}^{3} \delta^{\zeta} \left(ER\,\&\,D_{i,t-\zeta} \right)$$

[10] The added value represents the industry contribution to GDP.

Where $ER\&D_i$ is the expense in the investigation and the country development i in the t period, in millions of dollars, deflected to 1990 prices. The number of applied regressions is of 3 ($\zeta = 0, 1,2,3$)[11], according to Grilliches (1979). The obsolescence rate is esteemed to be of 15% annually (δ). In the purpose of calculating the capital stock level one must take account the *R&D* level entails that one observation is lost (1980), for which the sample size is reduced.

Beta convergence

To prove the impact of innovation in the hypothesis of the process of the convergence in the pharmaceutical industry, a model based in the Fagerberg (1987) proposal is developed. If there is a tendency to convergence, the coefficients of the explanatory variables are expected to be negative. The beta convergence is measured by the level of (patents) innovation, as a function of the added value for each previous year worker, the availability of knowledge (level of the previous year patents), and the effort in the *R&D* to innovate, so the position of the pharmaceutical industry of each country is determined according to its technological performance.

The gaps between the technological level of the pharmaceutical industry amongst the industrialized countries and those in development cause the necessity for other explanatory variables related with the specific conditions of each country.

In this context, the explanatory variables for the technological gaps in the pharmaceutical industry or the convergence tendency of the added value for each worker are considered to be a function of the added value for each worker, the availability of knowledge, and the efforts to innovate. Therefore, three variables are included: I) the added value for each worker in the pharmaceutical industry, with a surplus period ($VALIF_{t-1}$), ii) the number of patents in the last year ($PATIF_{t-1}$), and iii) the investigation surplus stock and the development of the industry in a t period ($STOCKID_t$). According to the model of convergence, we assume that the growth rate of the added value for each worker ($VALIF_t$) is explained by the level from last year ($VALIF_{t-1}$).

[11] This supposition is taken out from the work of Grilliches (1979) in which he argues that the *ER&D* effects persist approximately for 3 or 4 years.

Besides, if we understand that a country with its own stable economic growth (high *PIB* per capita) would have more responsibility obtaining positive results from the innovative activities[12], then we assume that the deficit will grow. On the other hand, it is though that the new knowledge, reflected in the level of patents from last year (technological opportunities) is a principal input for the present period innovations.

Finally, the $STOCKID_t$ is the principal input of the innovation[13] and reflects the efforts from the industry to remain in the market. Based on this, the proposed model goes like this:

The model is analyzed through an econometric calculus of panel data that uses the following equation:

$$TVALIF_{it}=\beta_1+\beta_2*LOG(VALIF_{i,t-1})+\beta_3*LOG(PATIF_{i,t-1})+\beta_4*LOG(STOCKID_{it})+e_{it} \quad \textbf{[1]}$$

Where:

$TVALIF_{it}$ **=** the growing rate of added value for each worker from the i country in a t period.

$LOG(VALIF_{i-t-1})$**=** log of the added value for worker in the pharmaceutical industry from the i country in a t-1 period.

$LOG(PATIF_{i,t-1})$**=** log of the patents level in the pharmaceutical industry from the i country obtained from the *USPTO* (514 or 424 or 435 types and 800 types) in a t -1 period.

$LOG(STOCKID_{it})$**=** log of the effort stock in *R&D* from the i country in millions of US dollars 1990 prices in a t period.

e_{it} = error from the i country in a t period.

Empirical evidence

Table 1 shows of the results from the regression analysis.

[12]This idea is well known as the Schmookler hypothesis. See Schmookler J., Invention and Economic Growth, Harvard University Press, 1966, pp. 28-30.

[13] This happens especially in the pharmaceutical industry.

Table 1 Regression analysis of beta convergence (Panel Least Squares)

	1	2	3
		AR(1)	*VIDE* Equation
	[*TVALIF*]	[*TVALIF*]	[*DLOG(PATIF)*]
$LOG(VALIF_{i,t-1})$	-0.0223(0.0085)	-0.0172(0.0073)	0.0657(0.0146)
$LOG(PATIF_{i,t-1})$	0.0048(0.0087)	0.0024(0.0073)	-0.0530(0.0142)
$LOG(STOCKID_{it})$	0.0026(0.0072)	0.0038(0.0055)	
Constant	0.0954(0.0367)	0.0749(0.0299)	
R-squared	0.0088(0.1671)	0.0495(0.1658)	0.0303(0.4702)
AR(1)		-0.2021(0.0675)	
	375 observations	360 observations	375 observations

Between brackets it is showed the standard error for the estimate of and for the R-squared the standard error of the regression.

Between the square brackets the dependent variables for each regression are showed. Level of significance of 5%.

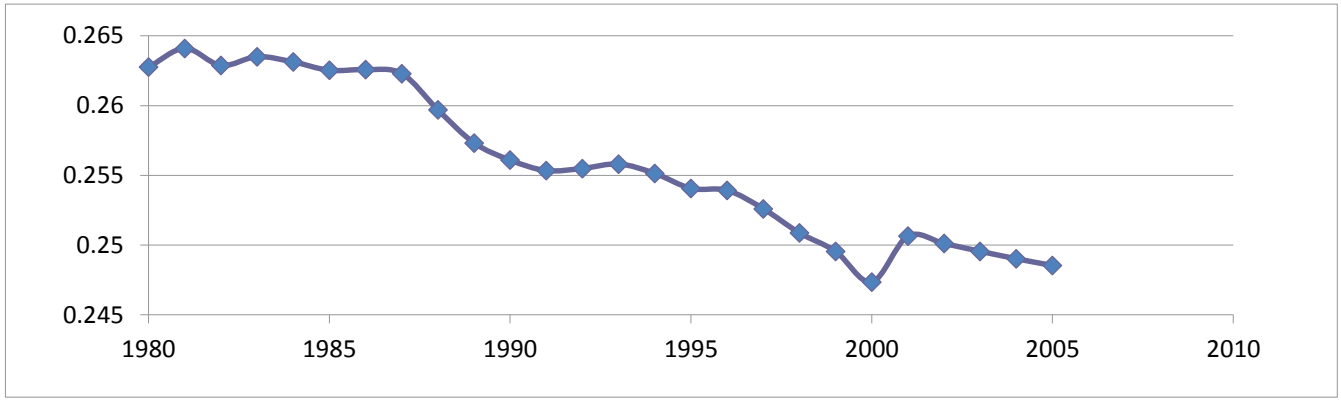
For the 1 and 2 regressions the estimate coefficient sign for the added value for each worker ($LOG(VALIF_{i,t-1})$ is negative. In the typical convergence analysis, this would be a good transitional sign to the stable state of which velocity per period is indicated through the estimated value for β_2 in both regressions. In regression 3, the negative coefficient sign of $LOG(PATIF_{i,t-1})$ is expected. It is an estimate of the *VIDE* equation that works as a goodness of fit test. It does not pretend more. $VALIF_{i,t-1}$ was used to estimate the convolution integral according to the production function in 3.3 equation.

Sigma convergence

Different from the beta convergence approach, of which analysis focuses on detecting the catching-up evidences and the technological gaps, the goal in studying the sigma convergence is

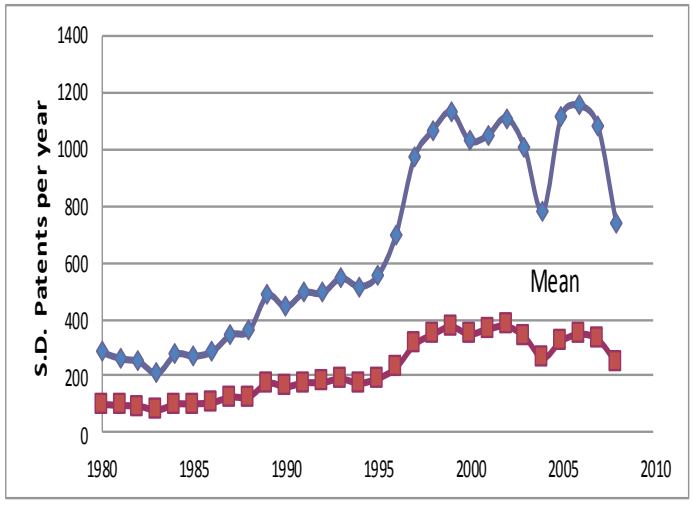
to distinguish if any decrease happens regarding the dispersion between regions or countries (Graphics 4.3.0 and 4.3.1). We want to prove to what extent the number of patents and the *R&D* expense are sub exponential functions, considering that, as it was previously exposed, that the catching-up process depends in the patents relations and the *R&D*, where the second determines the convergence velocity.

Fig. 1 Coefficient of Variation: Pharmaceutics GDP per capita.
(Selected countries) 1980-2008



Source: Own elaboration with *STAN Database (ISIC Rev.3)* 2005 and 2008 *OCDE (1990 prices)*

Fig. 2 Dispersion of the number of patents per year
(Selected countries) 1980-2008

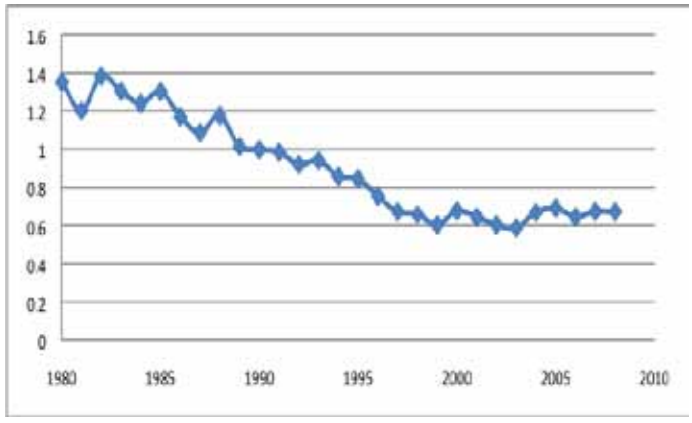


Source: Own elaboration with *United States Patent and Trademark Office* (*USPTO*) data

Theoretically speaking, the beta convergence is necessary but not enough for the existence of the sigma. The disadvantage of the first one lies in how we talk of conditional beta, when the economies do not have the same stable state balance[14]. In the case of this study, the evaluation made to the beta convergence can be explained, and even strengthen by the dispersions and the coefficient of variation[15] analysis (Graphic 4.3.2).

Fig. 3. Coefficient of Variation: number of patents per year.

(Selected countries) 1980-2008



Source: Own elaboration with *United States Patent and Trademark Office* (*USPTO*) data

As mentioned in the section before, some of the examples of sub exponential functions are the Pareto, Log-normal and Weibull distributions. The Weibull distribution, for example, is a distribution that depends in two parameters: the form parameter α and the θ[16] scale parameter. A special case happens when the form parameter $\alpha = 1$, that corresponds to the exponential distributions function: a characteristic of this function is that its *CV* is same to 1[17]. The next graphic shows some values for the *CV* (that is only a function of α) of the Weibull distribution.[18]

---

[14] See Quah 1993.

[15] Defined as $CV = \sigma/\mu$. It is also known as the relative standard deviation. An advantage of the *CV* use from the standard deviation (*SD*), is that the second has sense only when the mean is reported. In the case of *CV*, with a given value of the *SD* high or low variability is indicated regarding the mean.

[16] It is related with other distributions, for example to the Rayleigh distribution Rayleigh $\alpha = 2$.

[17] It is the case of the Erlang distribution function where $CV = 1/k^{0.5}$ given that k is a non-negative $CV < 1$. For the gamma distribution where $CV = 1/k^{0.5}$ and $\alpha < 1$, where $CV > 1$.

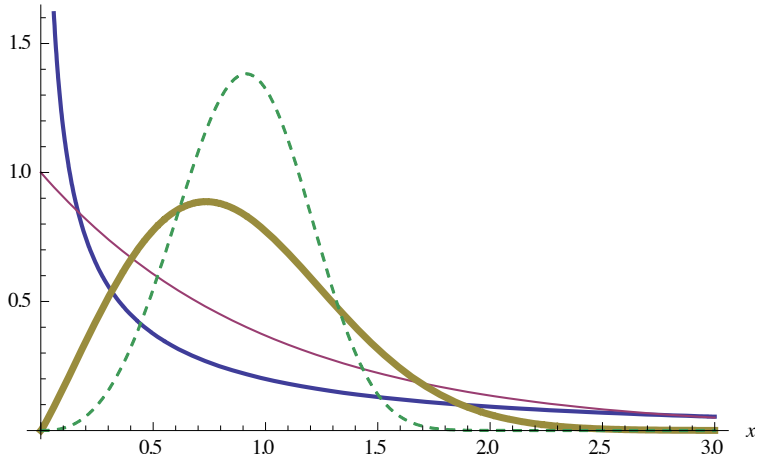
[18] The distributions where the $CV < 1$ are said to be of low dispersion while others with $CV > 1$ are known to be of high dispersion.

Table 2. Coefficient of Variation for the Weibull distribution, different values from parameter α

CV	α	*CV*	α
2.0	0.5427	0.5	2.1014
1.5	0.6848	0.2	5.7974
1.0	**1.0000**	0.15	7.9069
0.9	1.1128	0.10	12.154

Source: Barringer & Associates, Inc. 1999

As showed in table 4.3.1, when $\alpha = 1$, the *CV*=1 corresponds to an exponential decay. An inverse relation exists between *CV* and α. As the variability regarding to the average decreases α increases and the Weibull distribution gets close to the normal distribution when $\alpha = 3.6$ (discontinuous line). Fig. 4. Weibull distribution

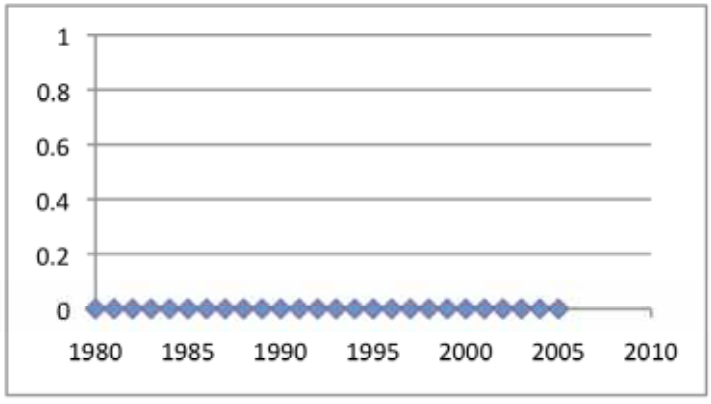


Source: Own elaboration with Wolfram Mathematica© 8

The *sub-exponential* convergence is then given in a $1 < \alpha < 3.6$ interval, as showed in the 4.3.3 graphic. The discontinuous line is the approximation from Weibull distribution to normal distribution with $\alpha = 3.6$ and $\theta = 1$parameters. The thicker line is a Weibull with $\alpha = 2.1014$ and $\theta = 1$. The last one has the property of a *sub-exponential* function: more slowly than any decaying exponential (The thicker line versus the thinner). The line under the exponential is one with $\alpha = 0.5427$ and $\theta = 1$. Going back to the correspondent graphics of the number of patents dispersion and the variable coefficient, both showed patrons of convergence for the group of

countries. In the first one, the volatility is very high in the two thirds of the sample; additionally, the patents production starts to stabilize since the year 2000, even though the dispersion is high. Nevertheless, the standard deviation hides a more relevant aspect from the sigma convergence analysis. As the *CV* decreases, the convergence slows. Decay less than the exponential function (the thinner line in graphic 4.3.3). Thus $p(t) \to 0$, the zero solution is uniformly asymptotically stable (UAS) but not exponentially asymptotically stable (ExAE).

Fig. 5. Coefficient of Variation: expense in *R&D* per year (Selected countries) 1980-2008



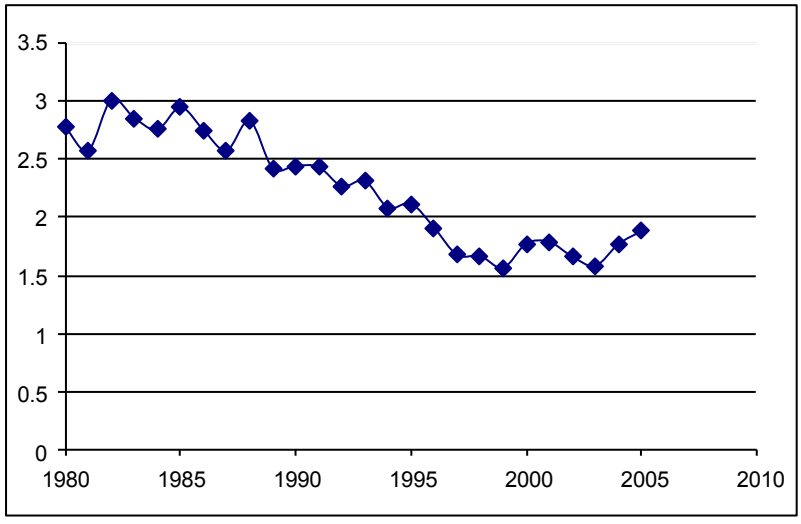
Source: Elaboration with data from *STAN Database for Structural Analysis (ISIC Rev.3)* 2005 and 2008

For the 1980-2005 period, it fluctuates between 0.5 and 0.4. Volatility is marginally decreased. In the same way as in the year's patents, the Weibull distribution associated to the *CV* drops in a *sub-exponential* dropping zone. According to the second convergence theorem if

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{\mathrm{k}(t)} > 0,$$

the *R&D* and $p(t)$ in 3.20 must be *sub-exponential* functions. The graphic 4.3.5 show the evolution of the $p(t)$ -*R&D* ratio in terms of their coefficients of variation.

Fig. 6. *p(t)-R&D* Coefficient of Variation ratio (Selected countries) 1980-2008



Source: Own elaboration with *United States Patent and Trademark Office* (*USPTO*) data and *Database for Structural Analysis (ISIC Rev.3)* 2005 and 2008.

5. Conclusions

The technology modeling is not yet conclusive in actual theory. The alternative was using the patents statistics as an indicator of the degree of technological development. To use this concept in the growth models, we worked with the already exposed Volterra´s idea. The future behavior of the knowledge production, patents per year *p(t)*, not only depends on the position of *p(t)* in t_o, meaning that, the present state also depends on what it has *inherited* from the past.

The heredity factor is the sum of the past contributions and the creation of knowledge for a time of $[t_o, t]$. The growth rate from the patents level in a long term are explained because of the patents level in *t*, its position in the present, plus the trajectory of the patents correlation in *R&D* through time. By means of *VIDE,* this behavior is modeled. The solution for this equations indicates that in a long-term, *p(t)* approaches always approaches to zero. There is a transition to a long-term stable state balance, due to the asymptotical behavior of the solution. The new knowledge looses impulse in the long-term trajectory. The velocity in which it is done depends on, if the capital is limited from above or not. A fundamental discovery is that the level of *R&D* determines the rhythm in which the production of new knowledge is exhausted. In other words,

the accumulative process of capital distortions the natural trajectory of the innovation exhaustion. The trajectory of *p(t)* can be exponentially asymptotically if the accumulation of capital is limited. If there are no accumulation limits of *R&D* -for instance, an absolute position of leadership- can have a *sub-exponential* behavior (distortional). It is warned that we are heading slowly to a path of stable state that is not enough. The decreasing outputs of the innovation also loose their rhythm. There is endogenous growth with transitional dynamics still under crescent outputs, even though the place is unstable, both when productive capital is exhausted, and when it is accumulated, in the same way as in Romer (1986).

A particular case deserves our attention: assuming that the number of patents per year is constant. This implies that the destined capital to *R&D*, exists in a phase of searching for new inversions, and the degree of innovation looses its force through time, as the inversion emigrates. The analysis of convergence throws the same results as in the Solow-Swan model. Nevertheless, the kernel (*R&D*) satisfies the *VIDE* proposal, that is the Dirac delta. This functional form is the one from the Arrow-Debreu securities, and it is fundamental ground for the modern financial theory. This result is robust in the supposition that the involved capital is equally qualitative, and then one must reconsidered the functional form of the production function to a discreet one, the Dirac delta, that leaves behind the results from the micro economy theory of a well-behaved function, and the theoretical consequences deriving from this. A global vision of the results reveals that the innovation process is structured in three stages. The first one is the *R&D* capital accumulation, which permits to consolidate an absolute leadership position, process known in theory as entrance barrier. Secondly, the inversion stops flowing at the same intensity in consequence of a fall in the production of new knowledge or because of the emergency for new and more profitable paradigms, encouraging a more just market structure; this is recognized as a convergence stage. The growth rates depend from the initial position of the involved capital in the production, and the number of patents per year in this initial period. Finally, the third stage closes de cycle, and it is characterized for being here the technological trajectories tend to become stagnant, and the *R&D* starts a speculative (*R&D* is an Arrow-Debreu type security).

On the technological side, the distribution functions such as the Weibull, contribute to distinguish the complex convergence behavior of *R&D* capital and the number of patents per year. A process

of convergence exists such as the Barro-Sal-i-Martin, beta and sigma type analysis show, unless the present analysis show an asymptotic decreasing behavior in the catch-up controlled by the *R&D* capital. In the case of Barro-Sal-i-Martin the behavior is always exponentially asymptotically stable (ExAS). The expressed proposal in this work shows that a complex relation exists between capital-technology, and the beta convergence must be considered as a particular case where *R&D* is well limited.

We underline one last aspect: the possibilities of analyzing the same problem form a stochastic sphere. In this case, the solution for a stochastic *VIDE* solution could enrich the low-uncertainty analysis, and also with the extreme value theory, because of the importance of *sub-exponential* distributions in that field of investigation.

5. - References

Appleby D. A. John and R. W. David (2002a). On the non-exponential convergence of asymptotically stable solutions of linear scalar Volterra integro-differential equations. *Journal of integral equations and applications*, volume 14, number 2, summer.

Appleby D. A. J. and R. W. David (2002b). *Subexponential solutions of linear integro-differential equations and transient renewal equations*. *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, 132 A, 512-543.

Appleby D. A. John y Reynolds W. David. (2004). On and sufficient conditions for exponential stability in linear Volterra integro-differential equations. *Mathematics Subject Classification*.

Arrow, K. J. (1962a). "The economic implications of learning by doing". *Review of Economic Studies* 29 (June), 153–173.

Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin (1999). *Economic Growth*, Boston: MIT Press.

Burton, T.A. (2005). *Volterra Integral and Differential equations*. Department of mathematics Southern Illinois University Carbondale, Illinois: Second Edition, El Sevier.

Chance, D. M. (2008). Option Prices and State Prices. *Teaching Note 97-13*. LSU. http://www.bus.lsu.edu/academics/finance/faculty/dchance/instructional/instr.htm (28/03/2012)

Davis, T. Harold (1962). *Introduction to nonlinear differential and integral equations,* Dover publications, Inc. New York.

Dirac, Paul. (1967) *Principios de Mecánica Cuántica*. Barcelona, Ediciones Ariel.

Fagerberg, J. (1987). "A technology gap approach to why growth rates differ". *Research Policy*. No. 16, 87-99.

Griliches, Z. (1979). "Issues in Assessing the Contribution of Research and Development to Productivity Growth. Bell". *Journal of Economics* 10, 1979, 92-116.

Guzmán, A., Ludlow, J. and Gómez, H. (2004). "Brechas tecnológicas y de innovación entre países industrializados y países en desarrollo en la industria farmacéutica". *Investigación Económica*. Vol. LXIII, 248, April – June, 95–145.

Knight, Frank H. (1944). "Diminishing Returns from Investment". *The Journal of Political Econom*. 52, 26-47.

Murakami S. (1991). "Exponential asymptotic stability of scalar linear Volterra equations". *Differential Integral Equations*. 4 , 519 525.

Romer, P. (1986). "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, October.

Romer, P. (1990). "Endogenous technological change". *Journal of Political Economy*. 98, 71-102.

Romer, David (2001). Advanced Macroeconomics, McGraw Hill, International edition.

Solow, R. M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth". *Quarterly Journal of Economics*. 65-94.

Swan, T.W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation. *The Economic Record*, 334-361.

Volterra, V. (1913). *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*. Paris.

CAPÍTULO XVII

El mercado de derivados y su impacto en la política monetaria: un modelo de volatilidad estocástica.

María de los Ángeles Silva-Correa

Universidad Nacional Autónoma de México

José Luís Martínez Marca

Universidad Nacional Autónoma de México

Francisco Venegas-Martínez

Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo se presenta, mediante un modelo de volatilidad estocástica, la relación que existe entre el mercado de derivados y la tasa de inflación. Se propone a un agente representativo que destina su riqueza a la tenencia de un activo físico, un producto derivado y un bono libre de riesgo, y el resto lo consume. Se determina la ecuación de la evolución de la riqueza real para plantear el problema de optimización al que se enfrenta el agente representativo y se caracteriza el equilibrio de la economía para determinar la tasa de inflación y el valor de las demás variables de interés (consumo, saldos monetarios reales, la inversión en el activo físico y la tenencia de un producto derivado). Por último se resuelve la ecuación HJB para determinar las decisiones óptimas del agente representativo y los impactos de la presencia de productos derivados en el mercado financiero sobre la tasa de inflación

Palabras clave: Volatilidad estocástica, tasa de inflación y optimización dinámica estocástica.

JEL:

1. Introducción

Los mercados financieros han presentado un acelerado crecimiento en las últimas décadas y los productos derivados son un ejemplo más de las grandes innovaciones financieras. Estos mercados han cobrado gran relevancia ya que han modificado las decisiones de consumo e inversión de los diferentes agentes y por tanto han tenido impactos significativos sobre la política económica. Sin embargo, a pesar de la basta investigación al respecto, la evidencia empírica acerca el impacto que tiene el mercado de derivados sobre la política económica no ha sido determinante en todos los casos, haciendo difícil probar la existencia de una relación entre el mercado de derivados y la política económica, específicamente la política monetaria. El objetivo principal del presente trabajo es responder a las interrogantes: ¿Cómo afecta el uso de productos derivados a los objetivos de política económica? y ¿Qué tipo de relación existe entre la tasa de inflación y la volatilidad de los derivados, suponiendo a la tasa de inflación como el único objetivo de la política monetaria?

La literatura sobre la relación entre la política monetaria y el mercado de derivados es abundante pero ha arrojado resultados en sentidos opuestos, no solo en cuanto a la existencia de una relación entre los derivados y las políticas monetarias, también en cuanto al grado de transmisión de las acciones de política monetaria. Primero se tiene que investigadores como Fender (2000a, 2000b), Morales (2001) y Vickery (2008) mencinan que la evidencia encontrada no es suficiente para probar una relación entre la política monetaria y el mercado de derivados y que lo único posible es que los derivados impacten al canal del crédito; y en el mismo sentido Vrolijk (1997) afirma que las tasas de inflación no se ven afectadas por la presencia de productos derivados en la economía. Sin embargo, existen estudios como los presentados por Bank for International Settlements (1994) y Upper (2006) en los que se presenta evidencia de que los derivados hacen más eficiente la trasmisión de la política monetaria. Y por otro lado, también hay investigaciones que aportan evidencia empírica en el sentido opuesto, pues afirman que la presencia de un mercado de derivados es un factor que desvía los objetivos de la política monetaria, como es el caso de Gómez, Vásquez y Zea (2005) y Hunter y Smith (2002).

Es posible, encontrar, también, otro tipo de investigaciones que no son determinantes en cuanto a sus resultados y solo se limitan a decir que dependiendo del tamaño y desarrollo de los mercados financieros es la afectación sobre la política monetaria, un ejemplo de estos trabajos son los

presentados por Vrolijk (1997); Mies, Morandé y Tapia (2002); y Gómez, Vásquez y Zea (2005). Wagner y Berger (2005); y Beltratti y Morana (2006) mencionan que una de las posibles razones, de este resultado, es la volatilidad de los mercados financieros sobre la tasa de inflación. En esta investigación se plantea como hipótesis principal que la tasa de inflación es afectada por la volatilidad de instrumentos derivados de tal forma que el incremento en el uso de productos derivados impacta sobre los objetivos de política monetaria (un supuesto implícito es que los objetivos de política monetaria solo están encaminados a influir sobre las tasas de inflación). Para tratar de comprobar dicha hipótesis se hace uso de un modelo de volatilidad estocástica, con una estructura económica similar a la presentada en los trabajos de Venegas (2006), (2008) y (2009). La introducción de este modelo lo que diferencia a este trabajo, de trabajos antes realizados, específicamente la investigación de Bernal y Venegas (2011), en el que se suponen constantes todas las volatilidades asociadas a las variables.

El trabajo se organiza como sigue: en la siguiente sección se establecen las principales variables que componen a la economía que se propone y los activos a los que tiene acceso el agente representativo (consumidor), dado que formaran parte de la ecuación de la riqueza real, la cual se determina mediante una ecuación diferencial estocástica. Se determinan, también, los rendimientos de los activos, que no son más que las mismas variables planteadas en términos reales mediante el lema de Itô para un cociente. Es necesario hacer uso de esta técnica para determinar la riqueza en términos reales. La ecuación de la evolución de la riqueza real se introduce en esta sección para completar las variables que determinaran el problema de optimización al que se enfrenta el agente representativo de esta economía que será determinante para obtener el valor de las principales variables de interés y de la tasa de inflación de equilibrio. La sección que sigue propone la caracterización del equilibrio para determinar la tasa de inflación y el valor de las demás variables de interés (consumo, saldos monetarios reales, la inversión en el activo físico y la tenencia de un producto derivado). Se plantean los tres principales supuestos que ponen en equilibrio a esta economía y que completan el esquema bajo el cual es posible obtener una solución al problema de maximización que para este punto del trabajo consiste en resolver la ecuación HJB y verificar las decisiones óptimas del agente representativo. Por último se presentan las conclusiones y los apéndices que muestran las soluciones ampliadas.

2. Estructura de la economía

En esta sección se presenta la estructura de la economía, tal como la descrita en Venegas (2006), (2008) y (2009), y el problema que enfrenta el consumidor. Es necesario especificar la dinámica de cada una de las variables que integran la estructura económica y, en particular, aquellas que afectan las decisiones de los consumidores. El equilibrio en la economía se determinara a través de un modelo de volatilidad estocástica, lo que hace necesario establecer algunos supuestos extras. Los principales supuestos que están implícitos en esta estructura económica son que hay individuos homogéneos (en cuanto a sus gustos y dotaciones), por lo tanto cualquier consumidor será un agente representativo; la economía solo produce un bien y es decisión del agente representativo destinarlo a su consumo o a la inversión, por lo cual podrá ser visto como un activo físico. Se supone, además, que el agente representativo conoce la dinámica de las variables que conforman esta economía y maximiza su satisfacción en cada momento. Dicho en otras palabras, es un agente racional, que se enfrenta a un problema de maximización sujeto a la ecuación de su riqueza. Y obtiene satisfacción tanto por el consumo como por la tenencia de saldos monetarios reales.

En cuanto a las variables relevantes para el modelo en cuestión, se tiene primero a la producción que es denotada por y_t y está definida por una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}y_t = y_t(\mu_y \mathrm{d}t + \sigma_y \mathrm{d}W_{yt}), \tag{1}$$

donde μ_y es la tasa de rendimiento media esperada por la inversión en el activo físico; σ_y es la volatilidad asociada (se supone constante); y W_{yt} es un movimiento geométrico browniano.

Es necesario suponer, también, que el banco central es encargado de emitir dinero y decide arbitrariamente establecer la tasa de rendimiento nominal igual a cero. Así que los consumidores pueden tener en posesión saldos monetarios. Además la política monetaria es conducida de forma tal que la oferta monetaria, denotada por M_t, se define por la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}M_t = M_t\left(\mu_M \mathrm{d}t + \sigma_M \mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{2}$$

donde μ_M es la tasa de crecimiento media esperada de la oferta monetaria y σ_M es la volatilidad de la oferta monetaria (se supone estocástica).

Por su parte la volatilidad de la oferta monetaria es estocástica y por simplicidad se denotará en términos de la varianza, V_t, como $\sigma_M^2 = V_t$, la cual también es conducida por un movimiento geométrico browniano:

$$\mathrm{d}V_t = V_t\left(\mu_V \mathrm{d}t + \sigma_V dW_{Vt}\right), \tag{3}$$

donde μ_V es la tendencia de la varianza y σ_V es la volatilidad de la varianza.

En cuanto a los movimientos geométricos brownianos, de las ecuaciones anteriores, se establecen las siguientes relaciones:

1. Los movimiento brownianos $\mathrm{d}W_{yt}$ y $\mathrm{d}W_{Mt}$ están correlacionados de tal forma que:

$$Cov\left(\mathrm{d}W_{yt}, \mathrm{d}W_{Mt}\right) = \rho_1 \mathrm{d}t.$$

2. La correlación entre $\mathrm{d}W_{yt}$ y $\mathrm{d}W_{Vt}$ es igual a cero, debido a que en la teoría ortodoxa las variables monetarias no afectan a las variables reales[1]:

$$Cov\left(\mathrm{d}W_{yt}, \mathrm{d}W_{Vt}\right) = 0.$$

3. Los movimientos brownianos $\mathrm{d}W_{Mt}$ y $\mathrm{d}W_{Vt}$ están correlacionados de la siguiente forma:

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{Mt}, \mathrm{d}W_{Vt}\right) = \rho_2 \mathrm{d}t,$$

donde ρ_i es un coeficiente de correlación entre los movimientos brownianos.

Por otra parte, se sabe que los agentes perciben el nivel general de precios[2], denotado por P_t, como una ecuación estocástica, la cual, es afectada tanto por choques reales como monetarios:

---

[1] Para la teoría heterodoxa la relación $\mathrm{Cov}\left(\mathrm{d}W_{yt}, \mathrm{d}W_{Vt}\right)$ podría no ser igual a cero. Sin embargo, este modelo se delimita dentro de los supuestos de la teoría neoclásica.

$$\mathrm{d}P_t = P_t\left(\pi_t \mathrm{d}t + \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{4}$$

dónde π_t es la inflación media esperada al tiempo t; $\sigma_{PM} > 0$ es la volatilidad instantánea asociada a los choques monetarios; y $\sigma_{Py} > 0$ es la volatilidad instantánea asociada a los coques reales.

Adicionalmente existe un bono cupón cero, libre de riesgo de incumplimiento, también conocido como título de deuda pública, que es emitido por el Gobierno Federal, con un precio B_t que satisface:

$$\mathrm{d}B_t = i_t B_t \mathrm{d}t, \tag{5}$$

dónde i_t es la tasa de interés nominal.

Como se puede observar, esta economía presenta dos factores de riesgo, dados por W_{yt} y W_{Mt} y existe, hasta el momento, un único activo financiero al que los agentes tienen acceso, por lo que los mercados son incompletos. Para lo cual es posible definir un activo subyacente X_t que contiene fluctuaciones aleatorias de y_t y M_t; y está definido por una ecuación diferencial estocástica, representado como:

$$\mathrm{d}X_t = X_t\left(\mu_X \mathrm{d}t + \sigma_{Xy}\mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{XM}\mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{6}$$

donde μ_X es la tendencia del precio del activo; $\sigma_{Xy} > 0$ es la volatilidad asociada con las fluctuaciones de las variables reales; y $\sigma_{XM} > 0$ es la volatilidad asociada con las fluctuaciones de las variables reales. Y si X_t es un activo subyacente, es posible definir un derivado sobre el mismo, que es denotado por S_t y es guiado por una dinámica estocástica de la forma:

$$\mathrm{d}S_t = S_t\left(\mu_S \mathrm{d}t + \sigma_{Sy}\mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{SM}\mathrm{d}W_{Mt}\right), \tag{7}$$

---

[2] Se supone que los precios siguen esa dinámica, en la que dependen de choques reales y monetarios debido a la demanda de saldos reales de Cagan que dice:

donde μ_S es la tendencia del derivado; $\sigma_{Sy} > 0$ es la volatilidad asocia a las fluctuaciones reales; y $\sigma_{SM} > 0$ es la volatilidad asociada a las fluctuaciones monetarias.

Las variables anteriores definen los activos a los activos a los que el agente representativo tiene acceso. Por otra parte, el agente representativo tiene como objetivo principal maximizar su utilidad y tiene información completa sobre los procesos estocásticos de la oferta monetaria y de los precios de los activos financieros. Una vez las variables, el consumidor asigna proporciones de su riqueza total a la tenencia de activos, θ_y, a la tenencia de saldos monetarios reales, θ_m, a la tenencia de un producto derivado, θ_s, a la tenencia de un bono libre de riesgo, $\theta_b = 1 - \theta_y - \theta_m - \theta_s$, y a su consumo, c_t; y se especifica a la ecuación de la riqueza en términos reales como:

$$a_t = \frac{y_t}{P_t} + s_t + m_t + b_t, \tag{8}$$

dónde $\frac{y_t}{P_t}$ es la ganancia real por la inversión en el activo físico; $s_t = \frac{S_t}{P_t}$ es el precio real del derivado, $m_t = \frac{M_t}{P_t}$ son los saldos monetarios en términos reales; y $b_t = \frac{B_t}{P_t}$ es el precio del bono en términos reales. La ecuación de la evolución de la riqueza real es, también, conducida por una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left[\theta_y \mathrm{d}R_y + \theta_s \mathrm{d}R_s + \theta_m \mathrm{d}R_m + \left(1 - \theta_y - \theta_s - \theta_m\right) \mathrm{d}R_b \right] - c_t \mathrm{d}t, \tag{9}$$

dónde $\mathrm{d}R_y$ es la tasa de rendimiento sobre el activo físico; $\mathrm{d}R_s$ es la tasa de rendimiento sobre el derivado; $\mathrm{d}R_m$ es el rendimiento estocástico por la tenencia de saldos reales; y $\mathrm{d}R_b$ es la tasa de rendimiento por la tenencia de un bono libre de riesgo

Para resolver la ecuación de la evolución de la riqueza en términos reales es necesario establecer las variables en términos reales, para lo cual se divide entre los precios, P_t, y se aplica el lema de Itô para un cociente. Las tasas de rendimiento del derivado, de la tenencia de saldos monetarios reales, del activo físico y del bono libre de riesgo, respectivamente están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_s = &\left(\mu_S - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Sy}\sigma_{Py} - \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{SM}\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}t \\ &+\left(\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} + \left(\sigma_{SM} - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_m = &\left(\mu_M - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + \sigma_{PM}^2 + 2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 - \sigma_{PM}\sigma_M\right)\mathrm{d}t \\ &+\left(\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt} - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt}. \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_y = &\left(\mu_y - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_y\rho_1\right)\mathrm{d}t \\ &+\left(\sigma_y - \sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt} - \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathrm{d}R_b = \left(i_t - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2\right)\mathrm{d}t - \sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt} - \sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}. \tag{13}$$

Entonces, los consumidores, dentro de esta economía, deben maximizar en cada momento su satisfacción de forma tal que las proporciones de su riqueza que asigna a la tenencia de saldos monetarios reales, el producto derivado y la inversión en el activo físico sean óptimas en cada momento del tiempo.

Cada individuo obtiene satisfacción de dos fuentes: el consumo, c_t, del único bien que es producido en la economía y la tenencia de saldos monetarios reales m_t (Venegas-Martínez, 2008). La función de utilidad está dada por la siguiente forma funcional:

$$u = u\left(c_t, m_t\right), \quad u_1 > 0, \quad u_{11} < 0, \quad u_2 > 0, \quad u_{22} < 0, \tag{14}$$

que corresponde a una función de utilidad logarítmica. En la que los individuos son totalmente adversos al riesgo, pero con la cual es posible asegurarse de que maximicen su satisfacción. Por tanto el agente representativo se enfrenta a la siguiente función de utilidad:

$$U\left(c_t, m_t, t\right) = \varphi \ln\left(c_t\right)e^{-\delta t} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t} \tag{15}$$

dónde:

δ : es la tasa subjetiva de descuento, o sea, la tasa a la que los individuos descuentan la utilidad generada por el consumo futuro, es decir refleja el grado de impaciencia del agente representativo. Una elevada tasa de descuento representa a un agente impaciente por el consumo presente (Arango y Ramírez, 2007).

φ : es un parámetro que oscila entre 0 y 1 y mide la importancia relativa entre el consumo del bien que se produce en la economía y la tenencia de saldos monetarios reales.

Los consumidores en esta economía enfrentan el problema de maximización:

$$\underset{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^{\infty}\left[\varphi\ln\left(c_s\right)e^{-\delta t}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}s \;\middle|\; \mathrm{F}_0\right], \tag{16}$$

donde F_0 representa la información disponible al tiempo $t=0$. La ecuación (16) estará sujeta a la evolución de la riqueza real de del individuo representativo, la cual satisface[3]:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_t = a_t\Big\{&\theta_y\Big[\left(\mu_y-\pi_t-\sigma_{Py}^2+2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1+\sigma_{PM}^2-2\sigma_{Py}\sigma_y-\sigma_{PM}\sigma_y\rho_1\right)\mathrm{d}t\\&+\left(\sigma_y-\sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt}\Big]+\theta_s\Big[\left(\mu_s-\pi_t+\sigma_{Py}^2+2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\,\rho_1+\sigma_{PM}^2-\sigma_{Sy}\sigma_{Py}\right.\\&\left.-\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1-\sigma_{Sy}\sigma_{PM}\rho_1-\sigma_{SM}\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}t+\left(\sigma_{Sy}-\sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt}+\left(\sigma_{SM}\right.\\&\left.-\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}\Big]+\theta_m\Big[\left(\mu_M-\pi_t+\sigma_{Py}^2+2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1+\sigma_{PM}^2-\sigma_{Py}\sigma_M\rho_1\right.\\&\left.-\sigma_{PM}\sigma_M\right)\mathrm{d}t+\left(\sigma_M-\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}-\sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt}\Big]+\left(1-\theta_y-\theta_s-\theta_m\right)\\&\Big[\left(i_t-\pi_t-\sigma_{Py}^2+2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1+\sigma_{PM}^2\right)\mathrm{d}t-\sigma_{Py}\mathrm{d}W_{yt}-\sigma_{PM}\mathrm{d}W_{Mt}\Big]\Big\}-c_t\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{17}$$

Y por conveniencia la ecuación (17) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_t = a_t\Big[&\left(\theta_y\left(\alpha_y-r_b\right)+\theta_s\left(\alpha_s-r_b\right)+\theta_m\left(\alpha_m-r_b\right)\right)\mathrm{d}t+\left(\theta_y\sigma_y+\theta_s\sigma_{Sy}-\sigma_{Py}\right)\mathrm{d}W_{yt}\\&+\left(\theta_s\sigma_{SM}+\theta_m\sigma_M-\sigma_{PM}\right)\mathrm{d}W_{Mt}-\frac{c_t}{a_t}\mathrm{d}t\Big],\end{aligned} \tag{18}$$

dónde:

[3] Se sustituye a las tasas de rendimiento de los diferentes activos en la ecuación estocástica de la evolución de la riqueza real

$$\alpha_y = \mu_y - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho_1,$$

$$\alpha_s = \mu_s - \pi_t + \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Sy}\sigma_{Py} - \sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 - \sigma_{Sy}\sigma_{PM}\rho_1 - \sigma_{SM}\sigma_{PM},$$

$$\alpha_m = \mu_M - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{SM}\sigma_{Py}\rho_1 + \sigma_{PM}^2 - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 - \sigma_{PM}\sigma_M,$$

$$r_b = i_t - \pi_t - \sigma_{Py}^2 + 2\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \sigma_{PM}^2.$$

Para simplificar el análisis la ecuación (18) queda de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[\mu_a \mathrm{d}t + \sigma_{ay}\mathrm{d}W_{yt} + \sigma_{aM}\mathrm{d}W_{Mt}\right], \tag{19}$$

dónde:

$$\mu_a = \theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) + \theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) - \frac{c_t}{a_t},$$

$$\sigma_{ay} = \theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_{Sy} - \sigma_{Py},$$

$$\sigma_{aM} = \theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}.$$

Ahora que los consumidores han establecido su función de utilidad y su restricción, pueden resolver el problema de maximización al que se enfrentan, a través de la programación dinámica estocástica.

3. El equilibrio de la economía

Ya que el modelo planteo como objetivo principal la resolución de la tasa de inflación de equilibrio, se deben plantear supuestos que permitan a esta economía arrojar una tasa de inflación de equilibrio. O dicho en otros términos, supuestos, bajo los cuales, la economía puede operar en condiciones de equilibrio. De forma que se plantea:

i. Una vez descritas la dinámica de las variables de la estructura de la economía y los activos a los que tiene acceso el agente representativo, se supone que tanto las proporciones destinadas al activo físico, θ_y, a la tenencia de saldos monetarios reales, θ_m, la tenencia de un producto derivado, θ_s, y la tenencia de un bono libre de riesgo, θ_b; así como, el consumo, c_t, son

cantidades óptimas y se denotan como: θ_y^*, θ_m^*, θ_s^* y c_t^*. Las que a su vez aseguran que el agente representativo maximiza su satisfacción.

ii. El mercado de activos se vacía, lo que quiere decir que $a_t\theta_s^* = 0$

iii. La oferta monetaria es igual a la demanda de saldos reales $\frac{M_t}{P_t} = m_t = a_t\theta_m^*$

Por su parte, la función de utilidad indirecta del agente representativo está dada por:

$$J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \mathrm{E}\left[\int_0^{\infty}\left(\varphi \ln\left(c_t\right)e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right)\mathrm{d}s \;\middle|\; F_0\right] \tag{20}$$

La función $J\left(a_t, P_t, V_t, t\right)$ proporciona una medida del bienestar económico del agente representativo ya que es el nivel máximo de satisfacción que puede alcanzar. Así que la ecuación original $U\left(c_t, m_t, t\right)$ será vista como la función de utilidad directa para hacer la diferencia con J .

Para resolver el problema del agente representativo de esta economía se hace uso de la programación dinámica estocástica[4]. Dada la función de utilidad indirecta del agente representativo y con el propósito de obtener la solución óptima del problema de maximización, la ecuación (20) conduce a:

$$\begin{aligned} J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} E\Bigg\{ & \int_t^{t-\mathrm{d}t}\left[\varphi \ln\left(c_t\right)e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right]\mathrm{d}s \\ & + \int_{t-\mathrm{d}t}^{\infty}\left[\varphi \ln\left(c_t\right)e^{-\delta s} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right]\mathrm{d}s \;\middle|\; F_0 \Bigg\}, \end{aligned} \tag{21}$$

Es posible observar que la función de utilidad directa dependía únicamente del consumo, los saldos monetarios reales y del tiempo, mientras que la función de utilidad indirecta depende, también, de la varianza de la oferta monetaria (la cual tiene una dinámica estocástica. Es esta la principal contribución de la presente investigación, ya que en trabajos precedentes se considera constante a la volatilidad de la oferta monetaria. Así la función de utilidad indirecta depende de

[4] La programación dinámica es muy útil en la solución de problemas de optimización en donde se toman decisiones en varias etapas. Dicho método se basa en el principio de optimalidad, el cual establece que dada una política óptima, cualquiera de sus políticas es también óptima (Venegas-Martínez, 2008).

cuatro variables. Para determinar a la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellma se determinan primero las ecuaciones recursivas de la programación dinámica[5], que arrojan como resultado:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \varphi \ln\left(c_t\right) e^{-\delta t} + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py}\sigma_{ay} \right. \\ & \left. + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\right) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 + J_{aa} a_t^2 \\ & \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 . \end{aligned} \tag{22}$$

Para determinar la solución de la ecuación se propone un candidato de solución de la forma:

$$J\left(a_t, P_t, V_t, t\right) = F\left(a_t, P_t, V_t\right) e^{-\delta t}, \tag{23}$$

del cual se puede deducir: $J_t = -\delta F\left(a_t, P_t, V_t\right) e^{-\delta t}$, $J_i = F_i$, $J_{in} = F_{in}$. Por lo que la ecuación (17) puede ser vista como:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} \Big[& \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta F\left(a_t, P_t, V_t\right) e^{-\delta t} + F_a a_t \mu_a + F_P P_t \pi_t + F_V V_t \mu_V \\ & + F_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py}\sigma_{ay} + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM}\right) + F_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 \\ & + F_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 + F_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) + F_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 \right. \\ & \left. + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) + \frac{1}{2} F_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 \Big]. \end{aligned} \tag{24}$$

Ahora de asigna una forma funcional a $F\left(a_t, P_t, V_t\right)$. Se propone:

$$F\left(a_t, P_t, V_t\right) = \beta_0 + \beta_1 \left[\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right], \tag{25}$$

de donde se sabe:

$$\begin{aligned} & F_a = \frac{\beta_1}{a_t}; \quad F_{aP} = 0; \quad F_{aa} = -\frac{\beta_1}{a_t^2}; \\ & F_P = \frac{\beta_1}{P_t}; \quad F_{aV} = 0; \quad F_{PP} = -\frac{\beta_1}{P_t^2}; \\ & F_V = \frac{\beta_1}{V_t}; \quad F_{PV} = 0; \quad F_{VV} = -\frac{\beta_1}{V_t^2}; \end{aligned}$$

[5] Todas las ecuaciones recursivas se presentan en el Apéndice 1

por lo que se sustituyen las derivadas parciales de F en la ecuación (24) para obtener:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\mu_a + \beta_1\pi_t \\ &+ \beta_1\mu_V - \beta_1\left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right) - \beta_1\left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2\right) \\ &- \frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2, \end{aligned} \tag{26}$$

dado que, son conocidos los valores de μ_a, σ_{ay} y σ_{aM}, se sustituyen en la ecuación anterior, por lo que:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(c_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\left[\ \theta_y\left(\alpha_y - r_b\right)\right. \\ &+ \theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \theta_m\left(\alpha_s - r_b\right) - \left.\frac{c_t}{a_t}\ \right] + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \beta_1\left[\frac{1}{2}\left(\theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)^2\right. \\ &+ \left(\theta_y\sigma_y + \theta_s\sigma_{Sy} - \sigma_{Py}\right)\left(\theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}\right)\rho_1 + \left.\frac{1}{2}\left(\theta_s\sigma_{SM} + \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM}\right)^2\right] \\ &- \beta_1. \end{aligned} \tag{27}$$

La ecuación (27) puede reexpresarse como:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \ln\left(c_t\right) + \left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1\left(\ln\left(a_t\right) + \ln\left(P_t\right) + \ln\left(V_t\right)\right)\right] + \beta_1\theta_y\left(\alpha_y - r_b\right) \\ &+ \beta_1\theta_s\left(\alpha_s - r_b\right) + \beta_1\theta_m\left(\alpha_m - r_b\right) - \beta_1\frac{c_t}{a_t} + \beta_1\pi_t + \beta_1\mu_V - \beta_1\left[\frac{1}{2}\left(\theta_y^2\sigma_y^2 + 2\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{Sy}\right.\right. \\ &- 2\theta_y\sigma_y\sigma_{Py} + \theta_s^2\sigma_{Sy}^2 - 2\theta_s\sigma_{Sy}\sigma_{Py} + \left.\sigma_{Py}^2\right) + \rho_1\left(\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{SM} + \theta_s^2\sigma_{SM}\sigma_{Sy} - \theta_s\sigma_{Py}\sigma_{SM}\right. \\ &+ \theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y + \theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{Sy} - \theta_m\sigma_M\sigma_{Py} - \theta_y\sigma_{PM}\sigma_y - \theta_s\sigma_{PM}\sigma_{Sy} + \left.\sigma_{PM}\sigma_{Py}\right) \\ &+ \left.\frac{1}{2}\left(\theta_s^2\sigma_{SM}^2 + 2\theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{SM} - 2\theta_s\sigma_{PM}\sigma_{SM} + \theta_m^2\sigma_M^2 - 2\theta_m\sigma_M\sigma_{PM} + \sigma_{PM}^2\right)\right] - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{Py}^2 \\ &- \beta_1\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_{PM}^2 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Para determinar el valor del consumo, c_t, la proporción de la riqueza destinada a la tenencia de saldos reales, θ_m, la proporción destinada a la inversión en el activo físico, θ_y, y la proporción destinada a la tenencia de un producto derivado, θ_s, se debe retomar la ecuación (28), con la

consideración del tercer supuesto de equilibrio, que establece que $m_t = a_t\theta_m$. En cuyo caso la ecuación (28) se reescribe como:

$$\begin{aligned}0 &= \varphi\ln(c_t)+(1-\varphi)\ln(a_t\theta_m)-\delta\left[\beta_0+\beta_1\left(\ln(a_t)+\ln(P_t)+\ln(V_t)\right)\right]+\beta_1\theta_y\left(\alpha_y-r_b\right)\\&+\beta_1\theta_s\left(\alpha_s-r_b\right)+\beta_1\theta_m\left(\alpha_m-r_b\right)-\beta_1\frac{c_t}{a_t}+\beta_1\pi_t+\beta_1\mu_V-\beta_1\left[\frac{1}{2}\left(\theta_y^2\sigma_y^2+2\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{Sy}\right.\right.\\&-2\theta_y\sigma_y\sigma_{Py}+\theta_s^2\sigma_{Sy}^2-2\theta_s\sigma_{Sy}\sigma_{Py}+\sigma_{Py}^2\Big)+\rho_1\left(\theta_s\theta_y\sigma_y\sigma_{SM}+\theta_s^2\sigma_{SM}\sigma_{Sy}-\theta_s\sigma_{Py}\sigma_{SM}\right.\\&+\theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y+\theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{Sy}-\theta_m\sigma_M\sigma_{Py}-\theta_y\sigma_{PM}\sigma_y-\theta_s\sigma_{PM}\sigma_{Sy}+\sigma_{PM}\sigma_{Py}\Big)\\&\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\theta_s^2\sigma_{SM}^2+2\theta_m\theta_s\sigma_M\sigma_{SM}-2\theta_s\sigma_{PM}\sigma_{SM}+\theta_m^2\sigma_M^2-2\theta_m\sigma_M\sigma_{PM}+\sigma_{PM}^2\right)\right]-\frac{1}{2}\beta_1\sigma_{Py}^2\right.\\&-\beta_1\sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1-\frac{1}{2}\beta_1\sigma_{PM}^2-\frac{1}{2}\beta_1\sigma_V^2,\end{aligned} \tag{29}$$

y se deriva con respecto a las variables de interés. Y para poder reducir la ecuación a su mínima expresión se sustituyen los valores de α_y, α_s, α_m y r_b, para obtener:

$$\begin{aligned}0 &= \varphi\ln(c_t)+(1-\varphi)\ln(a_t\theta_m)-\delta\left[\beta_0+\beta_1\ln(a_t)+\beta_1\ln(P_t)+\beta_1\ln(V_t)\right]+\beta_1\theta_y\left(\mu_y-i\right)\\&+\beta_1\theta_s\left(\mu_S-i\right)+\beta_1\theta_m\left(\mu_M-i\right)-\beta_1\frac{c_t}{a_t}+\beta_1\pi_t+\beta_1\mu_V-\tfrac{1}{2}\beta_1\theta_y^2\sigma_y^2-\beta_1\theta_s\theta_y\left(\sigma_y\sigma_{Sy}\right.\\&\left.+\sigma_y\sigma_{SM}\rho_1\right)-\beta_1\theta_s^2\left(\sigma_{Sy}^2+\sigma_{SM}\sigma_{Sy}\rho_1+\tfrac{1}{2}\sigma_{SM}^2\right)-\beta_1\theta_m\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1-\beta_1\theta_m\theta_s\left(\sigma_M\sigma_{Sy}\rho_1\right.\\&\left.+\sigma_M\sigma_{SM}\right)+\tfrac{1}{2}\beta_1\theta_m^2\sigma_M^2+\beta_1\sigma_{PM}^2-\tfrac{1}{2}\sigma_{Py}^2\end{aligned} \tag{30}$$

En primer lugar se deriva a la ecuación (25) con respecto de c_t. Con lo que se obtiene:

$$0=\frac{\varphi}{c_t}-\frac{\beta_1}{a_t}\qquad\therefore\qquad \mathrm{c}_t=\varphi\frac{a_t}{\beta_1}. \tag{31}$$

De manera que es posible observar que el consumo no depende de variables financieras, mientras que si depende de la riqueza del agente representativo y del parámetro φ que mide la importancia relativa que este agente asigna al consumo y a la tenencia de saldos monetarios reales. Además la relación que se presenta entre el consumo, la riqueza y el parámetro que asigna la importancia, es directa, lo cual demuestra que si la riqueza aumenta, lo hará también el consumo y de la misma forma con el parámetro φ. Dicho resultado es bastante lógico si se piensa en cualquier consumidor inmerso en cualquier economía, cuanto mayor será su ingreso

mayor será su consumo. Y lo mismo sucede con la importancia que él asigna al consumo, si su preferencia se inclina hacia el consumo (cuanto más se acerque φ a 1) su consumo ira en aumento

Para determinar los saldos monetarios reales y la inversión en el activo físico se deriva la ecuación (25) con respecto de θ_m y θ_y. Cuando se deriva con respecto de θ_m se obtiene:

$$0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1(\mu_M - i) - \beta_1\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 - \beta_1\theta_s(\sigma_M\sigma_{Sy}\rho_1 + \sigma_M\sigma_{SM}) + \beta_1\theta_m\sigma_M^2.$$

Por la primera y segunda condición de equilibrio $\theta_s^* = \theta_s = 0$, de forma que la ecuación anterior queda como:

$$0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1(\mu_M - i) - \beta_1\theta_y\sigma_M\sigma_y\rho_1 + \beta_1\theta_m\sigma_M^2, \tag{32}$$

por el momento no se determinara el valor de los saldos monetarios reales ,θ_m, dado que en la ecuación también se encuentra la proporción destinada al activo físico. Ahora se deriva la ecuación (25) con respecto de θ_y:

$$0 = \beta_1(\mu_y - i) - \beta_1\theta_y\sigma_y^2 - \beta_1\theta_s(\sigma_y\sigma_{Sy} + \sigma_y\sigma_{SM}\rho_1) - \beta_1\theta_m\sigma_M\sigma_y\rho_1$$

y por la segunda condición de equilibrio la ecuación se reescribe como:

$$0 = \beta_1(\mu_y - i) - \beta_1\theta_y\sigma_y^2 - \beta_1\theta_m\sigma_M\sigma_y\rho_1. \tag{33}$$

Como se puede observar con las ecuaciones (32) y (33) se puede formar un sistema de ecuaciones de dos funciones con dos incógnitas, θ_m y θ_y, cuyo resultado está dado por[6]:

$$\theta_{m1} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3} \tag{34a}$$

$$\theta_{m2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3} \tag{34b}$$

[6] El proceso de resolución de este sistema de ecuaciones se encuentra en el Apéndice 2

Si se rastrean las variables que conforman a θ_m es posible observar que cuando aumenta la tasa de interés disminuye la demanda de saldos reales. Lo cual se puede interpretar como que un aumento de la tasa de interés nominal hace que el agente representativo sustituya su dinero por bonos, lo que reduciría la tenencia de saldos monetarios reales. Dicho resultado está inscrito en la teoría económica, pues cuando las tasa de interés son elevadas es mucho más atractivo para los consumidores invertir que consumir, mientras que cuando las tasas de interés son bajas preferirán consumir.

$$\theta_{y1} = \omega_5 - \omega_6 \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3} \right) \tag{35a}$$

$$\theta_{y2} = \omega_5 - \omega_6 \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3} \right) \tag{35b}$$

A su vez las ecuaciones (30a) y (30b) nos indican el valor de la tenencia del activo físico depende directamente de su prima de riesgo ($\mu_y - i$) y depende, de forma inversa, de la volatilidad del derivado, σ_{Sy}. La relación inversa con la prima de riesgo del activo físico indica que si disminuye la prima de riesgo del activo físico será más atractivo para el agente representativo invertir en otra clase de productos que en el activo físico. Dado que el otro producto financiero al que tiene acceso es consumidor es un producto derivado, puede decirse que cuando la prima de riesgo del activo físico aumenta, el agente representativo disminuirá su inversión en el activo físico y decidirá invertir una mayor cantidad de su riqueza en productos derivados.

Para determinar la tasa de inflación de equilibrio es necesario hacer mención de la tercera condición de equilibrio que establece:

$$\frac{M_t}{P_t} = m_t = a_t \theta_m$$

y se puede re expresar como:

$$P_t = \frac{M_t}{a_t} \frac{1}{\theta_m} \tag{36}$$

Si se aplica el lema de Itô para un cociente a la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{\mathrm{d}\left(M_t/a_t\right)}{\left(M_t/a_t\right)} = \left(\mu_M - \mu_a - \sigma_M\sigma_{ay}\rho_1 - \sigma_M\sigma_{aM} + \tfrac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right)\mathrm{d}t + \left(\sigma_M - \sigma_{aM}\right)\mathrm{d}W_{Mt} - \sigma_{ay}\mathrm{d}W_{yt} \tag{37}$$

Ahora, si se emplean las condiciones de equilibrio y se toma en cuenta la ecuación (37) y el proceso de la tasa de inflación tal y como lo describe la ecuación (4) se observa que la tasa de inflación está compuesta por:

1) la tendencia de la inflación media esperada

$$\pi_t = \left(\mu_M - \mu_a - \sigma_M\sigma_{ay}\rho_1 - \sigma_M\sigma_{aM} + \tfrac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \tfrac{1}{2}\sigma_{aM}^2\right)\frac{1}{\theta_m} \tag{38}$$

2) y por sus volatilidades

$$\sigma_{PM} = \frac{\sigma_M - \sigma_{aM}}{\theta_m} \tag{39}$$

$$\sigma_{Py} = -\frac{\sigma_{ay}}{\theta_m}. \tag{40}$$

Al mismo tiempo es posible recordar que el crecimiento medio esperado de la riqueza satisface:

$$\mu_a = \theta_y\left(\mu_y - i_t - 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y\rho_1\right) + \theta_m\left(\mu_M - i_t - \sigma_{Py}\sigma_M\rho_1 - \sigma_{PM}\sigma_M\right) - {c_t}/{a_t} \tag{41}$$

y las volatilidades de la riqueza real son:

$$\sigma_{ay} = \theta_y\sigma_y - \sigma_{Py} \tag{42}$$

$$\sigma_{aM} = \theta_m\sigma_M - \sigma_{PM} \tag{43}$$

Para obtener el valor de la tasa de inflación de equilibrio y sus respectivas volatilidades se resuelve el sistema de ecuaciones de seis ecuaciones con seis incógnitas de (37)-(43). Con lo que se obtiene que la inflación media esperada de equilibrio es:

$$\pi_t = \frac{i_t}{i_t - \omega_5}\left[\mu_M \omega_1 + \theta_y\left(\mu_y\left(i_t - \omega_1\right) + \gamma_1\right) + \theta_y^2 \sigma_y^2 \omega_1 + \gamma_2\right] \tag{44}$$

donde:

$$\gamma_1 = \sigma_{Py}\sigma_M \rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_M$$

$$\gamma_2 = 2\sigma_{Py}\sigma_y - \sigma_{PM}\sigma_y \rho_1.$$

4. Conclusiones

Es posible deducir tres principales resultados: 1) La inflación es una variable que dependo de shocks monetarios y reales. Lo cual dice que es afectada tanto por variables monetarias como reales; 2) La oferta monetaria junto con su volatilidad se relacionan de manera positiva con la tasa de inflación. O sea que un incremento en la oferta monetaria o en su volatilidad traería como consecuencia un incremento en la tasa de inflación o sea en el nivel general de precios; y 3) Si las volatilidades de los activos financieros afectan a la tasa de inflación, se puede verificar la relación existente entre el mercado financiero y los objetivos de la política monetaria.

Se ha encontrado que tanto la tendencia como la volatilidad del mercado de instrumentos derivados afecta a la tasa de inflación. Por lo tanto se verifica la hipótesis planteada para este trabajo de investigación y se da respuesta a la pregunta de si existe una relación significativa entre los mercados de derivados y los objetivos de la política monetaria.

Bibliografía

Bakshi, G.S. y Z. Chen. (1996). "Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rate in Monetary Economies". *The Review of Financial Studies*.

Suiza. Bank for International Settlements. (1994). *Macroeconomic and Monetary Policy Issues Raised by the Growth of Derivatives Markets*. Hannoun Report. CGFS Publications.

Beltratti, A. y C. Morana. (2006). "Breaks and Persistency: Macroeconomic Causes of Stock Market Volatility". *Journal of Econometrics*.

Black, F. y M. Scholes. (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*.

Fender, I. (2000a). "Corporative Heding: The Impact of Financial Derivatives on the Broad Credit Chanel of Monetary Policy". *BIS Working Paper*.

Fender, I. (2000b). "The Impact of Corporate Risk Management on Monetary Policy Transmission: Some Empirical Evidence". *BIS Working Paper*.

Colombia. Banco de la Republica. Gomez, E., D. Vasquez y C. Zea. (2005). *Derivative Markets Impact on Colombian Monetary Policy*. Borradores de Economía.

Hunter, W.C. y S.D. Smith. (2002). "Risk Management in the Global Economy: A Review Essay". *Journal of Banking and Finance*.

Karatzas, I., J.P. Lehoczky, S. Shreves y G.L. Xu. (1991). "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market". *SIAM Journal on Control and Optimization*.

Lewis, A. L. (2000). "Option Valuation Under Sthocastic Volatility: with mathematica code". *finance press. U. K.*

Lioui, A. y P. Poncet. (2004). "General equilibrium real and nominal interest rate". *Journal of Banking and Finance*.

Lioui, A. y P. Poncet. (2005). "General Equilibrium Pricing of CPI Derivatives". *Journal of Banking and Finance*.

Chile. Banco Central. Mies, V., F. Morandé y M. Tapia. (2002). *"Política monetaria y mecanismos de transmisión: nuevos elementos para una vieja discusión".*

Morales, A. (2001). "Monetary Implications of Cross-Border Derivatives for Emerging Economies". *IMF Working Papers*.

Savona, P., A. Maccario y C. Oldani. (2002). "On MonetaryAnalysis of Derivatives". *Open Economies Review*, Special Issue.

Semmler, W. y W. Zhang. (2007). "Asset Price Volatility and Monetary Policy Rules: A Dynamic Model and Empirical Evidence". *Economic Modelling*.

Sidrauski, M. (1967). "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy". *American Economic Review*.

Spiegel, M. (2008). "Financial Globalization and Monetary Policy Discipline". Federal Reserve Bank of San Francisco. *Working Paper Series*.

Tytell, I. y S. Wei. (2004). "Does Financial Globalization Induce Better Macroeconomic Policies". *IMF Working Papers*.

Upper, C. (2006). "Derivatives Activity and Monetary Policy". BIS Quarterly Review, September.

Venegas-Martínez, F. (2004). "Maximización de la utilidad y valuación de derivados con volatilidad estocástica". *Revista mexicana de economía y finanzas, REMEF*.

Venegas-Martínez, F. (2006). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*.

Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos. Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. México. Cengage Learning

Venegas-Martínez, F. (2009). "Un modelo estocástico de equilibrio macroeconómico: acumulación de capital, inflación y política fiscal". *Investigación Económica*.

Vickery, J. (2008). "How and Why do Small Firms Manage Interest Rate Risk?" *Journal of Financial Economics*.

Vrolijk, C. (1997). "Derivatives Effect on Monetary Policy Transmission". *IMF Working Papers*.

Wagner, H. y W. Berger. (2005). "Globalization, Financial Volatility and Monetary Policy". *Empirica*.

Apéndice 1

A continuación se obtiene la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellma asociada al problema de maximización:

$$\underset{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^{\infty}\left[\varphi\ln\left(c_s\right)e^{-\delta t}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}s \;\middle|\mathrm{F}_0\right], \tag{A2.1}$$

con el propósito de caracterizar una solución del problema planteado se definió:

$$J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)=\max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}\mathrm{E}\left[\int_0^{\infty}\left(\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta s}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right)\mathrm{d}s \;\middle|F_0\right], \tag{A2.2}$$

ecuación que puede ser vista como:

$$\begin{aligned}J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)=\max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}E\Bigg\{&\int_t^{t-\mathrm{d}t}\left[\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta s}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right]\mathrm{d}s\\&+\int_{t-\mathrm{d}t}^{\infty}\left[\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta s}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta s}\right]\mathrm{d}s \;\middle|F_0\Bigg\},\end{aligned} \tag{A2.3}$$

y para expresarla en términos de $J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)$ se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)=\max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}\mathrm{E}\Bigg\{&\int_t^{t+\mathrm{d}t}\left[\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta t}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}t\\&+\int_{t+\mathrm{d}t}^{\infty}J\left(a_t+\mathrm{d}a_t,P_t+\mathrm{d}P_t,V_t+\mathrm{d}V_t,t+\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t \;\middle|F_t\Bigg\},\end{aligned} \tag{A2.4}$$

Se separa a la función J :

$$J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)=\max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}\mathrm{E}\left\{\int_t^{t+\mathrm{d}t}\left[\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta t}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)\right.$$
$$\left.+J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)+\mathrm{d}J\left(\mathrm{d}a_t,\mathrm{d}P_t,\mathrm{d}V_t,\mathrm{d}t\right)\ \middle|F_t\right\}. \tag{A2.5}$$

Es posible trasladar a J del lado izquierdo de la ecuación y aplicar la integral para obtener:

$$0=\max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y}\mathrm{E}\left\{\left[\varphi\ln\left(c_t\right)e^{-\delta t}+\left(1-\varphi\right)\ln\left(m_t\right)e^{-\delta t}\right]\mathrm{d}t+o\left(\mathrm{d}t\right)\right.$$
$$\left.+\mathrm{d}J\left(\mathrm{d}a_t,\mathrm{d}P_t,\mathrm{d}V_t,\mathrm{d}t\right)_t\ \middle|F\right\}, \tag{A2.6}$$

para continuar con el problema se resuelve $\mathrm{d}J$ mediante el lema de Itô. Hay que recordar que $J\left(a_t,P_t,V_t,t\right)$, por lo tanto

$$\mathrm{d}J=J_a\left(\mathrm{d}a_t\right)+J_P\left(\mathrm{d}P_t\right)+J_V\left(\mathrm{d}V_t\right)+J_t\left(\mathrm{d}t\right)+\frac{1}{2}\left[J_{aa}\left(\mathrm{d}a_t\right)^2+J_{PP}\left(\mathrm{d}P_t\right)^2+J_{VV}\left(\mathrm{d}V_t\right)^2\right.$$
$$+J_{tt}\left(\mathrm{d}t\right)^2+2J_{aP}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}P_t\right)+2J_{aV}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right)+2J_{at}\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) \tag{A2.7}$$
$$\left.+2J_{PV}\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right)+2J_{Pt}\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}t\right)+2J_{Vt}\left(\mathrm{d}V_t\right)\left(\mathrm{d}t\right),\right.$$

dónde:

J_i: primera derivada parcial con respecto de i

J_{ii}: segunda derivada parcial con respecto de i y luego de i

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)^2=a_t^2\left(\sigma_{ay}^2\mathrm{d}t+2\sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t+\sigma_{aM}^2\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}V_t\right)^2=V_t^2\sigma_V^2\mathrm{d}t$$

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}P_t\right)=a_tP_t\left(\sigma_{Py}\sigma_{ay}\mathrm{d}t+\sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1\mathrm{d}t+\sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1\mathrm{d}t+\sigma_{PM}\sigma_{aM}\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right)=a_tV_t\left(\sigma_{aM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t\right)$$

$$\left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}V_t\right)=P_tV_t\sigma_{PM}\sigma_V\rho_2\mathrm{d}t$$

$$\left(\mathrm{d}t\right)^2=0;\quad \left(\mathrm{d}a_t\right)\left(\mathrm{d}t\right)=0;\quad \left(\mathrm{d}P_t\right)\left(\mathrm{d}t\right)=0;\quad \left(\mathrm{d}V_t\right)\left(\mathrm{d}t\right)=0;$$

si se sustituyen las diferenciales en la ecuación (A2.7):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}J = {} & J_a a_t \mu_a \mathrm{d}t + J_a a_t \sigma_{ay} \mathrm{d}W_{yt} + J_a a_t \sigma_{aM} \mathrm{d}W_{Mt} + J_P P_t \pi_t \mathrm{d}t + J_P P_t \sigma_{Py} \mathrm{d}W_{yt} + J_P P_t \sigma_{PM} \mathrm{d}W_{Mt} \\
& + J_V V_t \mu_V \mathrm{d}t + J_V V_t \sigma_V \mathrm{d}W_{Vt} + J_t \mathrm{d}t + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \sigma_{ay}^2 \mathrm{d}t + J_{aa} a_t^2 \sigma_{ay} \sigma_{aM} \rho_1 \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \sigma_{aM}^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} J_{PP} P_t^2 \sigma_{Py}^2 \mathrm{d}t + J_{PP} P_t^2 \sigma_{Py} \sigma_{PM} \rho_1 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} J_{PP} P_t^2 \sigma_{PM}^2 \mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 \mathrm{d}t + J_{aP} a_t P_t \sigma_{Py} \sigma_{ay} \mathrm{d}t + J_{aP} a_t P_t \sigma_{Py} \sigma_{aM} \rho_1 \mathrm{d}t + J_{aP} a_t P_t \sigma_{PM} \sigma_{ay} \rho_1 \mathrm{d}t \\
& + J_{aP} a_t P_t \sigma_{PM} \sigma_{aM} \mathrm{d}t + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM} \sigma_V \rho_2 \mathrm{d}t + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM} \sigma_V \rho_2 \mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{A2.8}$$

y se factoriza la ecuación (A2.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}J = {} & \Big[J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_t + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay} \sigma_{aM} \rho_1 + \frac{1}{2} \sigma_{aM}^2 \right) \\
& + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py} \sigma_{PM} \rho_1 + \frac{1}{2} \sigma_{PM}^2 \right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 + J_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py} \sigma_{ay} \right. \\
& + \sigma_{Py} \sigma_{aM} \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_{ay} \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_{aM} \left. \right) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM} \sigma_V \rho_2 \\
& + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM} \sigma_V \rho_2 \Big] \mathrm{d}t + \left(J_a a_t \sigma_{ay} + J_P P_t \sigma_{Py} \right) \mathrm{d}W_{yt} + J_V V_t \sigma_V \mathrm{d}W_{Vt} \\
& + \left(J_a a_t \sigma_{aM} + J_P P_t \sigma_{PM} \right) \mathrm{d}W_{Mt}.
\end{aligned} \tag{A2.9}$$

Ahora se sustituye a la ecuación (A2.9) en la ecuación (A2.6):

$$\begin{aligned}
0 = \max_{c_t, \theta_m, \theta_s, \theta_y} E \Big\{ & \left[\varphi \ln \left(c_t \right) e^{-\delta t} + \left(1 - \varphi \right) \ln \left(m_t \right) e^{-\delta t} \right] \mathrm{d}t + o\left(\mathrm{d}t \right) + \Big[J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t \\
& + J_V V_t \mu_V + J_t + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay} \sigma_{aM} \rho_1 + \frac{1}{2} \sigma_{aM}^2 \right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2} \sigma_{Py}^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \sigma_{PM}^2 \right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 + J_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py} \sigma_{ay} + \sigma_{Py} \sigma_{aM} \rho_1 + \sigma_{PM} \sigma_{ay} \rho_1 \right. \\
& \left. + \sigma_{PM} \sigma_{aM} \right) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM} \sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM} \sigma_V \rho_2 \Big] \mathrm{d}t + \left(J_a a_t \sigma_{ay} \right. \\
& \left. + J_P P_t \sigma_{Py} \right) \mathrm{d}W_{yt} + \left(J_a a_t \sigma_{aM} + J_P P_t \sigma_{PM} \right) \mathrm{d}W_{Mt} + J_V V_t \mathrm{d}W_{Vt} \Big| F_t \Big\}
\end{aligned} \tag{A2.10}$$

se sacan esperanza[7]s y se divide entre $\mathrm{d}t$ considerando el teorema del valor medio[8]

[7] Los términos estocásticos desaparecerán debido a que los movimientos brownianos se distribuyen de forma normal con media cero varianza $\mathrm{d}t$ de forma que: $\mathrm{d}W \sim N\ \left(0, \mathrm{d}t\right)$

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_t,\theta_m,\theta_s,\theta_y} \Big[& \varphi \ln(c_t) e^{-\delta t} + (1-\varphi)\ln(m_t) e^{-\delta t} + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_t \\
& + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2 \right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2 \right) + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2 + J_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py}\sigma_{ay} + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 \right. \\
& \left. \sigma_{PM}\sigma_{aM} \right) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 \Big],
\end{aligned}
\tag{A2.11}
$$

se reordenan los términos y si c_t y m_t son óptimos se satisface que:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \varphi \ln(c_t) e^{-\delta t} (1-\varphi)\ln(m_t) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \mu_a + J_P P_t \pi_t + J_V V_t \mu_V + J_{aP} a_t P_t \left(\sigma_{Py}\sigma_{ay} \right. \\
& \left. + \sigma_{Py}\sigma_{aM}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{ay}\rho_1 + \sigma_{PM}\sigma_{aM} \right) + J_{aV} a_t V_t \sigma_{aM}\sigma_V \rho_2 + J_{PV} P_t V_t \sigma_{PM}\sigma_V \rho_2 \\
& + J_{aa} a_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{ay}^2 + \sigma_{ay}\sigma_{aM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{aM}^2 \right) + J_{PP} P_t^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_{Py}^2 + \sigma_{Py}\sigma_{PM}\rho_1 + \frac{1}{2}\sigma_{PM}^2 \right). \\
& + \frac{1}{2} J_{VV} V_t^2 \sigma_V^2
\end{aligned}
\tag{A2.12}
$$

La ecuación anterior es la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman.

APÉNDICE 2

En este apartado se obtendrán los valores de θ_m y θ_y con un sistema de dos ecuaciones que se presentan a continuación:

$$
0 = \frac{(1-\varphi)}{\theta_m} + \beta_1 (\mu_M - i) - \beta_1 \theta_y \sigma_M \sigma_y \rho_1 + \beta_1 \theta_m \sigma_M^2 \tag{A3.1}
$$

$$
\theta_y = \frac{(\mu_y - i)}{\sigma_y^2} - \theta_m \frac{\sigma_M \rho_1}{\sigma_y}, \tag{A3.2}
$$

---

[8] El teorema del valor medio del cálculo integral dice que si se tiene $\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) + o(b-a)$ y $\frac{0(h)}{h} \to 0$ si $h \to 0$, por ejemplo $\frac{o(h)}{h} = \frac{h^2}{h} = h \to 0$ si $h \to 0$

que para simplificarse puede ser reescrito como:

$$0 = \frac{\omega_1}{\theta_m} + \omega_2 - \omega_3\theta_y + \omega_4\theta_m \tag{A3.3}$$

$$\theta_y = \omega_5 - \omega_6\theta_m \tag{A3.4}$$

donde:

$$\omega_1 = (1-\varphi) \qquad \omega_5 = \frac{(\mu_y - i)}{\sigma_y^2}$$

$$\omega_2 = \beta_1(\mu_M - i) \qquad \omega_6 = \frac{\rho_1\sigma_M}{\sigma_y}$$

$$\omega_3 = \beta_1\rho_1\sigma_M\sigma_y$$

$$\omega_4 = \beta_1\sigma_M^2 .$$

Para comenzar con la resolución del sistema se sustituye a (A3.4) en (A3.3) para obtener:

$$0 = \frac{\omega_1}{\theta_m} + \omega_2 + \omega_3\omega_5 + \theta_m(\omega_4 - \omega_3\omega_6) \tag{A3.5}$$

y se multiplica por θ_m para ajustar la ecuación a:

$$\theta_m^2(\omega_4 - \omega_3\omega_6) + \theta_m(\omega_2 + \omega_3\omega_5) + \omega_1, \tag{A3.6}$$

con lo que es posible aplicar la formula general para obtener los valores de θ_m. Una vez aplicada la formula general se obtiene:

$$\theta_m = \frac{-\omega_2 - \omega_3\omega_5 \pm \sqrt{(\omega_2 + \omega_3\omega_5)^2 - 4(\omega_4 - \omega_3\omega_6)\omega_1}}{2(\omega_4 - \omega_3\omega_6)}.$$

Ecuación que puede ser vista como:

$$\theta_m = \frac{\eta_1 \pm \eta_2}{\eta_3}, \tag{A3.7}$$

donde:

$$\eta_1 = -\omega_2 - \omega_3\omega_5$$
$$\eta_2 = \sqrt{\left(\omega_2 + \omega_3\omega_5\right)^2 - 4\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)\omega_1}$$
$$\eta_3 = 2\left(\omega_4 - \omega_3\omega_6\right)$$

de forma que existen dos posibles valores de θ_m:

$$\theta_{m1} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3} \text{ y } \theta_{m2} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3}.$$

Para encontrar el valor de θ_y se sustituyen los valores de θ_m en la ecuación (A3.4), para obtener:

$$\theta_{y1} = \omega_5 - \omega_6\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_3}\right) \text{ y } \theta_{y2} = \omega_5 - \omega_6\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_3}\right)$$

CAPÍTULO XVIII

El *Insider Trading* desde la perspectiva del Derecho internacional privado (español y europeo).

Gloria Esteban de la Rosa

Universidad de Jaén (España)

Resumen

El uso de información privilegiada (*insider trading*) para operar en el mercado de valores es una conducta prohibida por la gran mayoría de las legislaciones del mundo, al afectar a la confianza de los inversores y ahorradores en su correcto funcionamiento. Por este motivo, la conducta del iniciado se sanciona por la normativa administrativa e, incluso, penal, como sucede, en particular, en el caso de la Unión Europea, debiendo citarse la actual Directiva 2003/6/CE, que será sustituida en julio de 2016 por el Reglamento 596/2014. Cabe preguntarse por la competencia de las autoridades administrativas para sancionar la conducta del iniciado cuando se trata de operaciones financieras internacionales, así como por el régimen de la responsabilidad civil en la que incurra –en su caso- por los daños económicos que ocasione a los inversores que participan en el mercado de valores, haciendo operaciones de igual signo o de signo contrario. Para determinar esta segunda cuestión, es preciso acudir a los sistemas de Derecho internacional privado de cada Estado parte de la Unión Europea.

Palabras clave: Unión Europea, mercado de valores, información privilegiada

1. Introducción

El mercado de valores permite la asignación del ahorro a la inversión a través de la realización de negocios sobre valores mobiliarios, que tienen lugar en el mercado primario (o, de emisión) y en el secundario (o, de negociación) (Tapia, 2003, p. 219 y ss). Y, en particular, entre el inversor (o ahorrador) y los emisores, esto es, los sujetos que apelan al ahorro del público mediante la "solicitud pública del ahorro" (OPS u OPV) (Valenzuela, 1993, p. 111).

Para que el precio de los activos o instrumentos financieros se ajuste al razonable (justo), la mayor parte de las legislaciones prohíben la realización de operaciones financieras con información privilegiada (y sensible), que no se ha hecho pública *(Material Non Public Information*). Y ello porque el comportamiento del iniciado altera la eficiencia del mercado de valores, esto es, la correcta asignación del ahorro a la inversión (eficiencia alocativa), que es su función prístina (Hernández, 2007, p. 58). El *insider trading* se refiere –específicamente- a los comportamientos oportunistas de los operadores, que no es lo mismo que especulativos ni manipuladores.

Dicha eficiencia es requisito necesario para la integridad del mercado. Un mercado es íntegro, en la medida en que permite que participen un conjunto de operadores (inversores u ahorradores) en determinado tipo de condiciones, sin desigualdades ni ventajas para una persona o grupo, que cuenta con información privilegiada. Por ello, no desincentiva ni desanima la realización de operaciones, haciendo que el inversor tenga una confianza razonable en que las reglas de dicho mercado son conocidas por todos/as y, para ello, han de ser transparentes y públicas (juego limpio) (Binmore, 2009, p. 234).

De otro lado, se trata de información sensible (de la propia sociedad emisora o del mercado de valores), que no ha sido desvelada, ni a los accionistas, ni a los inversores ni al público, en general, y que se encuentra en posesión de los *insiders*. Por ello, suelen denominarse "iniciados" a quienes negocian en el mercado de valores sin asumir el riesgo que conlleva la realización de las operaciones financieras (Sánchez, Tapia, 1987, p. 751). Y, en este sentido, suelen ser los administradores de las sociedades cotizadas los que disponen de información privilegiada que deben comunicar al mercado como un "hecho relevante", salvo que se trate de una operación en curso, sobre la que exista un interés legítimo para mantenerla reservada (*corporata insiders*). P.ej., por estar en fase de preparación la formulación de una oferta pública de adquisición (OPA).

2. Regulación del *Inisider Trading* en la Unión Europea

2.1 Mercado europeo de valores: el *insider trading* en la Directiva 2003/6/CE

Uno de los procesos que tiene lugar en el momento actual en el mercado de valores es su internacionalización o globalización, siendo de gran interés determinar el régimen jurídico de

las operaciones financieras internacionales con información privilegiada en el mercado de valores desde el ámbito español y de la Unión Europea (UE) y, en concreto, desde la perspectiva del Derecho Internacional Privado (DIPr).

Como se sabe, se creó el "espacio comunitario de servicios de inversión" tras la aprobación de la Directiva 93/22/CEE del Consejo, de 10 de mayo de 1993, relativa a los servicios de inversión en el ámbito de los valores negociables (DSI), que hizo realidad la libertad de prestación de servicios y la libertad de establecimiento para las empresas dedicadas a los servicios de inversión (*DOCE* Serie L nº 141/27, de 11 de junio de 1993). Fue sustituida por la MiFID I de 2004 (Directiva sobre Mercados de Instrumentos Financieros) y ésta, a su vez, derogada por la actual MiFID II (*DOUE* Serie L nº 173, de 12 de junio de 2014).

Por último, cabe citar el Reglamento 600/2014, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 15 de mayo de 2014, relativo al mercado de instrumentos financieros y por el que se modifica el Reglamento (UE) nº 648/2012 (*DOUE* Serie L nº 173, de 12 de junio de 2014).

En este marco y como parte del mercado financiero, los mercados bursátiles de la UE han experimentado cambios importantes, derivados, fundamentalmente, de la fuerte competencia ejercida por mercados extranjeros y, en concreto, por las bolsas de Nueva York y Tokio. Ello ha provocado el interés por la mejora de la regulación, así como por llevar a cabo un proceso de desregulación y de neoregulación, también por las instituciones comunitarias, en un momento en el que se ha creado una competencia entre mercados para atraer la negociación de unos mismos valores (Salinas, 1997, p. 770).

Sin embargo, la armonización de los mercados de valores ha sido más complicada, al subsistir diferencias significativas entre los Estados miembros (a diferencia de la actividad bancaria) (Zunzunegui, 2005, p. 73). En todo caso, se ha demostrado la importancia del desarrollo financiero para el crecimiento económico y, para ello, la Comisión de la UE hace hincapié en la necesaria transparencia de los mercados financieros y de ahí también la insistencia en la creación de un mercado único de servicios financieros, en el que existan normas comunes para todos los Estados miembros. De otro lado, en el caso del *insider trading,* han tenido lugar programas de observación de las bolsas de valores (*stock wach programmes*), en los que el supervisor del Estado en el que se encuentra el mercado solicita información adicional a las autoridades del Estado en el que tiene su establecimiento la sociedad cotizada.

Así, la regulación de origen comunitario que trata el *insider trading* con autonomía es la Directiva 89/592/CEE del Consejo, de 13 de noviembre de 1989, sobre coordinación de las normativas relativas a las operaciones con información privilegiada, tomando como modelos los ordenamientos francés y británico (*DOCE* Serie L nº 334, de 18 de noviembre de 1989). Es destacable que su base jurídica no fuese la libertad de establecimiento, de acuerdo con la primera Propuesta presentada por la Comisión, sino el art. 100A del TCEE, añadido tras la adopción del Acta Única Europea (1986) (Warren, 1991).

Ahora bien, la Directiva 89/592/CEE fue derogada por la Directiva 2003/6/CE del Parlamento europeo y del Consejo, de 28 de enero de 2003, sobre las operaciones con información privilegiada y la manipulación del mercado (en adelante, DAM) (*DOUE*, Serie L, núm. 96, de 12 de abril de 2003). Su considerando 1º indica que: "*un mercado financiero integrado y eficiente requiere integridad del mercado. El buen funcionamiento de los mercados de valores y la confianza del público en los mercados son requisitos imprescindibles para el crecimiento económico y la riqueza*". Por el contrario, el abuso del mercado daña su integridad y la confianza del público en los valores y productos derivados.

Su contenido era claramente insuficiente para dar respuesta a las crecientes cuestiones que se presentaban en el mercado de valores de los Estados parte de la UE y, por ende, en el espacio comunitario, relacionadas, sobre todo, con la necesidad de preservar la confianza de los inversores y ahorradores en su correcto funcionamiento. El considerando nº 13 de la DAM se refiere a los cambios que han tenido lugar en los mercados financieros y en la legislación comunitaria desde la aprobación de la Directiva 89/592/CEE, que debe reemplazarse para asegurar la coherencia de la legislación contra la manipulación del mercado.

Así, la DAM forma parte del proceso de elaboración de nuevas normas en materias financieras para el mercado de valores, propuesto por el Comité de Sabios presidido por Alexamder Lamfalussy (publicado el 15 de febrero de 2001) y acogido por el Consejo Europeo, celebrado en Estocolmo, los días 23 y 24 de marzo de 2001, asumido también para su aplicación para la banca y los seguros [*Final Report on the Committee of wise men on the regulation of European securities Markets* (Chairman A. Lamfalussy), Bruselas, 15 de febrero de 2001)]. Este proceso debía acometerse en cuatro niveles: el nivel uno, constituido por las Directivas y Reglamentos adoptados por el Parlamento y el Consejo conforme al

procedimiento de co-decisión, y que está constituido por la DAM, como Directiva de principios (Zunzunegui, 2005, p. 485).

En concreto, el contenido de la DAM tiene su origen en un documento del FESCO de junio de 2002 sobre *Market Abuse. FESCO's response to call for views from the Securities Regulators under the EU's Action Plan for Financial Services. A European Regime againsr market abuse* (Hernández, 2007, pp. 145 y ss) y su desarrollo se ha realizado de acuerdo con los cuatro niveles *supra* indicados, en el que ha tenido un papel central el Comité Europeo de Reguladores de Valores (CERVR, más conocido por las siglas en inglés CESR*, Commitee of European Securities Regulators*), que emitió un conjunto de informes, de acuerdo con los que se fueron elaborando las Directivas y Reglamentos citados (Berger, Altermir, 2001, p. 529 y ss).

Ahora bien, el 28 de junio de 2010, la Comisión lanzó una consulta para la revisión de la DAM y el 20 de octubre de 2011, presentó una Propuesta de Reglamento sobre información privilegiada y manipulación de mercado, que explicaba las razones para una nueva regulación [documentos *COM*(2011) 651 final; Comunicación de la Comisión sobre "*Ensuring efficient, safe and sound derivatives markets*", pulicada en *COM* (2009) 332, 3 de julio de 2009], resultado del Informe elaborado por J. De Larosière (*Report of the High-Level Group on Financial Supervision in the EU*, Brussels, 25 de febrero de 2009, p.23).

Y, en particular, una de las principales cuestiones que no trató la DAM fue la sanción de la conducta ilícita del iniciado, en la medida en que el art. 13 dejaba libertad a los Estados para determinarlas. Tan sólo indicaba que tales sanciones debían ser suficientes para incitar al respeto de sus disposiciones.

La citada Propuesta de Reglamento era un texto amplio, que pretendía sustituir a la Directiva 2003/6/CE, que adoptaba la forma de Reglamento y no de Directiva, como hasta ahora. De otro lado, la Comisión también realizó, el 20 de octubre de 2011, una Propuesta de Directiva sobre las sanciones penales al tráfico con información privilegiada y la manipulación de cotizaciones [*COM*(2011) 654 final]. Ambos instrumentos se han adoptado y publicado en el *DOCE* y se explican *infra*.

Por ello, la actual DAM quedará derogada tras la entrada en vigor del Reglamento 596/2014/UE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 16 de abril de 2014, sobre el abuso de mercado y por el que se derogan la Directiva 2003/6/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de las Directivas 2003/124/CE, 2003/125/CE y 2004/72/CE de la Comisión, prevista para el 3 de julio de 2016 (art. 39) *(DOUE* Serie L nº 173, de 12 de junio de 2014).

Ahora bien, algunas de sus disposiciones entran en vigor a los veinte días de su publicación en el *DOUE*, esto es, el 2 de julio de 2014 (art. 39). Por último, se ha aprobado también la Directiva 2014/57/UE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 16 de abril de 2014, sobre las sanciones penales aplicables al abuso de mercado (Directiva sobre abuso de mercado) (*DOUE*, Serie L nº 173, de 12 de junio de 2014). Su transposición ha de realizarse, lo más tardar, el 3 de julio de 2016 (art. 13).

2.2 Principales novedades introducidas por el Reglamento 596/2014/UE

Las modificaciones proyectadas y finalmente recogidas se basan, entre otros, en el citado Informe del Grupo de Alto Nivel sobre supervisión financiera en la UE (J. de Larosière), que señalaba que los regímenes de sanciones de los Estados miembros son, en general, débiles y heterogéneos. Se detectaron los principales problemas para la efectiva implementación de la legislación en materia de sanciones sobre servicios financieros en la UE: son poco disuasorias y, por tanto, no efectivas, de un lado. Y, de otro, la definición de uso de información privilegiada y de abuso de mercado difiere considerablemente de un Estado miembro a otro. De ahí que el Reglamento 596/2014 defina ambas prácticas y su aplicación, como tal, no requiera su transposición en cada ordenamiento nacional.

Por lo que respecta a la definición de información privilegiada, cabe destacar una innovación, al referirse por vez primera a la persona que cuenta con información privilegiada, que obtiene una ventaja injusta del beneficio que consigue a través de dicha información (considerando nº 23), por lo que se sitúa el énfasis en dos aspectos de la conducta. En primer lugar, se sigue tratando de iniciados que cuentan con una posición de privilegio para el acceso a la información que no es pública. En segundo lugar, el iniciado utiliza una ventaja informativa, que provoca en los demás inversores una situación de injusticia, al no poder obtener el mismo beneficio que el iniciado.

Por tanto, no se trata de la salvaguardia del principio del *market egalitarism*, sino de sancionar una conducta ilícita, que causa un daño al mercado y causa una injusticia a los inversores, al no contar con la información para obtener la ganancia, que sí logra el iniciado. Y, en relación con las normas de conducta, no sólo se trata de la conocida prohibición, sino que también impone obligaciones de hacer al emisor y al participante en los derechos de emisión (art. 17).

Además, la utilización de información privilegiada puede consistir, igualmente, en el comercio de derechos de emisión y sus derivados [art. 7, 1º, letra c)], así como en la participación en subastas de derechos de emisión u otros productos subastados basados en los mismos, celebrados de conformidad con el Reglamento 1031/2010/UE de la Comisión, de 12 de noviembre de 2010, sobre el calendario, la gestión y otros aspectos de las subastas de derechos de emisión de gases de efecto invernadero, con arreglo a la Directiva 2003/87/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, por la que se establece un régimen para el comercio de derechos de emisión de gases de efecto invernadero en la Comunidad (*DOUE* Serie L nº 302, de 18 de noviembre de 2010).

También incluye las prácticas que consisten en el abuso de mercado que tienen lugar en este otro tipo de mercados, que no son los más conocidos mercados regulados (y, en particular, bolsas de valores), pero cuya importancia en el momento actual va en aumento. En este sentido, incluye cualquier otro sistema organizado de negociación (SOC), incluyendo los SMNs y los OTC (*over de counter*) (Solomon, Corso, 1991, p. 311 y ss).

El mercado (o, mejor, comercio) OTC se forma en cada caso a través de la intervención de los "*marketmakers*" (creadores de mercado), que se encuentran en lugares muy distantes y distintos del Planeta, de tal forma que entran en contacto cuando tiene lugar una orden por parte de ellos mismos, haciendo que se ponga en funcionamiento una red de *marketmakers* que opera en el mundo entero (Solomon, Corso, 1991, p. 312). También quedan comprendidos en el Reglamento los derechos de emisión, que se consideran instrumentos financieros tras la MiFID I.

Ahora bien, no debe considerarse como operación con información privilegiada el mero hecho de que un creador de mercado o las personas autorizadas para actuar como contrapartes se limiten a proseguir su negocio legítimo de compra y venta de instrumentos financieros o de

que las personas autorizadas a ejecutar órdenes por cuenta de terceros con este tipo de información se limiten a ejecutarlas o modificarlas ligeramente (considerando 30). En este sentido, un creador de mercado es el definido en el art. 4, 1º punto 7 de la Directiva 2014/65/UE (MiFID II).

Tampoco puede considerarse tráfico de información privilegiada el hecho de que una persona utilice la información de la que dispone sobre una empresa en el contexto de una OPA con el fin de obtener el control o proponer una fusión con dicha empresa (considerando 30). De otra parte, contempla la elaboración de listas de iniciados, con la finalidad de facilitar búsqueda de los elementos de prueba necesarios para la investigación de los casos de abuso de mercado (art. 18).

De otro lado, una de las principales cuestiones de interés es determinar su ámbito de aplicación, material, temporal, espacial (o personal) y territorial (en su caso). Y, en este sentido, no puede decirse que hayan tenido lugar importantes modificaciones. Se trata del mismo criterio material empleado por la DAM, con la diferencia de que comprende otros mercados de valores y no sólo los regulados. Además, si bien el Reglamento no pretende regular los mercados de contado de los productos no financieros (p.ej., mercado de la energía) o los mercados de derivados relacionados con ellos, unifica los criterios que permiten identificar cuándo tiene lugar el abuso de mercado en tales mercados. Y, por este motivo, quedan comprendidas estas prácticas en su ámbito de aplicación.

Por lo que respecta al ámbito espacial, el art. 22 recoge un indicador, de acuerdo con el cual se aplica: "*(...) a todas las actuaciones llevadas a cabo en su territorio, y también fuera del mismo cuando se refieran a instrumentos financieros admitidos a negociación en un mercado regulado, para los que se haya solicitado su admisión a negociación en dicho mercado, subastados en una plataforma de subastas o que se negocien en un SMN o SOC o para los que se haya solicitado su admisión a negociación en un SMN que opere dentro de su territorio*".

Por último, en cuanto al régimen sancionador, el Reglamento 596/2014 realiza una revisión de las facultades sancionadoras existentes y de su aplicación práctica, con el fin de promover la convergencia de las sanciones aplicadas en el conjunto de la actividad de supervisión (considerando nº 70). Tales sanciones han de tener efecto disuasorio y, en concreto, los arts.

30 y ss del nuevo Reglamento 596/2014 recogen un conjunto de sanciones de tipo administrativo que han de ser adoptadas por las autoridades de los Estados miembros.

De otro lado, aun cuando nada impide que los Estados miembros prevean legalmente sanciones administrativas y penales por las mismas infracciones, no se les puede exigir que establezcan sanciones administrativas en relación con las infracciones del presente Reglamento que ya estén sujetas al Derecho penal interno a fecha de 3 de julio de 2016 (considerando nº 72), fecha de entrada en vigor del texto completo del nuevo Reglamento 596/2014. Por último, en esta misma línea, se refuerza la cooperación entre las autoridades de los Estados miembros con la finalidad de investigar los casos de abuso de mercado y, sobre todo, con la Autoridad Europea de Valores y Mercados (AEVM).

2.3 Tratamiento penal de la conducta del iniciado: la Directiva 2014/57

Una novedad que introduce el legislador comunitario es el tratamiento de la conducta del iniciado desde la perspectiva penal. Por ello, la nueva regulación se completa con la adopción de la Directiva 2014/57/UE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 16 de abril de 2014, sobre las sanciones penales aplicables al abuso de mercado (Directiva sobre abuso de mercado) (*DOUE*, Serie L nº 173, de 12 de junio de 2014). Su transposición ha de realizarse, lo más tarde, el 3 de julio de 2016 (art. 13) (DAM2).

Tras el citado informe De Larosière (*supra* citado), se comprobó que las sanciones impuestas por los Estados miembros en el ámbito del abuso de mercado eran débiles y heterogéneas y que las sanciones administrativas han sido insuficientes para garantizar el cumplimiento de las normas de conducta contra el abuso de mercado (considerando nº 5). Por ello, se introducen sanciones penales, al menos, para las conductas más graves, pues son necesarias para garantizar el cumplimiento de la política de la UE destinada a combatir el abuso de mercado (considerando nº 8).

Por último, comprende el uso, la comunicación ilícita y la recomendación a un tercero de información privilegiada. En tal caso, los Estados miembros han de garantizar la sanción ante dicha conducta en caso de incitación, complicidad o tentativa (art. 6). De otro lado, responden tanto las personas físicas (art. 7) como las jurídicas (art. 8). Por último, el art. 10 delimita su aplicación en el espacio comunitario. En concreto, cuando la infracción haya sido cometida:

a) total o parcialmente en el territorio de un Estado parte; b) por uno de sus nacionales, al menos, cuando el acto constituya una infracción en el lugar en el que fue cometido.

3. Aproximación al *Insider Trading* desde el sistema de Derecho internacional privado

3.1 Competencia internacional de las autoridades del mercado de valores: criterios

La primera cuestión a la que se ha de dar respuesta cuando se trata determinar el régimen de las operaciones financieras con información privilegiada es si es preciso que el sistema de DIPr identifique criterios de competencia, al ejercerla las autoridades administrativas, en principio, en el territorio del Estado que se la atribuye. De otro lado, el Derecho público es de aplicación territorial, teniendo lugar (desde la perspectiva del "conflicto de leyes") una relación indisociable entre competencia judicial y legislativa.

Ahora bien, no cabe establecer una relación mimética entre la competencia de las autoridades investidas del poder público (administrativas) y el carácter público de un concreto sector del ordenamiento. El tratamiento de ambas cuestiones ha de permanecer separado en DIPr, pues el legislador establece tal diferencia, también en el ámbito del Derecho publico y, en concreto, en el actual Derecho administrativo económico.

Ahora bien, cabe realizar la pregunta acerca de si se plantean –realmente- cuestiones de competencia internacional tomando en cuenta que se trata de autoridades administrativas, cuya competencia comprende las actuaciones que tienen lugar en su territorio con independencia de la nacionalidad o residencia habitual del emisor de las acciones, de la entidad intermediaria (ESI) o del propio iniciado.

La respuesta es positiva, pues dicha competencia corresponde cuando la actuación del iniciado ha tenido lugar en su territorio (con independencia del mercado de cotización del instrumento financiero) o en el extranjero, como se verá *infra*. Y, por ello, puede considerarse que se trata de un criterio de competencia (lugar en el que opera el iniciado), que permite la actuación extraterritorial de las autoridades administrativas, que sólo podrá llevarse a cabo, si existen convenios entre los Estados cuyas autoridades entran en relación en un supuesto de tráfico de información privilegiada (Baltic, 1991, p. 184 y ss).

En este sentido ha de ser interpretada la Propuesta de Directiva (que precedió la Directiva 89/592/CEE), en la que se indicaba este criterio de competencia: el lugar en el que se encuentre el mercado bursátil. El art. 1 de la Propuesta de Directiva del Consejo sobre coordinación de las normas relativas a las operaciones de iniciados presentada por la Comisión al Consejo, el 25 de mayo de 1987 [Documentos COM(87) 111 final] (*DOCE* Serie C nº 153, de 11 de junio de 1987) fue modificado por la propuesta de Directiva del Consejo sobre coordinación de las regulaciones relativas a las operaciones de iniciados, presenta por la Comisión [Documentos *COM*(80) 549 final] (*DOCE* Serie C nº 277, de 27 de octubre de 1988).

Dicha modificación se refiere al citado art. 1, 1º que queda redactado de la siguiente forma: "*los Estados miembros prohibirán a todas aquellas personas que, en el ejercicio de su trabajo, profesión o funciones, hayan tenido acceso a información privilegiada, tal como se define en el artículo 6, adquirir o ceder en su territorio, ya sea directa o indirectamente, valores mobiliarios admitidos a negociación en sus mercados bursátiles aprovechándose de esa información privilegiada*". La propuesta recibió el informe favorable del Parlamento Europeo, que realizó algunas consideraciones relacionadas, en especial, con la base jurídica más adecuada para su elaboración (*DOCE* Serie C nº 187, de 18 de julio de 1988).

En concreto, el art. 1, 1º de la Directiva 89/592/CEE señala que: "*los Estados miembros prohibirán a todas aquellas personas que, en el ejercicio de su profesión o de sus funciones, hayan tenido acceso a información privilegiada, tal como se define en el artículo 6, adquirir o ceder en su territorio, ya sea directamente o a través de un intermediario, valores mobiliarios admitidos a negociación en sus mercados bursátiles aprovechándose de esa información"*. Los apdos. 2º y 3º del art. 1 establecen presunciones, que permiten localizar los actos realizados por el iniciado en determinados casos en el territorio en el que se encuentra el mercado de valores.

Ahora bien, este criterio que localiza el mercado de valores (protegido) a los efectos de la aplicación de las normas de conducta anti-*insider trading* de la Propuesta de Directiva, fue modificado en el art. 5 de la Directiva 89/592/CEE, en el que la mención al mercado de cotización fue sustituida por el territorio del Estado en el que se realiza la actividad por el iniciado. Y, de este modo, se indica que las autoridades de cada Estado tendrán que aplicar, al

menos, las disposiciones de la Directiva en tales casos, siempre que se trate de un instrumento financiero que cotice en un Estado parte.

Como puede verse, se varía el criterio que determina la competencia de las autoridades de los Estados miembros, de tal forma que corresponde –en todo caso- con carácter territorial, pero el citado art. 5 introduce –adicionalmente- la posibilidad de que cada Estado decida la competencia de sus autoridades en otros casos, con la finalidad de dotar de una amplia aplicación a la citada Directiva. Y, éste es sentido del art. 10 de la DAM, que emplea dos criterios para indicar la competencia de las autoridades administrativas, como se verá a continuación. Otra cosa es que no tengan la competencia de ejecución (*jurisdiction to execute*) de la medida sancionadora y que, por tanto, tales sanciones sólo puedan ser efectivas si existen convenios entre los Estados.

El art. 10 de la DAM recoge dos criterios que determinan la actuación de las autoridades del mercado de valores de los Estados parte (y, por ende, la aplicación de las normas de conducta de sus respectivas legislaciones nacionales y sanciones correspondientes) con la finalidad de proteger el mercado financiero comunitario. En concreto, no sólo cuando el acto o actividad sobre el instrumento financiero tenga lugar en su territorio, sino también fuera de él, siempre que cotice en, al menos, un mercado de un Estado miembro (art. 10).

Por tanto, las autoridades españolas aplicarán las normas de transposición de la Directiva a los actos realizados en el territorio español o fuera de él, siempre que el instrumento financiero cotice en un mercado de valores de la UE o se haya cursado una solicitud de admisión. Se aprecia el paralelismo del art. 84, 8º de la Ley 24/1988, de 28 de julio, del Mercado de Valores (LMV) con el art. 10 de la DAM. Pero, para ello hace falta que se entables cauces eficaces de cooperación internacional, lo que sucede en el marco de la UE (art. 16 de la DAM) con la Autoridad Europea de Valores y Mercados (AEVM).

Por tanto, son dos los criterios que determinan la competencia internacional de las autoridades administrativas en tales casos. De acuerdo con el criterio de la actividad, las autoridades españolas supervisan las conductas contrarias a la integridad del mercado que tengan lugar en territorio español, a pesar de que el valor no cotice en un mercado español, dado el carácter territorial de la normativa rectora del mercado de valores. Ahora bien, hace falta un elemento de conexión con el foro. Y, por ello, se han realizado una pluralidad de críticas a la solución

alcanzada por la *Cour de Cassation* en el conocido As. Triangle-Péchiney (Gautier, 1989, p. 672-674).

En segundo lugar, según el criterio del efecto, las autoridades españolas tienen competencia para supervisar las conductas contrarias a la integridad del mercado que tengan lugar fuera de este territorio, si se trata de instrumentos financieros admitidos a cotización en un mercado español. Y, por tanto, cabe imponer una sanción (*jurisdiction to adjudicate*), si la conducta está comprendida en el ilícito de la norma española (*jurisdiction to prescribe*), al tratarse de instrumentos financieros que cotizan (o se ha presentado una solicitud) en un mercado español.

No se justificaría que el iniciado que opera con información privilegiada desde un lugar distinto a aquél en el que se encuentra el mercado (protegido), no pudiera ser sancionado, al considerar que no ha tenido ligar un ilícito administrativo y, sin embargo, a otro iniciado que opera en el espacio geográfico de dicho mercado, se le impongan una sanción. Y éste es, en concreto, el sentido del art. 10 de la DAM, de acuerdo con su considerando nº 35, que se refiere a dar: "*una aplicación geográfica amplia de las disposiciones cubiertas por la presente Directiva*". La doctrina se refiere, en concreto, a la competencia extraterritorial de las autoridades de cada Estado miembro, que podrán declararse competentes incluso en casos en los que todos los elementos constitutivos de la infracción no se encuentren en su territorio (Janin, 2002, p. 514).

Sigue esta misma pauta el art. 22 del Reglamento 596/2014. Por último, esta disposición deja abierta la posibilidad de que actúen autoridades del orden judicial, para el caso en el que también exista un interés concreto de un inversor o de un ahorrador.

4. Mercado protegido del comportamiento del iniciado: inaplicación del "principio de los efectos"

El iniciado opera con "ventaja", que procede de la "posición" que ocupa derivada de su cargo u oficio (p.ej., administrador o directivo de la empresa cotizada), que le permite acceder a información (relevante) que no es pública. Por tanto, el privilegio se refiere al iniciado, quien accede a información, que le permite operar con ventaja frente a los demás, al no asumir el

riesgo negocial en el mercado de valores (Zunzunegui, 2005, p. 483). Existe, por ello, una desigualdad (de partida) entre los inversores, determinada por la posición privilegiada del iniciado, que daña la integridad del mercado de valores.

Se indica –con frecuencia- que las normas de conducta anti-*insider trading* se orientan hacia la consecución de la igualdad de los inversores en el mercado de valores. Sin embargo, no tienen este fin sino evitar que el iniciado utilice su "ventaja informativa" y obtenga un beneficio que no pueden alcanzar los demás, dañando –por ello- su confianza en el correcto funcionamiento del mercado (integridad). Y, para salvaguardar dicha integridad, la normativa anti-*insider trading* trata de evitar que el iniciado opere con ventaja (informativa) De este modo, mediante la prohibición del *insider trading* se logra "*un mayor acercamiento entre los inversores en cuanto a las posibilidades de obtener beneficios y sufrir pérdidas*" (Martínez Flórez, 1995, p. 985).

Por tanto, su función específica consiste en paliar (no agravar) el desigual punto de partida de los inversores desde la óptica de la información con la que cuentan, a través de la adopción de medidas –fundamentalmente- preventivas, lo que incide –a su vez- en un aspecto de la integridad: la simetría informativa. La normativa sobre abuso de mercado protege frente al peligro de que algunos inversores se vean perjudicados, al no tener acceso a la información financiera o no ser capaces de utilizarla correctamente (Zunzunegui, 2005, p. 483).

Así, no se trata –de forma inmediata- de tutelar la simetría informativa sino de prevenir que una determinada situación de desigualdad en la que se encuentran concretos sujetos respecto de otros, sea utilizada en provecho propio (o derivado) por quien la disfruta (Martínez Flórez, 1995, p. 985). Si el *insider* usa dicha ventaja, se agrava la situación de asimetría informativa, presente en el mercado de valores.

Por el contrario, si se evita la realización de operaciones financieras con ventaja por el iniciado, se incide –indirectamente- en la consecución de la simetría informativa. Sin embargo, no se trata tampoco ésta de su finalidad, esencialmente preventiva: paliar (o no agravar) el desigual punto de partida de los inversores desde la óptica de la información de la que disponen para operar en el citado mercado. Y, para lograrlo, sin duda, una sanción efectiva tiene un efecto disuasorio sobre los demás iniciados, que no utilizarán su ventaja

informativa en un concreto mercado para evitar que se les aplique tal sanción. Ahora bien, son conocidas las dificultades que se presentan a la hora de probar esta conducta ilícita.

De ahí, adicionalmente, la importancia de las medidas preventivas, que tratan de evitar que el iniciado opere con la información que posee por razón de su posición, cargo u oficio (privilegio). Lo que se logra, a través de las "normas de conducta", que no han de confundirse con los códigos deontológicos, al constituir (las primeras) auténticos deberes, cuyo incumplimiento lleva aparejado un conjunto de sanciones (administrativas y penales, para las conductas más graves). Y, en concreto, de las que imponen deberes positivos (transparencia informativa) a concretos destinatarios (Empresas de servicios de inversión, ESIs, inversores, emisores, otras entidades públicas o privadas que participan en el mercado, etc.) en función del papel que desempeñan en el mercado de valores.

En todo caso, ha de ser supervisado (vigilado) el cumplimiento de las normas de conducta, pues, de lo contrario, no se daría respuesta al ilícito de iniciados. Y esta afirmación tiene especial relevancia cuando se trata de operaciones financieras que se realizan –como indica la doctrina- en el actual contexto de internacionalización de los mercados y transnacionalidad de los ilícitos bursátiles. Por ejemplo, la ESI (con la que negocia el iniciado) puede estar establecida en el territorio de un Estado distinto del lugar en el que se encuentra el mercado de valores y, a su vez, el iniciado puede tener su domicilio o residencia habitual en un tercer país.

La función preventiva de la normativa anti-i*nsider trading* se relaciona con su mayor alcance, si se compara con el carácter territorial de la regulación española del mercado de valores. Señala el art. 3 de la LMV que: "*las disposiciones de la presente Ley serán de aplicación a todos los valores cuya emisión, negociación o comercialización tenga lugar en el territorio nacional*". Así se indica en el art. 84, 8º de la LMV, en el art. 10 de la DAM y en el art. 22 del Reglamento 596/2014 (véase *supra*). Esto es, el legislador determina dicho ámbito para que tenga la mayor cobertura (geográfica, aunque no sólo).

Evitar la realización de operaciones con ventaja informativa es crucial para el correcto funcionamiento del mercado de valores, que –además- logrará mantener la confianza de los inversores. Y ello sólo es posible otorgando el mayor alcance a la normativa anti-*insider trading*. Por ello, frente a la aplicación territorial de la normativa del mercado de valores, por

su finalidad, las normas de conducta que tratan de salvaguardar la integridad del mercado, tienen un alcance distinto.

Y, como se ha señalado, se identifican dos criterios (del efecto y de la actividad), de acuerdo con los que se determina el alcance de la normativa española (y comunitaria), no sólo de la actuación de los organismos de supervisión y control (en el caso de España, de la CNMV), sino también de la normativa del foro (de carácter administrativo y, en especial, sancionador).

Como se ha señalado *supra*, la normativa anti-*insider trading* no trata de "garantizar" la simetría informativa, sino de evitar el beneficio que se deriva para el iniciado del uso de su ventaja informativa, que causa un daño a la integridad del mercado. Y para ello, en principio, el *insider* ha de adecuar su conducta a las reglas vigentes en el mercado en el que realiza la adquisición o venta de valores, esto es, en el mercado en el que cotizan tales valores, con independencia del lugar de realización de la operación (p.ej., territorio en el que esté establecida la ESI).

Como puede apreciarse, el mercado cuya integridad se tutela a través de las normas de conducta anti-*insider trading* es el mercado en el que el iniciado trafica con dicha información, con independencia del lugar en el que se haya operado, obtenido la información, nacionalidad del *insider*, del emisor o del intermediario financiero o, incluso, del lugar desde el que se haya realizado la orden, si ha tenido lugar a través de internet, desde cualquier tipo de dispositivo (fijo o móvil) (Solomon, Corso, 1991, 299 y ss).

La salvaguardia de la integridad del mercado sólo se logra mediante la aplicación de sus normas de conducta, también a los actos del iniciado que no se han llevado a cabo –físicamente- en el territorio español (al haber operado en otro lugar geográfico). Se trata del mercado que experimenta el daño (a su integridad) por la conducta del iniciado y, por ello, la aplicación de sus normas de conducta permite prevenir el uso de su ventaja informativa, de un lado, y sancionar dicha conducta, de otro. En todo caso, es necesario que el instrumento financiero cotice en un mercado español (regulado o en un sistema organizado de negociación) (Solomon, Corso, 1991, 299-339).

Cabe recordar que la normativa anti-*insider trading* tiene la finalidad de salvaguardar la integridad del mercado de valores y, por ello, el daño se produce al mercado (y no a un

concreto inversor que opera en el mismo). De otro lado, no se toma en cuenta, de forma particular, que se haya realizado (o no) la concreta operación (o que se haya saldado con pérdidas), sino que la cotización del valor es suficiente para considerar la existencia de un mercado protegido de la conducta del *insider*.

Sin duda, la imposición de sanciones por los organismos de supervisión y control sirve para evitar la repetición de la conducta (si son efectivas), pues hará que se limite este comportamiento por otros iniciados, y, por ello, permitirá preservar la integridad del mercado (y la simetría informativa). La consecución de este fin es aún más importante en el momento actual, en el que se asiste a una "competencia entre mercados de valores" (global) por atraer los activos de los emisores para que sean negociados en tales mercados.

Por tanto, las normas anti-*insider trading* se aplican territorialmente, de acuerdo con un criterio unilateral de reglamentación del mercado de valores, pero se matiza conforme al concreto y específico objetivo (material) que cumplen (Garcimartín, 2007b, p. 74). De lo que se extraen dos consideraciones: en primer lugar, no se sigue –propiamente- el "principio de los efectos" (propio del Derecho de la competencia), según el cual, se trataría de considerar una concreta conducta que ha tenido lugar en el extranjero, siempre que haya incidido o incida en el mercado de valores español.

Y ello porque quiebra uno de sus criterios y, en concreto, el aspecto negativo, de acuerdo con el cual, la ley española no se aplica a los actos de competencia que no produzcan sus efectos en España (Virgós, 1993, p. 45-46). Sin embargo, como se ha señalado *supra*, la ley española se aplica, a pesar de no tratarse del mercado de cotización (o en el que se ha solicitado su admisión) del instrumento financiero. De otro lado, no se trata de la aplicación extraterritorial de tales normas de conducta, sino -tan sólo- de la vigilancia de la conducta del iniciado por las autoridades del foro, a pesar de que tenga lugar fuera del Estado, en cuyo mercado cotiza el instrumento financiero.

En segundo extremo, no cabe decir –propiamente- que se aplique el criterio de la actividad, pues la vigilancia y sanción (por las autoridades administrativas del foro) de su propio ordenamiento a las actuaciones ilícitas que tengan lugar por el iniciado en su territorio tiene lugar conforme al criterio que indica el art. 3 de la LMV y generalmente admitido, de territorialidad del Derecho público y, en concreto, del Derecho administrativo económico.

Explicado de este modo el ámbito de cobertura de las normas de conducta anti-*insider trading* se facilita la comprensión del funcionamiento del ordenamiento del mercado de valores, lo que permite que no se planteen dudas interpretativas. Cabe citar, en este sentido, la Sentencia del Tribunal Supremo (español), de 20 de marzo de 2003, en la que el Alto Tribunal, a instancias del recurso planteado por el Abogado del Estado, casó la sentencia de la Audiencia Nacional, que –a su vez- había anulado la sanción de 7 millones de pesetas impuesta por la Comisión Nacional del Mercado de Valores a una empresa de nacionalidad alemana, con sucursal en España, que se dedicaba a la prestación de servicios de inversión.

El argumento de la AN es que no se trata de una actividad en la que se vea implicado el mercado español, pues los servicios de inversión se prestaban para la compra y venta de instrumentos financieros en la Bolsa de Nueva York. Sin embargo, el TS casa la sentencia, indicando que existe la conexión con España que está recogida en la LMV de 1988.

En este caso, el hecho de que fuese una sociedad alemana la que negociase operaciones en los mercados norteamericanos no tenía porqué excluir que las autoridades españolas tuvieran competencias para regular o supervisar esa actividad (Fuertes, 2004, p. 227). Lo que se cuestiones es la eficacia de la sanción (multa). Sin embargo, en este caso, era máxima, al estar establecida en España la sucursal de la empresa alemana que realizaba los servicios de inversión.

5. Responsabilidad civil por uso de información privilegiada y falta de divulgación de la información: competencia de autoridades

La conducta del iniciado se sanciona por el ordenamiento del mercado de valores, a través de la adopción de sanciones, que consisten, básicamente en multas, pero que también pueden tener un contenido más variado. En todo caso, la responsabilidad civil nace de la causación de un daño a los inversores por el uso de información privilegiada, siempre que logre probarse la relación de causalidad entre la conducta del iniciado y el daño sufrido en el patrimonio del inversor (y no sólo el ocasionado al mercado). Ahora bien, la concepción de la responsabilidad civil no es idéntica a ambos lados del Atlántico, no sólo en un primer momento (años 60 del s. XX) en el que se empleó la noción de fraude para sancionar la conducta del iniciado, sino en actualidad (Bergmans, 1991).

Ahora bien, no es sólo el uso de la información privilegiada, sino que también se puede estar en presencia de la responsabilidad civil cuando se ha incumplido la obligación de divulgar la información por el emisor y ello con independencia de que el iniciado haya empleado la información privilegiada para operar en el mercado de valores y haya causado un daño a su integridad así como a los inversores. Surge también responsabilidad cuando el daño deriva de la falta de revelación de la información relevante.

Se trata de los supuestos más frecuentes en la actualidad. Así, el "escándalo Madoff" es una muestra dicha litigiosidad (Tenenbaum, 2012, p. 45 y ss). La estafa en que consistió ha conducido a plantear demandas en varios países y, en concreto, ante las autoridades francesas, en reclamación de responsabilidad civil por falta de información sobre los valores comercializados por un organismo de inversión colectiva en Francia. Ahora bien, la *Cour de Cassation* (*chambre commercial*) pronunció la Sentencia el 12 de julio de 2011, en la que declaraba su incompetencia porque la comercialización y difusión del folleto informativo de los valores (en el caso del Organismo de Inversión colectiva en Valores mobiliarios, OICVM) había tenido lugar en Francia, pero la suscripción se había realizado en Luxemburgo.

Y, en cuanto a la regulación comunitaria, el Reglamento nº 1215/2012, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 12 de diciembre de 2012, relativo a la competencia judicial, el reconocimiento y la ejecución de resoluciones judiciales en materia civil y mercantil, cuya entrada en vigor ha tenido lugar, el 10 de enero de 2015 (art. 4), recoge un foro de competencia especial en el ámbito de la responsabilidad civil (*DOCE* Serie L nº 351, de 20 de diciembre de 2012). El art. 7, 2º prevé que una persona domiciliada en un Estado miembro podrá ser demandada en otro Estado miembro "*en materia delictual o cuasi-delictual ante el órgano jurisdiccional del lugar en el que se haya producido o pueda producirse el hecho dañoso*".

Sin embargo, el *forum delicti commssi* ha planteado dudas a la hora de su aplicación, no sólo por el hecho de que el hecho causal y el daño material (consecuencias) pueden haber tenido lugar en sitios distintos, sino también para concretar el lugar del daño económico cuando se trata de los nuevas conductas ilícitas en el ámbito de las fianzas (Lehman, 2011, p. 531). Ahora bien, frente a otro tipo de supuestos, cuando se trata de los ilícitos financieros, el dañó es económico en todo caso (Corneloupe, 2001, p. 65).

Para el Tribunal de Justicia de la Comunidad europea (TJCE) se trata de precisar el "lugar" del daño y, en especial, no resulta sencilla cuando se trata de ilícitos financieros y daños económicos. Se aprecia, a su vez, la amplia variedad de ámbitos materiales sobre los que versan tales casos (Coneloupe, 2001, 63 y ss). Y, en concreto, se plantea al TJCE la interpretación del art. 5, 3º del Convenio de Bruselas, de 27 de septiembre de 1968 (en adelante, CBr), en el As. C-364/93 (Antonio Marinari c. Lloyd's Bank y Zubaidi Traiding Company), resuelto por Sentencia, de 19 de septiembre de 1995 (*Recueil*, 1995, pp. 2719 y ss).

El Sr. Marinari, con domicilio en Italia, solicitó en Italia indemnización de daños a Lloyd's Bank por la conducta de sus empleados, que no sólo le causó un daño económico, sino también un perjuicio a su reputación, al haber considerado de procedencia dudosa el paquete de pagarés (*promissory notes*) que había depositado en la filial de Manchester del Lloyd's Bank. Los empleados pusieron en conocimiento de la policía la existencia de las *promissory note*s, a resultas de lo cual el Sr. Marinari fue detenido y los efectos incautados.

Este pronunciamiento presenta especial interés, pues la cuestión prejudicial que le plantea la *Corte di Cassazione* tiene como objetivo esclarecer si el lugar en el que se hubiera producido el hecho dañoso puede ser considerado atendiendo a un daño económico que alega el Sr. Marinari. En concreto, la *Corte di Cassazione* pregunta si por tal ha de entenderse únicamente como el lugar en el que haya sobrevenido un perjuicio físico irrogado a personas o cosas, o también el lugar en el que se haya producido un perjuicio patrimonial sufrido por el demandante.

El Alto Tribunal considera que el lugar del daño "*no se refiere al lugar en el que la víctima alega haber sufrido un perjuicio patrimonial debido a un daño inicial sobrevenido y sufrido por ella en otro Estado contratante*". Y, en contra de los argumentos aportados por el Gobierno de Alemania, una interpretación contraria permitiría el empleo del *forum actoris*, objetivo éste completamente contrario al sentido general del CBr, que sitúa como criterio general de competencia el domicilio del demandado.

De otro lado, sólo se justifica el empleo de foros especiales en aras de una buena administración de la justicia, así como de una sustanciación adecuada del proceso (marg. 10),

que sólo tiene lugar cuando existe una proximidad razonable de tales tribunales con el supuesto. Por último, la interpretación del lugar del daño no está vinculada la interpretación del foro con las disposiciones nacionales relativas a los presupuestos sobre la responsabilidad civil (marg. 18). Por tanto, no cabe considerar el lugar en el que la víctima alega que ha sufrido el daño económico y no tienen competencia los tribunales italianos. El TJCE se refiere al daño económico, sin consecuencias para determinar el lugar a los efectos de la interpretación del *forum delicti commissi*.

Cabe citar otro asunto resuelto por la STJCE, de 10 de junio de 2004 (As. C-168/02, Rudolf Kronhofer c. Marianne Maier, Christian Möller, Wirich Hofius y Zeki Karan). Resulta de la demanda de responsabilidad civil derivada de una actividad puesta en práctica por los gestores de una empresa de inversión, cuasi-delictual. Y, en concreto, el Sr. Kronhofer demanda a tales agentes, porque no le habían advertido de los elevados riesgos que tenía la operación que le habían recomendado telefónicamente que realizase. A resultas de dicho consejo, R. Kronhofer transfirió una importante cantidad de dinero desde su cuenta en Austria, a la cuenta de la entidad gestora alemana, que empleó para adquirir opciones de compra de elevado riesgo en la Bolsa de Londres.

La operación se saldó con pérdidas importantes para el Sr. Kronhofer, que sólo pudo recuperar una parte del dinero invertido en la operación financiera. Ante la demanda presentada por R. Kronhofer, residente en Austria, a causa de la conducta delictual de los demandados, M. Maier y otros, con domicilio en Alemania, en su calidad de gerentes o asesores de inversiones de la sociedad Protectas *Vermögensverwaltungs GmbH* (establecida en Alemania), considera el Alto Tribunal que el criterio que recoge el art. 5, 3º del CBr no puede ser interpretado en el sentido de conferir competencia al tribunal de la residencia del demandante, en donde tiene su patrimonio principal.

Dicho lugar no corresponde ni al del hecho causal ni al de manifestación de sus consecuencias, que es, en todo caso, Alemania. Si se considerara de este modo –señala el TJCE-, se alteraría la finalidad del Convenio, que consiste en arbitrar los criterios de competencia que permitan una buena administración de justicia y la previsibilidad del tribunal ante el que, tanto el demandado como el demandante pueden ser convocados o presentar una demanda, respectivamente. Y, de otro lado, se admitiría una suerte de *forum actoris*, que no permite dicho instrumento comunitario.

En todo caso, la doctrina es crítica con respecto a la solución dada por el TJCE, al considerar que este asunto no es comparable con otros anteriores. Y, por ello, se propone una interpretación del citado foro de forma que también puedan tener cabida los ilícitos que presenten carácter especial y, entre ellos, los que tienen que ver con el mercado de valores. Y, por ello, habría que preguntarse si el argumento que mantiene el citado tribunal, que no cabe realizar una interpretación del citado foro que permita el *forum actoris,* puede llevare hasta sus últimas consecuencias cuando el lugar en el que tiene su centro de actividad económica el inversor y su residencia habitual coinciden (Muir Watt, 2005, 326 y ss)

Por su parte, la doctrina presenta una pluralidad de criterios que permiten presentar una demanda en un caso de responsabilidad civil derivada de un ilícito financiero y, en concreto, el lugar del daño puede ser considerado de forma que comprenda varios lugares distintos (Lehman, 2012a, 527 y ss; Calvo-Caravaca y Carrascosa, 2014, 53 y ss; Van Houtte, 1996, 78). Ahora bien, estas propuestas también tratan de concretar un lugar del daño económico del demandante (su residencia, el lugar desde el que se hizo la transferencia de los fondos, el lugar el que se encuentra su patrimonio principal, etc), sin reparar en el daño.

Desde esta perspectiva, determinar un "lugar" (del daño) en el ilícito de iniciados plantea varias dudas y, entre ellas, en particular, que el inversor opera a través de una agencia o ESI, que gestiona sus órdenes en distintos mercados de valores, en donde tiene lugar el daño, con independencia de su gestión. Adicionalmente, el daño económico al inversor no puede desvincularse del daño que causa la conducta del iniciado al mercado en el que opera (véase *infra*). Por ello, antes de concretar un lugar, hay que analizar las características del daño, la función de la normativa anti-i*nsider trading* y los principios que la informan (Tenenbaum, 2012, 555 y ss).

Dicho daño es a la integridad del mercado y se relaciona –adicionalmente- con la infracción de un deber de divulgación que le impone este ordenamiento. Esto es, existe responsabilidad civil (relacionada con la administrativa) por el hecho de que el iniciado negocia con ventaja, si ocasiona –además- un daño económico al inversor o ahorrador. Por tanto, el daño es doble: al mercado y al inversor y, por ello, las respuestas del ordenamiento son distintas, pero están relacionadas, al cumplir ambos sectores del ordenamiento la mima finalidad cuando se trata de la regulación anti-*insider trading*.

La doctrina también ha subrayado la existencia de este paralelismo de la normativa administrativa con la civil, de forma que la aplicación de una ley distinta a la del mercado a la responsabilidad civil por daños haría difícil la coincidencia que existe en los ordenamientos internos entre los mecanismos administrativos, penales y civiles en los ilícitos financieros (Corneloupe, 2001, p. 76). Y éste es el elemento que singulariza el ilícito de iniciados con respecto a otro tipo de ilícitos financieros, que permite también interpretar el *forum delicti commissi*.

De otro lado, en el caso de la conducta ilícita del iniciado y de los daños económicos a los inversores, éstos serán un colectivo o grupo (no tanto un concreto inversor), lo que permite acumular las demandas y presentar una acción de grupo ante los tribunales de un único Estado y se favorece –de este modo- la buena administración de la justicia. La posibilidad de presentar una acción de grupo (tal y como se contempla en el ordenamiento americano, *class actions*) se está contemplando también para el caso de los ilícitos bursátiles en algunos ordenamientos europeos. En concreto, la AMF (autoridad francesa en mercados financieros) publicó un informe en 2011, que sugiere un conjunto de reformas, entre las que se encuentra la "acción de grupo" (*Rapport relatif á l'indemnisation des préjudices subis par les épargnants et les investisseurs*, de 25 de enero de 2011, p. 18).

Además, la construcción de un criterio de competencia internacional que permita al iniciado reclamar la responsabilidad civil por daños en estos casos, requiere tomar en cuenta la finalidad preventiva del ordenamiento del mercado de valores y, en concreto, de las normas de conducta anti-*insider trading*. Por ello, un criterio que tome en cuenta el lugar en el que cotiza el instrumento financiero con el que opera el iniciado y que ha causado un daño al mercado, no sólo es plausible, sino que dota de coherencia a las disposiciones del entero ordenamiento (incluido el sistema de DIPr).

En todo caso, de los criterios que se extraen de las decisiones del TJCE puede considerarse que, en la medida en que el mercado dañado por la conducta del iniciado es el mercado en el que ha actuado de forma ilícita, aquí ha tenido lugar el perjuicio también a los inversores. Por ello, es de interés proponer un criterio que consista en litigar en el país en el que han sido admitidos a cotización los instrumentos financieros sobre los que ha operado el iniciado y que han causado un daño económico a los inversores y ahorradores. Tales autoridades aplicarán su propio ordenamiento para determinar la responsabilidad civil (Gautier, 1989, p. 673), lo que

soluciona la cuestión de la calificación (como imperativas) de las normas del país en el que cotiza el instrumento financiero sobre el que ha operado el iniciado (Einsele, 2012, p. 481 y ss).

De otro lado, el mercado de cotización es el lugar al que el inversor dirige sus decisiones y, por tanto, ha de conocer sus reglas de funcionamiento y no se trata de un lugar desconocido para él (a los efectos de tener que litigar en dicho territorio ante sus autoridades), pero puede no tratarse del lugar en el que realmente opera. Ahora bien, otra posibilidad para interpretar el foro del lugar del hecho dañoso es considerar que se trata del foro que permita la reparación efectiva del daño, tomando en cuenta los fines de la responsabilidad civil, a elección del demandante y dentro de las opciones que se le abran por el sistema de competencia internacional en relación con la interpretación del f*orum delicti commissi*.

De otra parte, ha de pensarse en la posibilidad de que el inversor tenga su residencia habitual en un país, contacte con el *broker*, establecido en otro y, por último, éste (por orden de iniciado) realice la operación en un mercado de valores situado en un tercer Estado. Por tanto, el lugar del hecho causal (conforme a la sentencia del TJCE en el As. Minas de Potasio) en ilícito de iniciados es el mercado de cotización del instrumento financiero. Este criterio permite vincular la responsabilidad civil del iniciado con el objetivo que trata de conseguir la normativa anti-*insider trading* (y, de forma más genérica, sobre abuso de mercado): la protección de la integridad del mercado. Por ello, el lugar del daño se localiza en el mercado de cotización.

Y, de otro lado, el lugar de producción del daño puede ser distinto. Y, por ello, puede ser también el lugar en el que opera el inversor, cuando realiza la orden de compra o de venta. Ahora bien, el lugar en el que se ha producido el daño no puede ser interpretado de forma extensiva –a juicio del TJCE- "(*...) hasta el punto de englobar cualquier lugar donde puedan experimentarse las consecuencias perjudiciales de un hecho que ya haya causado un daño efectivamente sobrevenido en otro lugar*" [STJCE, de 27 de octubre de 1998 (As. C-51/97) *supra* citada].

En la medida en que el centro económico del demandante no puede admitirse, cabe considerar lugar del daño el lugar en el que opera el inversor, bien cuando ha realizado la operación financiera a través de una ESI, bien cuando ha operado directamente (a través de internet,

p.ej.). Así, el demandante (inversor o ahorrador) podrá elegir entre demandar al iniciado ante las autoridades correspondientes al mercado de cotización del instrumento financiero, o ante las del lugar en donde se encuentra la ESI a través de la que operó. Si la ESI está establecida en un Estado distinto del Estado en el que se encuentra el broker, será el lugar del daño, el lugar en el que éste desarrolle su actividad.

De este modo, tales autoridades (que no son las del Estado del mercado de cotización) aplicarán la ley del lugar del daño, de acuerdo a lo establecido en el Reglamento Roma II (véase *infra*). Se aboga, por ello, de este modo, por la coincidencia entre los criterios que emplea el Reglamento Bruselas I *bis* con respecto a los criterios que emplea el Reglamento Roma II, que propone la doctrina (Lein, 2008, p. 177 y ss). La autoridad judicial está resolviendo un supuesto de responsabilidad civil, lo que le remitirá a las disposiciones de Derecho privado (Derecho de daños), con independencia de que también tome en cuenta las normas materiales imperativas del mercado de cotización del instrumento financiero, para saber si la conducta del iniciado es ilícita.

A modo de conclusión, cabe señalar que cuando se trata de prevenir las conductas contrarias a la integridad del mercado, hay que identificar las características del daño, que tiene, fundamentalmente, carácter económico. De otra parte, la frecuencia con la que –en el momento actual- se producen daños que suponen un menoscabo patrimonial para el inversor o ahorrador, permite pensar que tendrá lugar un proceso de especialización, que va a suponer centrar la atención en el tipo de daño y, a partir de ahí, realizar una interpretación del *forum delicti commissi*. En concreto, en el ilícito de iniciados, el daño tiene lugar al mercado de cotización del instrumento financiero (y, por ello, también al inversor).

6. Responsabilidad civil por uso de información privilegiada y falta de divulgación de la información: Derecho aplicable.

La ley rectora de la responsabilidad civil se determina por el Reglamento 864/2007, del Parlamento Europeo y del Consejo, de 11 de julio de 2007 (Roma II) (*DOCE* Serie L nº 199, de 31 de julio de 2007), al no excluirse los ilícitos financieros de su ámbito material. El art. 4, 1º indica que, a falta de elección (art. 14), la ley aplicable a una obligación extracontractual es la del país donde se produce el daño, independientemente del país en el que se haya producido el hecho generador del daño y cualesquiera que sean el país o los países en que se producen

las consecuencias indirectas del hecho en cuestión. Sin embargo, tal elección no impedirá la aplicación de las disposiciones de la ley del país en el que se encuentren situados todos los elementos relevantes del caso. (Leible, 2007, pp. 219 y ss).

Por tanto, se trata de la aplicación de la *lex loci damnii* (lugar en el que se materializa o tiene sus consecuencias el daño), a menos que las partes tengan su residencia habitual en otro país, en cuyo caso será de aplicación la ley de su residencia habitual común. Ahora bien, en todo caso, si se demuestra que el daño presenta vínculos manifiestamente más estrechos con otro país distinto, se aplicará la ley de este otro país (cláusula de escape) (Garcimartín, 2007, p. 241 y ss). De este modo, es previsible dicho lugar para la víctima, de un lado y, de otro, obliga al autor del daño a adecuar su comportamiento a los entornos sociales en los que actúa o a los que se dirige (Fuentes, 2007, p. 347).

Ahora bien, este mismo criterio se critica, porque los actores que participan en el mercado financiero no pueden prever los estándares de conducta que le pueden ser exigibles de acuerdo con el lugar de producción del daño, que desconocen previamente (Lehman, 2012, p. 494). De otro lado, los casos que se están planteando con mayor frecuencia en el momento actual son los relacionados con la responsabilidad civil por daños económicos que derivan de la falta o insuficiente información proporcionada por el folleto elaborado por el emisor de valores negociables, al no ser suficiente para participar en el mercado de valores en condiciones de igualdad (Corneloupe, 2001, p. 63 y ss).
Por último, Reglamento Roma II recoge en el art. 17 el canon que se ha de apreciar para valorar la conducta de la persona a la que se imputa la responsabilidad, pues han de tomarse en cuenta, como una cuestión de hecho y en la medida en que sea procedente, las normas de seguridad y comportamiento vigentes en el lugar y momento del hecho que da lugar a la responsabilidad.

Ahora bien, la doctrina se indica los problemas que presenta el Reglamento Roma II cuando se trata de dar respuesta a los ilícitos financieros que ocasionan un daño y de los que, por ello, deriva responsabilidad civil, que, además, han sido agravados tras su entrada en vigor, a pesar de que se habían anticipado estas cuestiones (Lehman, 2012a, p. 485 y ss; 2012b, p. 399 y ss). Y, en concreto, no permite la regla "*regulation through litigation*", que se emplea en EEUU para organizar el funcionamiento del mercado de valores, pues dos ordenamientos distintos regulan cuestiones íntimamente relacionadas, como son el hecho de que las normas de

conducta se regulen por un ordenamiento (art. 17), pero el ordenamiento del lugar del daño determine la responsabilidad que corresponde (art. 4) a falta de elección de ley (Lehman, 2012a, p. 486).

Por ello, el Estado que impone su Derecho financiero y que regula la conducta no puede indicar su aplicación cuando se produce su infracción, sino que ha de confiar en lo que diga otro ordenamiento (del lugar en el que se ha producido el daño). Y, por ello, la admisión a cotización del instrumento financiero se considera la piedra angular para la regulación de estos actos ilícitos (Lehman, 2012a, p. 508). Y, en especial, permite establecer un paralelismo entre el ordenamiento que regula el mercado (sus normas de actuación) con el mecanismo de la responsabilidad civil (Lehman, 2012a, p. 509), evitando un desdoblamiento de los estándares de conducta que han de cumplir los operadores financieros.

Ahora bien, si no se trata de un mercado regulado, se propone la aplicación de la ley del lugar de venta del instrumento financiero, siempre que sea previsible para la persona a la que se demanda por responsabilidad civil (Lehman, 2012a, p. 511), lo que puede tener especial trascendencia en el caso del uso de información privilegiada. En todo caso, el Consejo alemán para el Derecho internacional privado ha hecho una propuesta de modificación del Reglamento Roma II, para dar una respuesta a los ilícitos financieros (*Revue Critique de Droit international Privé,* 2012-3, pp. 679 y ss)

Consiste en incluir un nuevo art. 6 *bis* para el caso de los delitos financieros y, en tal caso, considerar aplicable la ley del mercado de cotización cuando se trate de un mercado regulado (Lehman, 2012a, p. 507). Y, en concreto, la cotización del instrumento financiero se considera la piedra angular para la regulación de los actos ilícitos que tengan lugar en el ámbito financiero (Lehman, 2012a, p. 508). Sin embargo, el ilícito de iniciados se configura de forma distinta, como se verá a continuación.

En todo caso, se destaca la *vis* atractiva que ejerce el mercado de valores para determinar la ley aplicable a la relación jurídica en cuestión, en especial, cuando se trata de operaciones con información privilegiada (Kiel, 1994, p. 264). Sin embargo, no ha de tratarse en todo caso de la ley del mercado de cotización, en la medida en que se trata de normas que –en primer lugar- prohíben la realización de este tipo de conductas, sino de la ley del mercado afectado por la conducta del *insider* (Kiel, 1994, p. 264). Cuestión distinta es que hayan de ser tomadas

en cuenta las normas anti-*insider trading* del citado mercado de cotización, como se indica a continuación.

Ahora bien, para aplicar este planteamiento tendría que considerarse que existe un daño a un particular. Esto es, que las normas de conducta que protegen la integridad del mercado tienen una finalidad de Derecho privado, que consiste también en la tutela del inversor (Martínez, 1995, p. 953 y ss). Por tanto, se trata de encontrar una respuesta satisfactoria a tales casos. Si la demanda se presenta en España, pero la conducta del iniciado ha tenido lugar en un mercado de valores que no es español y el instrumento financiero cotiza en dicho mercado, la autoridad española ha de considerar –con independencia del lugar del daño económico- que el mercado protegido es el mercado en el que cotiza el instrumento financiero.

Con este nuevo tinte de Derecho privado, permitiría que una autoridad española, por ejemplo, considerase la aplicación del ordenamiento del mercado de cotización a consecuencia de que otras personas realizaron operaciones con información privilegiada. Tema éste que presenta un enorme interés desde la perspectiva del DIPr. En tal caso, tales normas tienen la consideración de materiales imperativas de un Derecho extranjero (de contenido económico) y el sistema de DIPr ha de contar con un criterio de conexión especial que permita su aplicación. Para lo que ha de tomarse en cuenta la intensidad de la relación que presentan con dicho ordenamiento.

De otra parte, las normas de conducta relacionadas con el principio de transparencia, son imperativas o, mejor, internacionalmente imperativas y, por ello, se aplican con independencia de que se trate de una situación interna o internacional. Su vulneración tiene lugar cono tales, como normas imperativas de obligado cumplimiento y que también se aplican cuando se trata de un inversor extranjero o de un emisor extranjero. Se reparan de acuerdo con la ley del lugar en el que se ha negociado el instrumento financiero (el mercado concreto y su normativa). Y la tutela se hace contra quien no ha comunicado la información, etc. Que son, a su vez, las que tienen más relación con el principio de transparencia.

En segundo lugar, la autoridad extranjera ante la que se presente una demanda por responsabilidad civil, si el afectado ha sido el mercado español, ha de considerar que las normas de conducta anti-*insider trading* del ordenamiento español tienen carácter de normas

materiales imperativas (de terceros ordenamientos). Se trata éste de otro argumento que impide hablar de la aplicación extraterritorial del ordenamiento del mercado de valores.

Por todo ello, la autoridad judicial del foro aplicará la ley que indique el Reglamento Roma II, pero, en todo caso, las normas materiales imperativas del ordenamiento (extranjero) del mercado de cotización del instrumento financiero, para poder determinar la responsabilidad del iniciado. Se supera así el planeamiento que está en la base del art. 17 del Reglamento Roma II, que consiste en considerar como una circunstancia de hecho las normas de seguridad y de conducta vigentes en el lugar y el momento del hecho que da lugar a la responsabilidad. Por último, no sólo se aplican las normas de conducta sino también las sanciones que conlleva su infracción, ajustando la indemnización final, si fuese necesario.

Bibliografía

Baltic, C. V. (1991). The next step in insider trading regulation: International Cooperative Efforts in the Global Securities market. Law and Policy in International Business, 23, 184-203.

Berger, N., Altemir Mergelia, M. (2001). Un nouveau système de régulation communautaire des marchés de valeurs mobilières dans l'Union européenne. Revue du Marché commun et de l'Union Européenne, 451, 529-540.

Bergmans, B. (1991). Inside Information and Securities Trading. A legal and economic analysis of the Foundations of Liability in the USA and European Community. London: Graham & Trotman.

Binmore, K. (2009). La teoría de juegos. Una breve introducción. Madrid: Alianza Ed.

Calvo-Caravaca, A.-L., Carrascosa González, J. (2014). Los daños financieros transfronterizos. Revista de Derecho Mercantil, 292, 53-70.

Corneloupe, S. (2001). Roma II y el Derecho de los mercados financieros: el ejemplo de los daños causados por la violación de las obligaciones de información. Anuario Español de Derecho internacional privado, vol. XI, 63-80.

Einsele, D. (2012). Kapitalmarktrechtliche Eingriffnormen-Bedarf die Rom I-Verordnung einer Sonderregel für harmonisiertes europäishes Recht? Praxis des Internationalen Privat- und Verfahrensrechts, 6, 481-500.

Fuentes Mañas, B. (2007). La regla *lex loci delicti commissi* y normas localizadoras especiales en el Reglamento Roma II. Anuario Español de Derecho internacional privado, 347-360.

Fuertes, M. (2004). Territorialidad e irretroactividad del Derecho sancionador del mercado de valores (A propósito de la sentencia del Tribunal Supremo de 20 de junio de 2003). Revista de Derecho Bancario y Bursátil (vol. 94), 227-240.

Gautier, P.-Y. (1989). Sur la localisation de certaines infractions économiques. Revue Critique de Droit International Privé, vol. 78, nº 4, 673-680.

Garcimartín Alférez, F. J. (2007). Un apunte sobre la llamada regla general en el Reglamento Roma II, Anuario Español de Derecho Internacional privado, 241-260.

Garcimartín Alférez, F. J. (2007b). Cross-border listed companies. Recueil des Cours de l'Académie de Droit international, 328, 74 y ss.

Hernández Sainz, E. (2007). El abuso de información privilegiada en los mercados de valores, Madrid: Cívitas.

Janin, S. (2002). Une Directive sur les opérations d'initiés et les manipulations de marché (abus de marché). Étape décisive pour le renforcement de l'intégrité des marchés financiers européens, Revue du Marché commun et de l'Union Européenne (461), 514-525

Kiel, P (1994). Internationales Kapitalangelegerschtzrecht. Zum Anwendungsbereich Kapital angelegerschützender Normen in deutschen europäishen und US-amerikanishen Recht, Berlín y Nueva York.

Lehman, M. (2011). Where does economic loss occur? Journal of Private International Law, 7 (3), 531-545.

Lehman, M. (2012a). Proposition d'une règle spéciale dans le Règlement Rome II pour les délits financiers. Revue Critique de Droit International Privé, 494-521.

Lehman M. (2012b). Vorschlag für eine Reform der Rom II-Verordnung im Bereich der Finanzmarktdelikte. Praxis des Internationalen Privat- und Verfahrensrechts, 399-421.

Leible, S. (2007). El alcance de la autonomía de la voluntad en la determinación de la ley aplicable a las obligaciones no contractuales en el Reglamento Roma II. Anuario Español de Derecho Internacional privado., 219-230

Lein, E. (2008). The New Rome I/Rome II/Brussels Synergies. Yearbook of Private International Law, 177-190.

Martínez Flórez, A. (1995), En torno a la responsabilidad frente a los inversores de quien utiliza información privilegiada en los mercados de valores. Revista de Derecho Mercantil, 217, 953-975.

Muir Watt, H., (2005). Comentario a la STJCE, de 10 de junio de 2004 (as. C-168/02). Revue Critique de Droit international Privé, 94 (2), 326-350.

Solomon, L.D., Corso, L. (1991). The impact of technology on the trading of securities: the emerging global market and the implication for regulation, John Marshall Law Review, 24, 311-325.

Tapia Hermida, A. (2003). Derecho del mercado de valores (2ª ed), Barcelona: Cálamo.

Tenenbaum, A. (2012). Retombées de l'affaire Madoff sur la Convention de Lugano. La localisation du dommage financier. Revue Critique de Droit international Privé, 1, 45-65.

Van Houtte, J. (1996). The Law Applicable to securities transactions: choice of law issues. En: F. Oditah (Ed.), The future for the global securities market. Legal and regulatory aspects (78-94). Oxford: Clarendon Press.

Valenzuela Garach, F. (1993). La información en la sociedad anónima y el mercado de valores. Madrid: Cívitas.

Virgós Soriano, M. (1993). El comercio internacional en el nuevo Derecho español de la competencia desleal. Madrid: Cívitas.

Warren, M.G. (1991). The Regulation on Insider Trading in the European Community. Washington and Lee Law Review, 48 (3), 1037-1051.

Zunzunegui, F. (2005). Derecho del mercado financiero (3ª ed). Madrid: Marcial Pons.

CAPÍTULO XIX

Optimal Consumption and Portfolio Decisions when the Assets are Driven by a Time-Inhomogeneous Markov Modulated Process, and the Risky Asset also Follows Diffusion Process: CRRA Utility.

Benjamín Vallejo-Jiménez

Instituto Politécnico Nacional

Yazmín Viridiana Soriano-Morales

Instituto Politécnico Nacional

Francisco Venegas-Martínez

Instituto Politécnico Nacional

JEL Classification: C61, D81, D91, E13, G11, G12

Keywords: Markov modulated process, stochastic optimal control, utility maximization, and regime switching.

Abstract

This chapter improves the classical wealth allocation problem of a rational consumer under uncertain environments. We find closed-form solutions of the decision making problem for an infinitely-lived rational consumer that has a utility function with Constant Relative Risk Aversion (CRRA), when the assets are driven by a Time-Inhomogeneous Markov modulated process, and the risky asset also follows diffusion process. Additionally this research provides analytical solutions for a specific case of transition probabilities with tendency to stability.

1. Introduction

Since Merton (1971), the problem of an infinitely-lived rational consumer maximizing his/her total discounted utility has been widely studied. In this classic and pioneer work, Merton used diffusion process to model the dynamics of asset returns. This chapter brings another extension to the long list of extensions developed since then.

Recently, much of latest work in this extensions aims at modeling assets price by a Markov Modulated process, see for instance: Bäuerle and Rieder (2004) finding the optimal portfolio allocations when the stock price and volatility depend on an external time-homogeneous and finite Markov chain; Sotomayor and Cadenillas (2009) bringing explicit solutions for the optimal investment and consumption decisions, according to a specific Hyperbolic Absolute Risk Aversion (HARA) utility function, when asset prices are driven by a standard Brownian motion combined with a regime switching; and finally, Fei (2013) providing optimal consumption and portfolio allocation with inflation driven by a Markov-switching process.

To the extent of our knowledge, regime switching models were initially proposed by Hamilton (1989) to model stock return time series. Afterwards, Di Masi *et al*. (1994) brings the first known attempt to model volatility as a continuous-time Markov chain, improving the traditional models with deterministic parameters; however, this approach brought new difficulties, especially in the model proposed by Hamilton (1989), due to the additional source of uncertainty affecting the completeness of the market.

Approaches to consumption and portfolio optimal decisions for regime switching models considering partial information has also been broadly studied, for instance: Stockbridge (2002) bringing a linear programming formulation of the portfolio optimization problem; Zhang and Yin (2004) offering nearly optimal strategies in a financial market; finally, Sass and Haussmann (2004) solving numerically the problem of maximizing the investor's expected utility of terminal wealth under a finite time horizon.

This chapter extends Bäuerle and Rieder's (2004) research in finding analytical solutions for the case of total discounted Constant Relative Risk Aversion (CRRA) utility when the risky asset is driven by a drift modulated time-inhomogeneous finite Markov chain. The principal contribution of this work consists of providing closed-form solution when the assets are driven by a Time-Inhomogeneous Markov modulated process, and the risky asset also follows diffusion process.

Additionally this research provides analytical solutions for a specific case of transition probabilities with tendency to stability.

This chapter is organized as follows: in section 2, we setup the mathematical framework of the proposed model; in section 3, we provide the analytical solution of optimal consumption and asset allocation for the CRRA utility: through section 4, we study a specific case with transition probabilities with tendency to stability: in section 5, we present the conclusion and acknowledge limitations.

2. The Setup of the Model

We first state the problem of determining consumption and portfolio decisions that maximize the total discounted expected utility of an infinitely-lived rational consumer when the assets are driven by a Time-Inhomogeneous Markov modulated process, and the risky asset also follows diffusion process. The consumer has access to a bond and a risky asset. The randomness in the assets involve a filtered probability space $(\Omega,\mathscr{F},\mathsf{F}=\{\mathscr{F}_t,0\le t\le T\},P)$, *i.e.*, Ω is a sample space (R), $\mathscr{F}$ is a σ-algebra on Ω (the Borel σ-algebra $\mathrm{B}(\mathrm{R})$), P is a probability measure on $(\Omega,\mathscr{F})$ and $\mathscr{F}_t$ is a filtration containing all information of the market until time t. The bond price process b_t evolves according to

$$\frac{\mathrm{d}b_t}{b_t}=r_i\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

and the stock price process S_t is driven by a Markov modulated diffusion process

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\mu_i\mathrm{d}t+\sigma_i\,\mathrm{d}W_t \tag{2}$$

where $\mathrm{d}W_t\sim N(0,\mathrm{d}t)$ is a standard Brownian motion, (μ_i,σ_i) is a continuous-time Markov chain with finite state space E, and $Q=(q_{ij}(t))_{i,j\in E}$ is a matrix providing the time dependent transition probability under P with respect to F. In what follows, we suppose that $r_i,\mu_i,\sigma_i:E\to\mathrm{R}$ and $\sigma_i>r_i>0$ for all $i\in E$, allowing random jumps of the return rate μ_i and in the volatility σ_i.

From now on, we will denote by θ_t the proportion of wealth, in real terms, destined for stock at time t. The process θ_t is called portfolio strategy. A portfolio strategy is called admissible whenever $\int_0^T \theta_s^2 \, \mathrm{d}s < \infty$ almost surely. Let us denote by a_t the real wealth process under the self-financing assumption, therefore

$$\mathrm{d}a_t = a_t(1-\theta_t)\frac{\mathrm{d}b_t}{b_t} + a_t\theta_t\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - c_t\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

with $a_0 > 0$. Consider a consumer-investor that has a strictly concave and increasing utility function $u:[0,\infty)\to\mathrm{R}$.. The individual has a subjective discount rate, r, and wishes to maximize his/her total expected discount utility given by

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}\,\mathrm{d}t \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{4}$$

subject to the following consolidated budget constraint

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left(r_i + \theta_t(\mu_i - r_i) - \frac{c_t}{a_t}\right)\mathrm{d}t + a_t\theta_t\sigma_i\,\mathrm{d}W_t \quad . \tag{5}$$

In order to use the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) approach, we define, as usual, the value function

$$J(a_t,t,i) = \max_{c_s|_{s\in[t,\infty)}} \mathrm{E}\left[\int_t^\infty u(c_s)e^{-\rho s}\,\mathrm{d}s\right]. \tag{6}$$

Then,

$$J(a_t,t,i) = \max_{c_s|_{s\in[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left[u(c_t)e^{-\rho t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}J(a_t,t,i) + J(a_t,t,i) + \mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right] \tag{7}$$

On the other hand, if we rewrite the budget constraint as

$$\mathrm{d}a_t = a_t\mu_a\,\mathrm{d}t + a_t\sigma_a\mathrm{d}W_t \tag{8}$$

where

$$\mu_a = r + \theta_t(\mu_i - r_i) - \frac{c_t}{a_t} \text{ and } \sigma_a = \theta_t\sigma_i\,. \tag{9}$$

Then, Itô's lemma for Markov chain modulated diffusion process with (8) as a the underlying process leads to[1]

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c_s|_{s\in[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Big\{ & \; u(c_t)e^{-\rho t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}(\mathrm{d}t) + \frac{\partial J(a_t,t,i)}{\partial a_t} a_t \sigma_a \,\mathrm{d}W_t \\
& + \left(\frac{\partial J(a_t,t,i)}{\partial t} + \frac{\partial J(a_t,t,i)}{\partial a_t} a_t \mu_a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(a_t,t,i)}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \sigma_a^2 \right) \mathrm{d}t \\
& + \left(\sum_{j\in E} q_{ij}(t) \left[J\left(a_t,t,j\right) - J\left(a_t,t,i\right) \right] \right) \mathrm{d}t \quad \Big\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

If c_t and θ_t are both optimal, then

$$
\begin{aligned}
0 = {} & u(c_t)e^{-\rho t} + \frac{\partial J(a_t,t,i)}{\partial t} + \frac{\partial J(a_t,t,i)}{\partial a_t} a_t \left(r_i + \theta_t(\mu_i - r_i) - \frac{c_t}{a_t} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J(a_t,t,i)}{\partial {a_t}^2} {a_t}^2 \theta_t^2 \sigma_i^2 \\
& + \sum_{j\in E} q_{ij}(t) \left[J\left(a_t,t,j\right) - J\left(a_t,t,i\right) \right].
\end{aligned}
\tag{11}
$$

A suitable candidate that meets the previously established condition is given by

$$
S\left(a_t,t,i\right) = [u(a_t)g(t,i)]\, e^{-\rho t}. \tag{12}
$$

Indeed, by substituting (12) in (11), we have

$$
\begin{aligned}
0 = {} & u(c_t) - \rho u(a_t) g(t,i) + u(a_t) \frac{\partial g(t,i)}{\partial t} + u'(a_t) g(t,i) a_t \left(r_i + \theta_t(\mu_i - r_i) - \frac{c_t}{a_t} \right) \\
& + \frac{1}{2} u''(a_t) g(t,i) {a_t}^2 \theta_t^2 \sigma_i^2 + u(a_t) \sum_{j\in E} q_{ij}(t) \left[g\left(t,j\right) - g\left(t,i\right) \right].
\end{aligned}
\tag{13}
$$

After differentiating the above expression with respect to c_t and θ_t, respectively, we obtain

$$
u'(c_t) = u'(a_t) g(t,i), \qquad \theta_t = \frac{(\mu_i - r_i)/\sigma_i^2}{-[u''(a_t)a_t / u'(a_t)]}, \tag{14}
$$

Equation (14) is the risk premium adjusted by volatility in the state i, and $-u''(a_t)a_t / u'(a_t)$ is the relative risk aversion degree (being this the elasticity of the marginal utility of wealth, which is related to the Arrow-Pratt measure).

[1] See, for instance, Venegas-Martínez (2008).

3. Analytic Solution for Logarithmic Utility

The present section is focused in finding an analytical solution of the optimal asset allocation problem with logarithmic utility, $u(c)=\frac{c^{\gamma}}{\gamma}$. First, we characterize optimal decisions. Note that necessary conditions for a maximum lead to

$$c_t = \left(g(t,i)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} a_t \tag{15}$$

and

$$\theta_t = \frac{\mu_i - r_i}{(1-\gamma)\sigma_i^2}. \tag{16}$$

We observe that θ_t does not depend on t, it just depends on the state i, thus it is convenient to change notation to $\theta_i = \frac{\mu_i - r_i}{(1-\gamma)\sigma_i^2}$. By substituting (15) in (13), we have

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} a_t^{\gamma}}{\gamma} - \rho\frac{a_t^{\gamma}}{\gamma} g(t,i) + \frac{a_t^{\gamma}}{\gamma}\frac{\partial g(t,i)}{\partial t} + \gamma\frac{a_t^{\gamma-1}}{\gamma} g(t,i) a_t \left(r_i + \theta_t(\mu_i - r_i) - \left(g(t,i)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) \\ & + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\frac{a_t^{\gamma-2}}{\gamma} g(t,i) a_t{}^2 \theta_t^2 \sigma_i^2 + \frac{a_t^{\gamma}}{\gamma}\sum_{j\in E} q_{ij}(t)\left[g(t,j) - g(t,i) \right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Reducing and simplifying we have

$$\begin{aligned} 0 = {} & \left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - \rho\, g(t,i) + \frac{\partial g(t,i)}{\partial t} + \gamma g(t,i)\left(r_i + \theta_t(\mu_i - r_i) - \left(g(t,i)\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) \\ & + \frac{1}{2}\gamma(\gamma-1) g(t,i)\theta_t^2\sigma_i^2 + \sum_{j\in E} q_{ij}(t)\left[g(t,j) - g(t,i) \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

By substituting (16) in (18), we have

$$\begin{aligned} 0 = {} & -\rho\, g(t,i) + \frac{\partial g(t,i)}{\partial t} + \gamma g(t,i)\left(r_i + \frac{1}{2}\frac{(\mu_i - r_i)^2}{(1-\gamma)\sigma_i^2} \right) + (1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ & + \sum_{j\in E} q_{ij}(t)\left[g(t,j) - g(t,i) \right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Rearranging it in a convenient way, we have

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t} + \left[\gamma\left(r_i + \frac{(\mu_i - r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2} \right) - \rho \right] g(t,j) + (1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \sum_{j\in E} q_{ij}(t)\left[g(t,j) - g(t,i) \right]. \tag{20}$$

In order to solve (20), we propose as a candidate

$$g(t,i)=\int_t^{\infty}\left[(1-\gamma)\left(g(s,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}q_{ij}(s)\left[g(s,j)-g(s,i)\right]\right]e^{\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right](s-t)}\mathrm{d}s \quad (21)$$

where $q_{ij}(t)$ and $g(t,i)$ are integrable on t for every interval contained in $[0,\infty)$. The partial derivative of (21) with respect to t leads to

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t}=-\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right]\left(\int_t^{\infty}\left[(1-\gamma)\left(g(s,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}q_{ij}(s)\left[g(s,j)-g(s,i)\right]\right]e^{\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right](s-t)}\mathrm{d}s\right) \quad (22)$$

$$-\left[(1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}q_{ij}(t)\left[g(t,j)-g(t,i)\right]\right].$$

By substituting $g(t,i)$ in the above expression, we have

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t}=-\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right]g(t,j)-\left[(1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}q_{ij}(t)\left[g(t,j)-g(t,i)\right]\right]. \quad (23)$$

Now, it is clear that

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t}+\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right]g(t,j)+(1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}q_{ij}(t)\left[g(t,j)-g(t,i)\right]. \quad (24)$$

Hence, the proposed function fulfills the conditions to solve analytically the stated decision making problem.

4. Case: Transition probability with tendency to stability

In this section, we present a specific case of a time-dependent Markov chain with transition probabilities with tendency to stability. In particular, consider a two-state set E with transition probabilities defined by

$$q_{11}(t)=1-e^{-f_1(t)},\ q_{12}(t)=e^{-f_1(t)},\ q_{21}(t)=e^{-f_2(t)} \text{ and } q_{22}(t)=1-e^{-f_2(t)} \quad (25)$$

with $f_i(t)>0, f_i'(t)>0, f_i''(t)\geq 0, t\geq T, i=1,2.$ In this case, the transition probabilities are stabilized at rate $f_i'(t)$ as time evolves. As t tends to infinity, the probability of maintaining the state where it is tends to 1. In this case, the proposed $g(t,i)$ is given by

$$g(t,i)=\int_t^{\infty}\left[(1-\gamma)\left(g(s,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}e^{-f_i(s)}\left[g(s,j)-g(s,i)\right]\right]e^{\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right](s-t)}\mathrm{d}s \quad (26)$$

The partial derivative of (26) with respect to t leads to

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t}=-\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right]\left(\int_t^{\infty}\left[(1-\gamma)\left(g(s,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}e^{-f_i(s)}\left[g(s,j)-g(s,i)\right]\right]e^{-\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right](s-t)}\,\mathrm{d}s\right) \quad (27)$$

$$-\left[(1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}e^{-f_i(s)}\left[g(t,j)-g(t,i)\right]\right].$$

By substituting $g(t,i)$ in (27), produces

$$\frac{\partial g(t,i)}{\partial t}+\left[\gamma\left(r_i+\frac{(\mu_i-r_i)^2}{2(1-\gamma)\sigma_i^2}\right)-\rho\right]g(t,j)+\left[(1-\gamma)\left(g(t,i)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}+\sum_{j\in E}e^{-f_i(s)}\left[g(t,j)-g(t,i)\right]\right]=0. \quad (28)$$

Hence, the proposed candidate fulfills all the required conditions to solve the analytically the stated problem.

5. Conclusions

This chapter provides analytical solution for the optimal asset allocation problem defined by an infinitely-lived rational consumer with CRRA utility, assuming that both (the risky and the not risky asset) assets are driven by a Time-Inhomogeneous Markov modulated process, and the risky asset also follows diffusion process. This work also provided closed-form solutions of the optimal consumption and asset allocation of bonds and risky asset holdings at any time. Additionally, we provide a particular case of transition probabilities with tendency to stability.

References

Bäuerle, N. and Rieder U. (2004). Portfolio optimization with Markov-modulated stock prices and interest rates, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**(3), pp. 442-447.

Di Masi, G. B., Kabanov Y. M. and Runggaldier W. J. (1994). Mean-Variance Hedging Of Options on Stocks with Markov Volatilities, *Theory of Probability & Its Applications*, **39**(1), pp. 211-222.

Fei, W. Y. (2013). Optimal consumption and portfolio under inflation and Markovian switching, *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, **85**(2), pp. 272-285.

Hamilton, J. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle, *Econometrica*, **57**(2), pp. 357–384.

Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, *Journal of Economic Theory*, Elsevier, **3**(4), pp. 373-413.

Sass, J., and Haussmann U. G. (2004). Optimizing the Terminal Wealth under Partial Information: The Drift Process as a Continuous Time Markov Chain, *Finance and Stochastics*, **8**(4), pp. 553–577.

Sotomayor, L. R. and Cadenillas A. (2009). Explicit Solutions of Consumption-Investment Problems in Financial Markets with Regime Switching, *Mathematical Finance*, **19**(2), pp. 251–279.

Stockbridge, R. (2002). Portfolio Optimization in Markets Having Stochastic Rates, *Lecture Notes in Control and Information Sciences: Stochastic Theory and Control*, **280**, pp. 447–458.

Venegas-Martínez, F. (2008). Riesgos financieros y económicos: productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. 2da. edición, Cengage, México.

Zhang, Q. and Yin G. (2004). Nearly-optimal Asset Allocation in Hybrid Stock Investment Models, *Journal of Optimization theory and Applications*, **121**(2), pp. 419-444.

CAPÍTULO XX

El criterio de optimalidad de Kelly. Selección de portafolios y consideración altos momentos.

John Freddy Moreno Trujillo.

Universidad Externado de Colombia.

Resumen:

Se presenta el criterio de optimalidad desarrollado por John Kelly (Critero de Kelly) que permite determinar la fracción óptima a invertir bajo determinadas condiciones. Se presenta el concepto para un juego simple, un juego con pérdidas catastróficas, múltiples opciones de inversión con uno y más ganadores. Se propone además una extensión del caso general para la consideración en el criterio de los primeros cuatros momentos de la variable que describe el resultado de la inversión.

Palabras clave:

Optimización, Criterio de Kelly, Altos momentos

Clasificación JEL: C02, C18, C61.

1. El criterio de Kelly.

Una de las principales preocupaciones de los inversionistas de los mercados actuales, si no la mayor de todas, es conseguir la mayor rentabilidad posible de sus inversiones, no siempre atendiendo a que esta rentabilidad se tenga bajo parámetros de menor riesgo. Matemáticamente hablando, las inversiones que buscan estos agentes son aquellas de valor esperado positivo, lo que desde luego no las hace exentas de presentar resultados negativos.

Consideremos un inversionista con un capital X, el cual coloca todo su dinero en una inversión A. Aun cuando se asuma que esta inversión tiene una probabilidad muy pequeña de presentar una pérdida total, el inversionista sabe que existe la posibilidad de perder todo su dinero. Esta

situación hace natural la pregunta: ¿cuánto del total del capital debería invertir en A?, ¿cuál debería ser el criterio de decisión?

Un criterio aplicable a esta situación fue desarrollado por John Larry Kelly Jr., quien en 1956, mientras trabaja en laboratorios Bell, publica el artículo titulado: *A New Interpretation of Information Rate*, en el *Bell System Technical Journal*. La teoría presentada en el trabajo de Kelly sobre ruidos en canales de comunicación, se puede extender para considerar el problema de decidir cuánto dinero invertir en un resultado riesgoso de valor esperado positivo.

Este criterio aplica a inversiones de horizonte finito y que pueden ser repetidas indefinidamente (un ejemplo de esta situación se puede ver en los agentes que negocian derivados, en los mercados financieros del mundo). Para exponer el criterio, a continuación se presenta su aplicación en el contexto de un juego simple, para luego considerar extensiones a situaciones más generales.

2. Un juego simple

Consideremos un agente que se enfrenta a un juego en el cual puede ganar con probabilidad q y perder con probabilidad $1-q$. Dado que la tasa de ganancia por cada unidad monetaria apostada es λ y que la riqueza inicial del agente es X_0, *¿Qué fracción de la riqueza total debería apostar el agente en una serie sucesiva de apuestas en este juego?*

De acuerdo con la notación considerada, el valor esperado de la ganancia del juego, por cada unidad monetaria apostada es:

$$E[Ganancia] = \lambda q - (1-q) \qquad (1)$$

y denotando por γ a la fracción fija de la riqueza que el agente apuesta en cada ronda del juego, los posibles valores de su riqueza son:

$$X_1 = \begin{cases} X_0 + \lambda\gamma X_0 = X_0(1+\lambda\gamma) \\ X_0 - \gamma X_0 = X_0(1-\gamma) \end{cases} \qquad (2)$$

el primer resultado si gana y el segundo si pierde. Si repite la apuesta en la misma proporción γ sobre la riqueza X_1, los posibles valores de la riqueza después de la segunda ronda del juego son:

$$X_2 = \begin{cases} X_1 + \lambda\gamma X_1 = X_1(1+\lambda\gamma) \\ X_1 - \gamma X_1 = X_1(1-\gamma) \end{cases} \qquad (3)$$

donde, $X_1(1+\lambda\gamma) = \begin{cases} X_0(1+\lambda\gamma)^2 \\ X_0(1-\gamma)(1+\lambda\gamma) \end{cases}$, o, $X_1(1-\gamma) = \begin{cases} X_0(1+\lambda\gamma)(1-\gamma) \\ X_0(1-\gamma)^2 \end{cases}$

dependiendo de los resultados que se tengan de las apuesta previas. De forma general, después de N apuestas, la riqueza del agente estará determinada por el producto:

$$X_N = X_0(1+\lambda\gamma)^W(1-\gamma)^L \qquad (4)$$

donde W es el número de veces que gana en los N juegos y L el número de veces que pierde.

La tasa de crecimiento de la riqueza del agente después de N jugadas, C_N , cumple la ecuación $X_N = X_0 e^{NC_N}$, de donde:

$$C_N = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X_N}{X_0}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X_0(1+\lambda\gamma)^W(1-\gamma)^L}{X_0}\right) = \frac{W}{N}ln(1+\lambda\gamma) + \frac{L}{N}ln(1-\gamma) \qquad (5)$$

La aleatoriedad de W y L hacen que C_N también sea aleatoria, y al aumentar indefinidamente el valor de N, los cocientes $\frac{W}{N}$ y $\frac{L}{N}$ convergen a la probabilidad de ganar (q) y a la de perder $(1-q)$ respectivamente. En el límite, la tasa de crecimiento esperada de la riqueza es:

$$C = q\ ln(1+\lambda\gamma) + (1-q)\ ln(1-\gamma) \qquad (6)$$

En la propuesta de Kelly, se busca maximizar esta tasa de crecimiento esperado respecto a κ. Derivando e igualando a cero se tiene:

$$\frac{dC}{d\gamma} = \frac{q\lambda}{1+\lambda\gamma} - \frac{(1-q)}{1-\gamma} = \frac{q\lambda(1-\gamma) - (1-q)(1+\lambda\gamma)}{(1+\lambda\gamma)(1-\gamma)} = 0$$

cuya solución es:

$$\gamma = \frac{\lambda q - (1-q)}{\lambda} = \frac{E[Ganancia]}{\lambda} \qquad (7)$$

que es la ***formula de Kelly***. La tasa de crecimiento esperada máxima de la riqueza del agente es:

$$C = q\ln[q(1+\lambda)] + (1-q)\ln\left[\frac{(1-q)}{\lambda}(1+\lambda)\right] \quad (8)$$

Como ejemplo consideremos una inversión en la cual se tiene una probabilidad de ganar $q = 60\%$, con una tasa de ganancia $\lambda = 80\%$ por inversión. De esta forma:

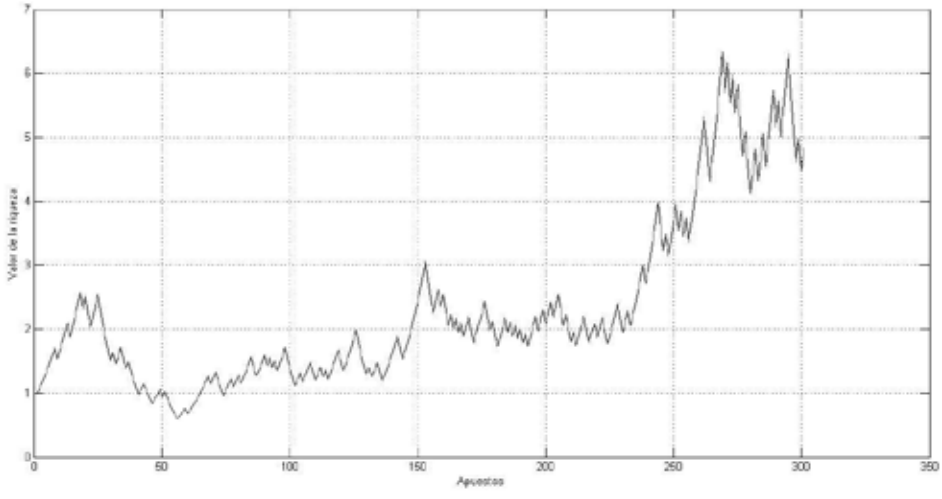
$$E[Ganancia] = (0{,}8)(0{,}6) - (0{,}4) = 0{,}08$$

Por la aplicación de la formula (9) se tiene que:

$$\gamma = \frac{(0{,}8)(0{,}6) - (0{,}4)}{0{,}8} = 0{,}1$$

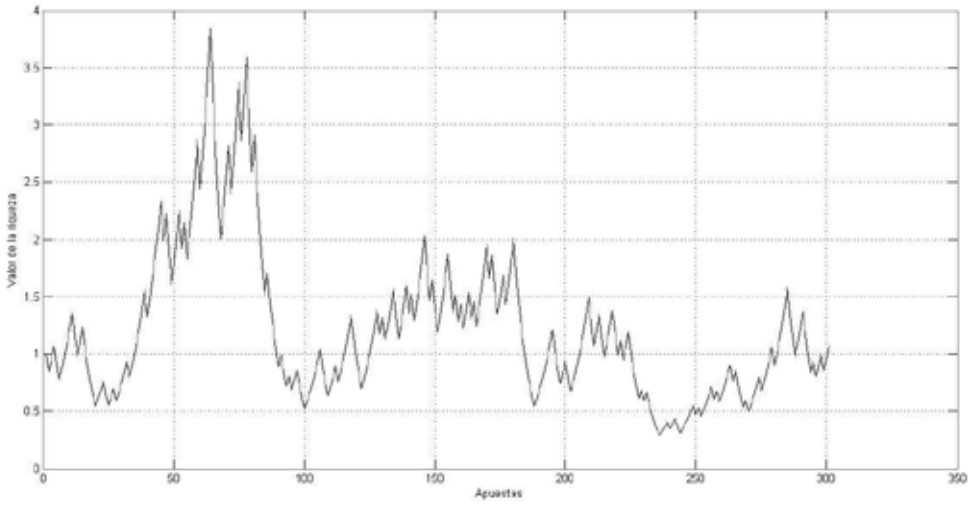
En la figura 1. se puede apreciar una simulación (considerando 300 apuestas) para el comportamiento de la riqueza de un agente enfrentado a la inversión anterior (con riqueza inicial de 1), dado que éste sigue la estrategia de apostar en cada ronda γ =0,1 de su riqueza.

Figura 1



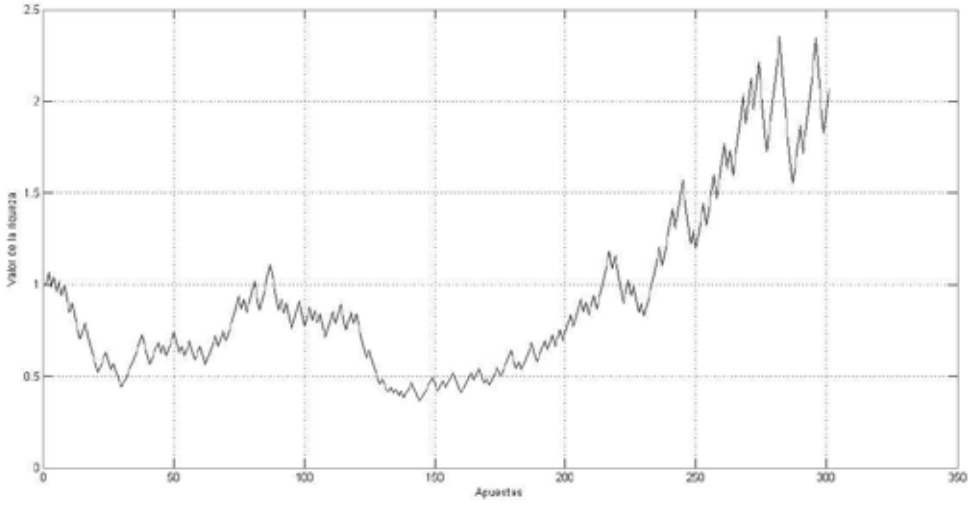
La figura 2 muestra una simulación de la riqueza del agente en las mismas condiciones de la situación anterior, pero ahora la fracción invertida de la riqueza en cada apuesta es de $f = 0{,}15$.

Figura 2



Por último en la figura 3 se muestra una simulación de la riqueza con $f = 0{,}08$.

Figura 3



De estas gráficas podemos apreciar que si bien la aplicación del criterio lleva a valores mayores de la riqueza del agente a medida que aumenta el número de juagadas (en el largo plazo), también resulta en una trayectoria de mayor volatilidad para este proceso.

3. Un juego con pérdida catastrófica

Consideremos ahora la situación en la cual la inversión puede presentar ganancias o pérdidas, pero un porcentaje de las potenciales pérdidas son consideradas como catastróficas por elevado valor. Siendo de nuevo λ la tasa de ganancia por unidad invertida, y denotando con μ a la cantidad pérdida por unidad invertida en caso de presentarse una pérdida catastrófica, se tiene que la riqueza del jugador después de N juegos es:

$$X_N = X_0(1+\lambda\gamma)^W(1-\gamma)^L(1-\mu\gamma)^D \qquad (9)$$

donde γ denota la fracción de la riqueza invertida en cada apuesta, W el número de veces que gana, L el número de veces que pierde y D el número de veces que se presenten pérdidas catastróficas en los N juegos.

En el límite, la tasa de ganancia esperada de la riqueza es:

$$C = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\left(\frac{X_N}{X_0}\right) = q_1 ln(1+\lambda\gamma) + q_2\, ln(1-\gamma) + q_3 ln(1-\mu\gamma) \qquad (10)$$

donde, q_1 es la probabilidad de ganar, $q_2$la probabilidad de tener un pérdida *estándar* y q_3 la probabilidad de tener una pérdida catastrófica. La maximización de esta cantidad respecto a la fracción invertida κ está determinada por la solución de la ecuación:

$$\frac{dC}{d\kappa} = \frac{q_1\lambda}{1+\lambda\gamma} - \frac{q_2}{1-\gamma} - \frac{q_3\mu}{1-\mu\gamma} = 0$$

que lleva a una ecuación cuadrática en la variable γ.

$$a\gamma^2 + b\gamma + c = 0$$

con:

$$a = \lambda\mu \;\; ; \;\; b = -q_1(\mu\lambda+\lambda) + q_2(\mu-\lambda) + q_3(\mu-\mu\lambda) \;\; ; \;\; c = q_1\lambda - q_2 - q_3\mu$$

y considerando que $\sum_i q_i = 1$. Así la fracción óptima a apostar (Fracción de Kelly) está determinada por la solución de esta ecuación, recordando que κ es una valor real no negativo.

4. Distribución óptima de capital con solo un ganador

En las secciones anteriores se consideró que el agente estaba enfrentado a una única inversión con diferentes posibles resultados. Ahora, consideramos el caso en el cual el agente se enfrenta a múltiples posibilidades de inversión, de las cuales solo una resulta en ganancia, mientras que la totalidad de lo invertido en las restantes se pierde.

Un ejemplo de este tipo de situación es la negociación con opciones sobre acciones de compañías competidoras de un mismo sector de la economía. Considerando que la inversión en la prima de la opción pactada sobre acciones de la empresa ganadora del sector es la que genera ganancias mientras que las otras no.

Consideremos el caso articular en el cual hay dos posibilidades de inversión A y B, y denotemos por γ_A a la fracción de la riqueza invertida en A y por γ_B a la fracción de la riqueza invertida en B. Denotamos también por α_i al pago total que se recibe por cada unidad monetaria colocada en la inversión i, es decir, $\alpha_i = 1 + \lambda_i$ donde λ_i es la tasa de ganancia de la inversión ($i = A, B$).

Si consideramos que la riqueza inicial del agente es $X_0 = 1$, y que este mantiene siempre en su poder una cantidad κ que le garantice el nunca caer en bancarrota. Se tiene entonces que,

$$X_0 = \kappa + \gamma_A + \gamma_B = 1 \qquad (11)$$

Siguiendo el esquema desarrollado en las secciones anteriores, si después de una primer ronda de inversión el resultado es que A produce ganancia (A gana), entonces la riqueza del agente es $X_1 = (\kappa + \alpha_A\gamma_A)X_0$, mientras que si la ganancia realizada es por la inversión B, entonces, $X_1 = (\kappa + \alpha_B\gamma_B)X_0$. De esta forma, el valor de la riqueza del inversionista después de N rondas de inversión es:

$$X_N = (\kappa + \alpha_A\gamma_A)^{N_A}(\kappa + \alpha_B\gamma_B)^{N_B}X_0 \qquad (12)$$

donde N_i es el número de veces que resulta ganadora la inversión i ($i = A, B$).

En el límite la tasa de crecimiento de la riqueza tiende a:

$$C = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \ln\left(\frac{X_N}{X_0}\right) = q_A ln(\kappa + \alpha_A \gamma_A) + q_B\, ln(\kappa + \alpha_B \gamma_B) \qquad (13)$$

donde q_A y q_B son las probabilidades de generar ganancia de cada una de las inversiones (claramente $q_A + q_B = 1$). El problema es entonces determinar las fracciones óptimas κ, γ_A y γ_B, sujetos a la restricción (11).

Antes de buscar la solución a este problema consideremos la cantidad:

$$\tau = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} \qquad (14)$$

Denotando por I_i al monto total de capital que los diferentes agentes del mercado invierten en la posibilidad i $(i = A, B)$, entonces $I = I_A + I_B$ es el monto total invertido, y el éxito de la inversión i genera un pago igual a $\alpha_i I_i$. Si este pago es igual al total recibido, es decir, $\alpha_i I_i = I$, entonces el valor de τ en la expresión (14) es igual a 1, lo que indica que el total del dinero invertido es devuelto al mercado (no hay comisiones, costos de transacción , tasas impositivas u otras pérdidas).

Si $\tau > 1$, la cantidad de dinero que se está devolviendo es menor que el total invertido, lo que quiere decir que se están incluyendo comisiones, costos de transacción u otro tipo de pérdidas. Si $\tau < 1$, se estaría creando dinero, particularmente producto de la rentabilidad de las acciones ejecutadas con la inversión inicial.

Retomando el problema (13), el Lagrangiano para esta situación es:

$$L(\kappa, \gamma_A, \gamma_B) = q_A ln(\kappa + \alpha_A \gamma_A) + q_B\, ln(\kappa + \alpha_B \gamma_B) - l(\kappa + \gamma_A + \gamma_B - 1) \qquad (15)$$

donde l es el multiplicador. Esto lleva al sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_A} = \frac{q_A \alpha_A}{\kappa + \alpha_A \gamma_A} - l = 0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_B} = \frac{q_B \alpha_B}{\kappa + \alpha_B \gamma_B} - l = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \kappa} = \frac{q_A}{\kappa + \alpha_A \gamma_A} + \frac{q_B}{\kappa + \alpha_B \gamma_B} - l = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = \kappa + \gamma_A + \gamma_B - 1 = 0 \quad (19)$$

Para el caso en el cual $\tau \leq 1$, la totalidad del dinero invertido, o más, está siendo devuelto, por lo que no hay razón para que los agentes conserven cantidades de dinero sin invertir ($\kappa = 0$), con lo cual las ecuaciones (16) a (19) implican que: $\gamma_A = q_A/l$, $\gamma_B = q_B/l$, y de esto se tiene que:

$$1 = \gamma_A + \gamma_B = \frac{(q_A + q_B)}{l} \quad \rightarrow \quad l = 1 \quad (20)$$

De lo anterior, la solución para este caso es: $\gamma_A = q_A$ y $\gamma_B = q_B$ con $\kappa = 0$.

Para el caso $\tau > 1$, la fracción que conserva cada agente debe ser positiva ($\kappa > 0$), para evitar la bancarrota, ya que los costos que están haciendo que no se devuelva todo el dinero al mercado pueden llegar a consumir la totalidad de su riqueza en inversiones sucesivas. Además, para que este caso se tenga, dado que el valor esperado de la ganancia por cada unidad monetaria invertida en la posibilidad i es $E[Ganancia\ i] = q_i \lambda_i - (1 - q_i) = q_i \alpha_i - 1$, una de las inversiones debe presentar mayores ventajas (recordemos que el criterio de Kelly solo es aplicable para el caso en el cual el valor esperado del rendimiento de la inversión es positivo), lo que indica que para esta *inversión ventajosa*,

$$\frac{q_i \alpha_i}{\kappa + \alpha_i \gamma_i} = 1 \quad (21)$$

maximiza la ganancia de la inversión, mientras que se espera que la fracción invertida en la otra posibilidad de inversión sea cero. De esta forma el problema de optimización reduce a la inversión ventajosa, dependiendo del valor a reservar por parte de cada agente.

5. El problema de distribución óptima con múltiples ganadores

Consideremos ahora la situación en la cual se tiene múltiples opciones de inversión y es factible que dos o más de ellas resulten ganadoras. De nuevo consideraremos el caso sencillo en el cual hay dos posibilidades de inversión A y B, las cuales pueden resultar ganadoras, perdedoras o dar alguna combinación de estos resultados. De nuevo asumiremos que para evitar el escenario de bancarrota el agente conserva una cantidad κ de su riqueza sin invertir.

La ecuación para la tasa esperada de crecimiento en este caso es de la forma:

$$C = q_A q_B ln(\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B) + q_A(1-q_B)ln(\kappa + \alpha_A\gamma_A) + q_B(1-q_A)ln(\kappa + \alpha_B\gamma_B) + (1-q_A)(1-q_B)\, ln(\kappa) \quad (22)$$

con la restricción $\kappa + \gamma_A + \gamma_B = 1$.

Plantando el Lagrangiano para el problema de maximizar el valor de C con la restricción, se tiene que:

$$L(\kappa, \gamma_A, \gamma_B) = q_A q_B ln(\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B) + q_A(1-q_B)ln(\kappa + \alpha_A\gamma_A) + q_B(1-q_A)ln(\kappa + \alpha_B\gamma_B) + (1-q_A)\,(1-q_B)\, ln(\kappa) - \quad l(\kappa + \gamma_A + \gamma_B - 1) \quad (23)$$

Con el multiplicador $l = 1$, se tienen las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_A} = \frac{q_A q_B \alpha_A}{\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B} + \frac{q_A(1-q_B)\alpha_A}{\kappa + \alpha_A\gamma_A} = 1 \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_B} = \frac{q_A q_B \alpha_B}{\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B} + \frac{q_B(1-q_A)\alpha_B}{\kappa + \alpha_B\gamma_B} = 1 \quad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \kappa} = \frac{q_A q_B}{\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B} + \frac{q_A(1-q_B)}{\kappa + \alpha_A\gamma_A} + \frac{q_B(1-q_A)}{\kappa + \alpha_B\gamma_B} + \frac{(1-q_A)(1-q_B)}{\kappa} = 1 \quad (26)$$

Denotando por $w = \frac{(1-q_A)(1-q_B)}{\kappa}$, $t = \frac{q_A q_B}{\kappa+\alpha_A\gamma_A+\alpha_B\gamma_B}$, $u = \frac{q_A(1-q_B)}{\kappa+\alpha_A\gamma_A}$ y $v = \frac{q_B(1-q_A)}{\kappa+\alpha_B\gamma_B}$, el sistema de ecuaciones descrito por las expresiones (24) a (26) puede ser visto como un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado, que resolvemos en términos de la variable w.

$$\begin{cases} t = w + \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B}\right) - 1 \\ u = 1 - \frac{1}{\alpha_B} - w \\ v = 1 - \frac{1}{\alpha_A} - w \end{cases} \quad (27)$$

de donde tenemos que:

$$\begin{cases} 2\kappa + \alpha_A\gamma_A + \alpha_B\gamma_B = \frac{q_A q_B}{w + \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B}\right) - 1} + \kappa \\ \kappa + \alpha_A\gamma_A = \frac{q_A(1-q_B)}{1 - \frac{1}{\alpha_B} - w} \\ \kappa + \alpha_B\gamma_B = \frac{q_B(1-q_A)}{1 - \frac{1}{\alpha_A} - w} \end{cases} \quad (28)$$

Sistema que nos lleva una única ecuación que se debe resolver para la variable w:

$$\frac{q_A q_B}{w + \left(\frac{1}{\alpha_A} + \frac{1}{\alpha_B}\right) - 1} + \frac{q_A(1-q_B)}{1 - \frac{1}{\alpha_B} - w} + \frac{q_B(1-q_A)}{1 - \frac{1}{\alpha_A} - w} + \frac{(1-q_A)(1-q_B)}{w} = 0 \quad (29)$$

6. Un planteamiento más general

Una extensión natural de lo que hasta punto se ha presentado sobre el criterio de Kelly, es la consideración de más de dos posibles resultados (ganar o perder), producto de la inversión. Se puede entonces considerar que el resultado de la inversión es descrito por una variable aleatoria X_i, donde el subíndice i indica la repetición de la inversión que se está considerando. Así la riqueza del agente, por cada unidad monetaria invertida, es descrita por:

$$1 + \gamma X_i \quad (30)$$

Siguiendo esta lógica, el valor dela riqueza del agente después de N inversiones, es:

$$\prod_{i=1}^{N}(1 + \gamma X_i) \quad (31)$$

La tasa de crecimiento es:

$$C = \frac{1}{N}\ln\left(\prod_{i=1}^{N}(1+\gamma X_i)\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(1+\gamma X_i) \quad (32)$$

y el valor esperado de la tasa de crecimiento:

$$E[C] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}[\ln(1+\gamma X_i)] \quad (33)$$

Para el cálculo del valor esperado, $\mathrm{E}[\ln(1+\gamma X_i)]$, la aproximación más utilizada en la literatura utiliza una aproximación de Taylor de segundo orden de la función $f(x) = \ln(1+x)$, alrededor del punto $x = 0$. Bajo esta aproximación, y asumiendo $x = \gamma X_i$, se tiene que,

$$\mathrm{E}[\ln(1+\gamma X_i)] \approx E\left[\gamma X_i - \frac{1}{2}\gamma^2 {X_i}^2\right] \quad (34)$$

De esta forma,

$$E[C] \approx \gamma E[X_i] - \frac{1}{2}\gamma^2 E[{X_i}^2] \quad (35)$$

y asumiendo que la media es pequeña pero que la desviación no, se tiene que $E\left[{X_i}^2\right] \approx \sigma_X^2$, de donde,

$$E[C] \approx \gamma\mu_X - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_X^2 \quad (36)$$

donde μ_X es la media del resultado de la inversión y σ_X^2 la varianza de este resultado. La maximización de esta expresión sobre la variable γ se tiene:

$$\frac{dE[C]}{d\gamma} = \mu_X - \gamma\sigma_X^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\mu_X}{\sigma_X^2} \quad (37)$$

Caso en el cual se tiene una tasa de crecimiento máxima esperada:

$$E[C] = \frac{\mu_X}{2\sigma_X^2} \quad (38)$$

Sobre esta aproximación es importante anotar que los supuestos sobre el valor esperado y la varianza son bastante restrictivos, y si bien es posible considerar situaciones en las cuales estos son razonables, también son muchas las situaciones de mercado en las cuales estos no se cumplen, y de forma particular se hace necesario la consideración de momento de orden mayor a dos de la variable.

Por ejemplo, existe abundante bibliografía sobre el comportamiento no gaussiano de las series de retornos asociadas a inversiones en el mercado (ver). El análisis de este tipo de comportamientos ha mostrado la importancia de considerar momentos de mayor orden en las variables que describen el comportamiento de los retornos.

En la siguiente sección se propone una mejora en la aproximación al optimo que genera la aplicación del criterio de Kelly, incluyendo hasta el cuarto momento dela variables que describe el resultado de la inversión.

7. Aproximación de mayor orden

Se propone considerar una aproximación de Taylor de orden 4 para la función $f(x) = \ln(1+x)$, alrededor del punto $x = 0$. En este caso se tiene que,

$$\mathrm{E}[\ln(1+\gamma X_i)] \approx E\left[\gamma X_i - \frac{1}{2}\gamma^2 {X_i}^2 + \frac{1}{3}\gamma^3 {X_i}^3 - \frac{1}{4}\gamma^4 {X_i}^4\right] \quad (39)$$

de forma que los elementos extra que se incorporan en la aproximación son indicadores del sesgo y la curtosis de la distribución asociada a los resultados de la inversión. De esta forma, denotando por S_X al sesgo de X_i y por K_X a la curtosis, tenemos que:

$$E[C] \approx \gamma\mu_X - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_X^2 + \frac{1}{3}\gamma^3 S_X - \frac{1}{4}\gamma^4 K_X \quad (40)$$

Maximizando esta expresión, de acuerdo con lo que establece el criterio, tenemos que:

$$\frac{dE[C]}{d\gamma} = \gamma^3 K_X + \gamma^2 S_X - \gamma\sigma_X^2 + \mu_X = 0 \quad (41)$$

y el polinomio de grado 3 en la variable γ puede ser resultado por medio de la *fórmula de Cardano*, reescribiendo el polinomio en forma normal como:

$$\gamma^3 + \gamma^2\left(\frac{S_X}{K_X}\right) - \gamma\left(\frac{\sigma_X^2}{K_X}\right) + \left(\frac{\mu_X}{K_X}\right) = 0 \qquad (42)$$

de donde,

$$\gamma = \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{\beta}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{\left(\frac{S_X}{K_X}\right)}{3} \qquad (43)$$

con,

$$\Delta = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{3}\right)^3 \quad ; \quad \beta = \frac{2\left(\frac{S_X}{K_X}\right)^3 - 9\left(\frac{S_X}{K_X}\right)\left(\frac{\sigma_X^2}{K_X}\right) + 27\left(\frac{\mu_X}{K_X}\right)}{27} \quad ; \quad \theta = \frac{3\left(\frac{\sigma_X^2}{K_X}\right) - \left(\frac{S_X}{K_X}\right)^2}{3} \qquad (44)$$

Realizando las consideraciones necesarias para que la expresión haga sentido. De esta forma se tiene una expresión que permite calcular la fracción óptima a invertir de acuerdo con el criterio de Kelly expuesto en las secciones anteriores, para el caso en el cual se tiene una posibilidad de inversión con retornó aleatorio descrito por la variable X_j .

8. Conclusiones y extensiones

Muchas y muy variadas son las críticas que se le han planteado al criterio de Kelly como mecanismo de optimización de selección y distribución de inversiones, lo que de ninguna manera demerita la elegancia y relativa simpleza de su argumento, pero desde luego se debe mencionar que si las condiciones que se requieren para su implementación no se tiene, puede ser un aselador de la pérdida de capital en lugar de cumplir con su real objetivo.

También está el elemento de la alta volatilidad en el comportamiento del proceso de riqueza en la medida en que aumenta el número de repeticiones de la inversión o apestas, situación a la cual se pretende realizar un aporte con este escrito, incorporando en el modelo momentos de más alto orden que permitan modelar, o por lo menos explicar estos comportamientos.

Desde luego se plantea como extensión al desarrollo expuesto en la sección anterior, la consideración del caso de múltiples posibles inversiones con uno o más ganadores, buscando establecer una expresión para la fracción a apostar en este caso.

Bibliografía

Chapman, S. J. (2006). The Kelly criterion for spread bets. *IMA journal of applied mathematics*.

Hakansson, N. H., & Ziemba, W. T. (1995). Capital growth theory. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, *9*, 65-86.

Kelly Jr, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Information Theory, IRE Transactions on*, *2*(3), 185-189.

Lv, Y., & Meister, B. K. (2009). Application of the Kelly criterion to Ornstein-Uhlenbeck processes. In *Complex Sciences* (pp. 1051-1062). Springer Berlin Heidelberg.

MacLean, L. C., Thorp, E. O., Zhao, Y., & Ziemba, W. T. (2011). How does the fortune's formula Kelly capital growth model perform? *Journal of Portfolio Management*, *37*(4), 96.

MacLean, L. C., Thorp, E. O., & Ziemba, W. T. (2011). *The Kelly capital growth investment criterion: Theory and practice* (Vol. 3). World scientific.

MacLean, L., Thorp, E., & Ziemba, W. (2010). Good and bad properties of the Kelly criterion. *Risk*, *20*(2), 1-11.

Piotrowski, E. W., & Schroeder, M. (2007). Kelly criterion revisited: optimal bets. *The European Physical Journal B*, *57*(2), 201-203.

Rotando, L. M., & Thorp, E. O. (1992). The Kelly criterion and the stock market. *American Mathematical Monthly*, 922-931. MacLean, L. C., Thorp, E. O., Zhao, Y., & Ziemba, W. T. (2011). How does the fortune's formula Kelly capital growth model perform?. *Journal of Portfolio Management*, *37*(4), 96.

Shonkwiler, R. W. (2013). *Finance with Monte Carlo*. Springer.

Thorp, E. O. (1971). Portfolio choice and the Kelly criterion. *Stochastic models in finance*, 599-619.

Thorp, E. O. (1998). The Kelly criterion in blackjack, sports betting, and the stock market. *Finding the Edge: Mathematical Analysis of Casino Games*, *1*(6).

CAPÍTULO XXI

Consumption, Leisure and Real Balances Optimal Decisions: A Rational Consumer Approach.

Yazmín Viridiana Soriano-Morales
Instituto Politécnico Nacional

Benjamín Vallejo-Jiménez
Instituto Politécnico Nacional

Francisco Venegas-Martínez
Instituto Politécnico Nacional

Abstract

This chapter is aimed at obtaining consumption, real balances, and leisure optimal decisions of an infinitely-lived risk-averse rational consumer. We assume that preferences belong to the family of Constant Relative Risk Aversion (CRRA) utility functions. We also find closed-form solutions of the decision making problem for the posed optimization problem. Finally, some comparative static experiments are carried out.

JEL Classification:
Keywords:

1. Introduction

This chapter obtaining consumption, real balances, and leisure optimal decisions of an infinitely-lived risk-averse rational consumer. We assume that preferences belong to the family of Constant Relative Risk Aversion (CRRA) utility functions.

In the literature, the most widely used utility function exhibits constant relative risk aversion (CRRA) that is the power or logarithmic utility function and still growing. For example Battermann, H., U. Broll and J. Wahl. (1997) derived a well-defined function and respect to CRRA for showing the equivalence relationship, Alvarez and Stokey (1998) and Kamihigashi (2001) with deterministic cases and Barro and Salas-i-Martin X. (1995) in the endogenous growth literature.

It is also argued in Dohmen, T., Falk A, Huffman D. and Sunde U., (2010), that there is a strong and significant inverse relationship between cognitive ability and risk aversion. Some of papers about the CRRA are: Boulier, J., Huang, S. and Taillard, G. (2001), Cairns, A., Blake, D. and Dowd, K. (2006), and Deelstra, G., Grasselli, M. and Koehl, P. (2003) among others.

More recently, regarding the issue of CRRA utility function, Moreno-Bromberg, S., Pirvu, T. and Réveillac, A. (2012) studied the problem of optimal investment with CRRA (constant, relative risk aversion) preferences, subject to dynamic risk constraints on trading strategies in continuous time and incomplete market. In Xie D. (2000) and Krause A. (2012) show that CRRA utility function is part of the power risk aversion (new class of utility function) and have a different curvature.

The aim of this chapter is to obtain a closed-form solutions of the decision making problem for the posed optimization problem. It is assumed the purchasing power parity (PPP) holds, perfect foresight and uncovered interest rate parity (UIP) relationship. And, subsequently, use some comparative static experiments are carried out.

The outline of the chapter is as follows: section 2 presents the characteristics of the economy; section 3 states the household's rational behavior; section 4 describes the firm's rational behavior and the labor market equilibrium; section 5 computes the household's economic welfare, and carry out comparative statics exercises on exogenous variables; finally, section 6 provides conclusions.

2. Characteristics of the economy

Consider an economy with the following characteristics. The economy has three sectors: consumers, firms and government. Consumers and firms are assumed to be identical, which leads

to representative individuals for each group that maximize their satisfaction. Consumer is also a producer.

Moreover, the economy produces and consumes a unique internationally traded good, which is, for the sake of simplicity, free of barriers to trade. It is also important to mention that firms share the same technology and their technology have constant returns to scale.

It is assumed the purchasing power parity (PPP) holds, $P_t = P_t^* E_t$, where P_t is the general price level of the domestic economy, P_t^* is the general price level of the foreign economy, and E_t is the nominal exchange rate. We can obtain the percentage instantaneous change terms of PPP which satisfied $\dot{P}_t / P_t = \pi$, $\dot{P}_t^* / P_t^* = \pi^*$ and $\dot{E}_t / E_t = \varepsilon$, where π is the inflation rate in the domestic economy, π^* is the inflation rate of the foreign economy, and ε is the actual rate of exchange depreciation, which under perfect foresight, it is also equals to the anticipated rate of exchange depreciation. Therefore, from the PPP relationship, it follows that

$$\pi = \pi^* + \varepsilon. \tag{1}$$

Moreover, under perfect foresight, the uncovered interest rate parity (UIP) relationship is given by

$$r = i - \pi \tag{2}$$

where r is the domestic real interest rate and i is the domestic nominal interest rate. It is consider a small economy, then it can be written $r = r^*$ where r^* stands for the foreign interest rate. It will be assumed that P_t^* is constant and equal to unity, that is, $P_t^* = 1$, this implies $\pi^* = 0$, therefore, we have $\pi = \varepsilon$. Hence, by substituting (1) into (2), it follows

$$r^* = i - \varepsilon. \tag{3}$$

3. Household's rational behavior

In this section, we show the characteristic of the representative household consumes. He/She has a basket formed by a continuum of differentiated goods, which are distributed according to a distribution $F(w)$, $w \in \Omega$.

$$c_t = \int_{\Omega} c_t(w)\mathrm{d}F(w). \tag{4}$$

where $c_t(w)$ is consumption of the type good, $w \in \Omega$. The consumer demands real monetary balances in the economy $m_t^d = M_t / P_t$ and hold bonds, $b_t = B_t / P_t$, issued by the domestic government, where M_t is the nominal stock of money held by the individual, B_t is the nominal price of the asset. The bonds pay the real interest rate r^*.

The consumer gets an income from labor given by wn_t^s where n_t^s is the number of hours that he/she allocates to work and w is real wage per unit of time. He is also a producer and he owns his firm gets a profit Π_t.

Thus the consumer's budget constraint is given by

$$\dot{m}_t^d + \dot{b}_t = r^* b_t - \pi m_t^d + w n_t^s - c_t + \Pi_t \tag{5}$$

The representative rational consumer wishes to maximize his/her total discounted utility from consumption, c_t, real monetary balances m_t, and leisure $l_t^d = 1 - n_t^s$; it is important to mention that the number of total available hours of the individual has been restricted to unity.

Thus, the agent wishes to maximize

$$\int_0^{\infty} u(c_t, m_t, l_t^d) e^{-\rho t} \mathrm{d}t \tag{6}$$

where $u = u(c_t, m_t^d, l_t^d)$ is the utility index. Therefore, the representative individual solves the following intertemporal optimization problem

$$\text{Maximize} \int_0^{\infty} u(c_t, m_t^d, l_t^d) e^{-\rho t} \mathrm{d}t \tag{7}$$

subject to

$$\dot{m}_t^d + \dot{b}_t = r^* b_t - \pi m_t^d + w n_t^s - c_t + \Pi_t$$

where ρ is the subjective discount rate, and m_0^d and b_0 are both given. From now on, for the sake of simplicity, it will be assumed that the subjective discount rate is equal to the real interest rate, that is, $\rho = r^*$. It is worth noticing that the assumption of this equality means that it is just attained by coincidence since ρ is an intertemporal preference parameter and r^* is the international price of the bond market. Also, it will be assumed that profit $\Pi_t = 0$; this assumption will be justified later on. From the above assumptions, the budget constraint becomes

$$\dot{m}_t^d + \dot{b}_t = r^* b_t - \pi m_t^d + w n_t^s - c_t \tag{8}$$

and it can be rewritten in the following way

$$b_0 = \int_0^\infty (c_t + \dot{m}_t^d + \pi m_t^d - w n_t^s) e^{-r^* t} \mathrm{d}t \,. \tag{9}$$

The Lagrangian, $L(c_t, m_t, l_t^d, \lambda)$, associated with maximizing (7) subject to (9) is given by

$L = (\mathrm{u}_0(c_t) + \varphi_1 \mathrm{u}_1(m_t^d) + \varphi_2 \mathrm{u}_2(1 - n_t^s)) e^{-r^* t} - \lambda e^{-r^* t}(c_t + \dot{m}_t^d + \pi m_t^d - w n_t^s)$ with

$$\mathrm{u}_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\eta_i}}{1-\eta_i} & \eta_i \neq 1 \\ \ln(x) & \eta_i = 1 \end{cases} \tag{10}$$

where η_i for $i \in 0,1,2$ are constants, and λ is the Lagrange multiplier. The first order conditions (necessary conditions) for an interior solution of the utility maximization problem are:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial m_t^d} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{m}_t^d}\right) = 0, \text{ and } \frac{\partial L}{\partial l_t^d} = 0.$$

Note that the interior solution will only exist if $\eta_i \neq 0$ for $i \in 0,1,2$. The above second equation is known as the Euler-Lagrange equation. After computing the partial derivatives, it is obtained that

$$c_t = \lambda^{-\frac{1}{\eta_0}}, \tag{11}$$

$$m_t^d = \left(\frac{\varphi_1}{\lambda(r^* + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\eta_1}} = \text{constant}, \tag{12}$$

$$\dot{m}_t^d = 0, \tag{13}$$

$$n_t^s = 1 - \left(\frac{\varphi_2}{\lambda w} \right)^{\frac{1}{\eta_2}}. \tag{14}$$

In order to determine λ , equations (11)-(14) are substituted into constraint (9), then

$$\begin{aligned} b_0 &= \int_0^\infty \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\eta_0}} + \pi \left(\frac{\varphi_1}{\lambda(r^* + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\eta_1}} - w + w^{\frac{\eta_2 - 1}{\eta_2}} \left(\frac{\varphi_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\eta_2}} \right) e^{-r^* t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{r^*} \left(\left(\frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\eta_0}} + \pi \left(\frac{\varphi_1}{\lambda(r^* + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{\eta_1}} - w + w^{\frac{\eta_2 - 1}{\eta_2}} \left(\frac{\varphi_2}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\eta_2}} \right). \end{aligned} \tag{15}$$

For the sake of simplicity, in what follows, it will be assumed that $\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = \eta$, which implies

$$\lambda = \frac{1 + \pi \left(\frac{\varphi_1}{r^* + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{\eta}} + w^{\frac{\eta - 1}{\eta}} \varphi_2^{\frac{1}{\eta}}}{r^* b_0 + w}. \tag{16}$$

.

4. Firms rational behavior and labor market equilibrium

Characteristic of the firm are the following: it is supposed that the firm's production function has constant marginal returns,

$$f(n_t^d) = A n_t^d,$$

where *A* is a constant standing for the marginal product of labor. The firm wishes to maximize its profit

$$\Pi_t = f(n_t^d) - w n_t^d . \tag{17}$$

The necessary condition for a maximum is given by $w = A$. This also leads to $\Pi_t = 0$. Therefore, equilibrium in the market labor leads to

$$n_t = 1 - \left(\frac{\varphi_2 \left(r^* b_0 + A \right)}{A \left(1 + \pi \left(\frac{\varphi_1}{r^* + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{\eta}} + A^{\frac{\eta - 1}{\eta}} \varphi_2^{\frac{1}{\eta}} \right)} \right)^{\frac{1}{\eta}} \tag{18}$$

5. Household's economic welfare

The household's economic welfare (indirect utility), W_η, is obtained by substituting the optimal decisions for η, given in (11), (12) and (14) in the direct utility stated in (8), for $\eta = 1$, we have

$$W_{\eta=1} = \int_0^\infty \left(\ln \left(\frac{\left(r^* b_0 + w \right)}{\left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{(r^* + \varepsilon)} + \varphi_2 \right)} \right) + \varphi_1 \ln \left(\frac{\left(r^* b_0 + w \right) \varphi_1}{\left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{(r^* + \varepsilon)} + \varphi_2 \right) \left(r^* + \varepsilon \right)} \right) + \varphi_2 \ln \left(\frac{\varphi_2 \left(r^* b_0 + A \right)}{A \left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{r^* + \varepsilon} + \varphi_2 \right)} \right) \right) e^{-r^* t} \mathrm{d}t$$

By using the result $\int_0^\infty r^* e^{-r^* t} \mathrm{d}t = 1$ in the above integral, it follows that

$$W_{\eta=1} = \frac{1}{r^*} \left(\ln \left(\frac{\left(r^* b_0 + w \right)}{\left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{(r^* + \varepsilon)} + \varphi_2 \right)} \right) + \varphi_1 \ln \left(\frac{\varphi_1 \left(r^* b_0 + w \right)}{\left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{(r^* + \varepsilon)} + \varphi_2 \right) \left(r^* + \varepsilon \right)} \right) + \varphi_2 \ln \left(\frac{\varphi_2 \left(r^* b_0 + A \right)}{A \left(1 + \frac{\pi \varphi_1}{r^* + \varepsilon} + \varphi_2 \right)} \right) \right)$$

Economic welfare depends on the exchange rate of depreciation, the interest rate, preference parameters, and initial endowments. We assess the impact of once-for-all changes in the independent variables on the welfare.

$$W_{\eta=1}=\frac{1}{r^*}\left\{\ln\left(r^*b_0+w\right)-\ln\left(1+\frac{\pi\varphi_1}{(r^*+\varepsilon)}+\varphi_2\right)+\varphi_1\left(\ln\left(r^*b_0+w\right)-\ln\left(1+\frac{\pi\varphi_1}{(r^*+\varepsilon)}+\varphi_2\right)\left(r^*+\varepsilon\right)\right)\right.$$

$$\left.+\varphi_2\left(\ln\left(\varphi_2\left(r^*b_0+A\right)\right)-\ln\left(A\left(1+\frac{\pi\varphi_1}{r^*+\varepsilon}+\varphi_2\right)\right)\right)\right\} \tag{19}$$

For $\eta\neq 1,\ n\neq 0$, we have

$$W_{\eta\neq1}=\int_0^\infty\left(\frac{c_t^{\,1-\eta}}{1-\eta}+\varphi_1\frac{\left(m_t^d\right)^{1-\eta}}{1-\eta}+\varphi_2\frac{\left(l_t^d\right)^{1-\eta}}{1-\eta}\right)e^{-r^*t}\mathrm{d}t$$

$$W_{\eta\neq1}=\frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^\infty\left(1+\varphi_1\left(\frac{\varphi_1}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}e^{-r^*t}\mathrm{d}t+\int_0^\infty\varphi_2\left(\frac{\varphi_2\left(r^*b_0+A\right)}{A\left(1+\pi\left(\frac{\varphi_1}{r^*+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\eta}}+A^{\frac{\eta-1}{\eta}}\varphi_2^{\frac{1}{\eta}}\right)}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}e^{-r^*t}\mathrm{d}t\right]$$

$$W_{\eta\neq1}=\frac{1}{(1-\eta)r^*}\left[\left(1+\varphi_1\left(\frac{\varphi_1}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}+\varphi_2\left(\frac{\varphi_2\left(r^*b_0+A\right)}{A\left(1+\pi\left(\frac{\varphi_1}{r^*+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\eta}}+A^{\frac{\eta-1}{\eta}}\varphi_2^{\frac{1}{\eta}}\right)}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\right]$$

$$W_{\eta\neq1}=\frac{1}{(1-\eta)r^*}\left[\begin{array}{l}\left(1+\varphi_1\left(\frac{\varphi_1}{r+\varepsilon}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\right)\left(\frac{r^*b_0+w}{1+\pi\left(\frac{\varphi_1}{r^*+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\eta}}+w^{\frac{\eta-1}{\eta}}\varphi_2^{\frac{1}{\eta}}}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\\ +\varphi_2\left(\frac{\varphi_2\left(r^*b_0+A\right)}{A\left(1+\pi\left(\frac{\varphi_1}{r^*+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\eta}}+A^{\frac{\eta-1}{\eta}}\varphi_2^{\frac{1}{\eta}}\right)}\right)^{\frac{1-\eta}{\eta}}\end{array}\right] \tag{20}$$

5.1. Comparative Statics

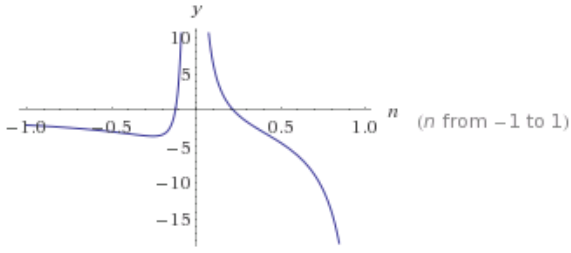
In this section, it is development the comparative statics. Data are the following: $A=1, b_0=1,$ $\pi=0.04,\ \varepsilon=0.04, \varphi_1=1, \varphi_2=1,\ w=1,$ solving and given $r^* \in (0,1]$, we have

$$\frac{\partial W}{\partial r^*} > 0 \quad \text{para} \quad \eta \in (0.5,1)$$

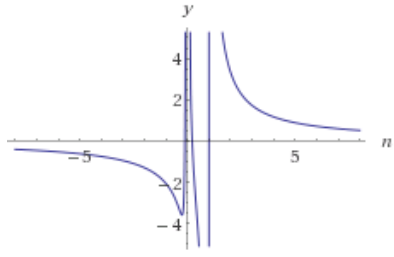
$$\frac{\partial W}{\partial r^*} \leq 0 \quad \text{para} \quad \eta \geq 1$$

$$\frac{\partial W}{\partial r^*} < 0 \quad \text{para} \quad \eta < -0.2$$

Behavior of $\frac{\partial W}{\partial r^*}$ for $\eta \in (-0.2,0.5)$. If $r^*=1$ we have

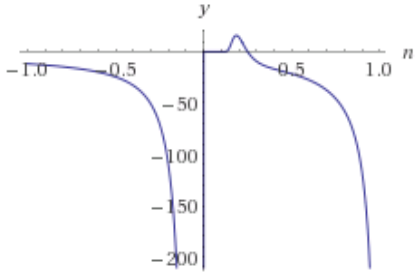


(n from −1 to 1)

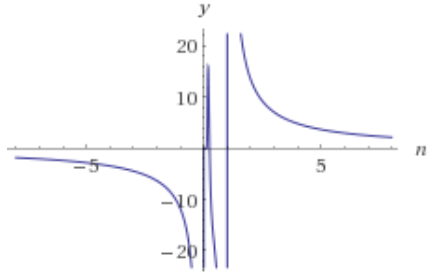


(n from −8 to 8)

If $r^*=0.5$ we have



(n from −1 to 1)



(n from −8 to 8)

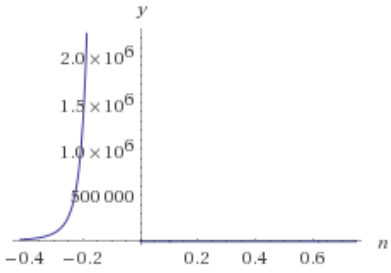
Now, it is considered the following data $A=1, b_0=1,\ r^*=0.025,\ \varphi_1=1, \varphi_2=1,\ w=1,$ solving for r and given $\varepsilon \in (0,1]$, we have

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} < 0 \qquad \text{para} \qquad \eta \geq 1$$

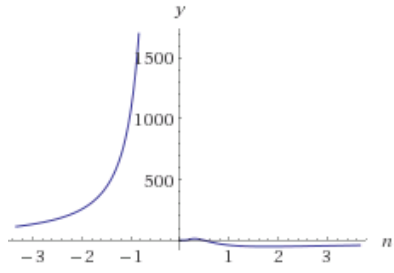
$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} > 0 \qquad \text{para} \qquad \eta < 0$$

Behavior of $\dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ for $\eta \in [0,1)$

Given $\varepsilon = 1,$ we have

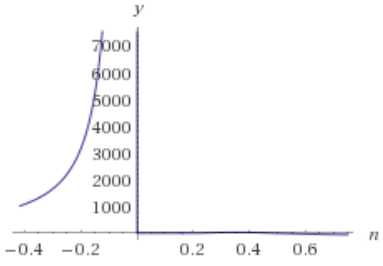


(n from −0.4 to 0.7)

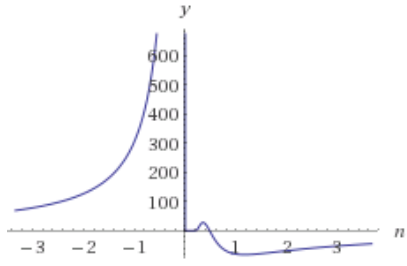


(n from −3.3 to 3.7)

If $\varepsilon = 0.5,$ we have

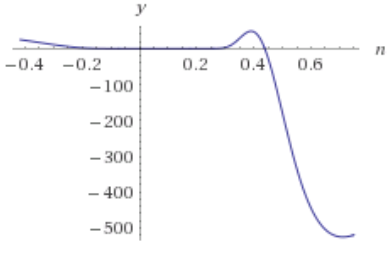


(n from −0.4 to 0.7)

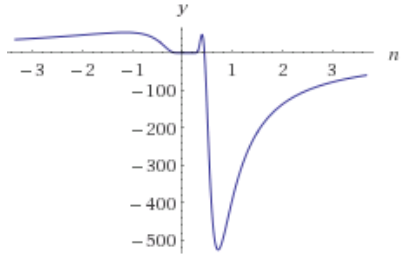


(n from −3.3 to 3.7)

If $\varepsilon = 0.1,$ we have

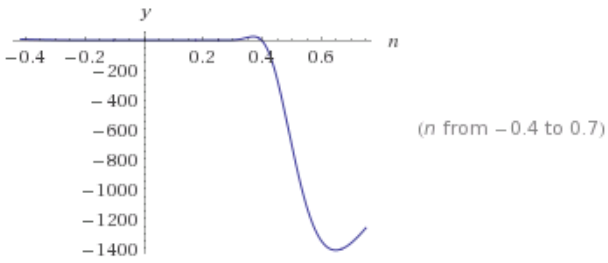


(n from −0.4 to 0.7)

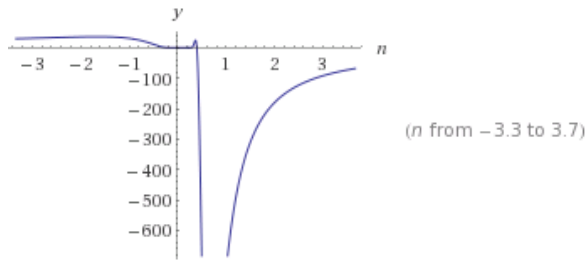


(n from −3.3 to 3.7)

If $\varepsilon = 0.05,$ we have

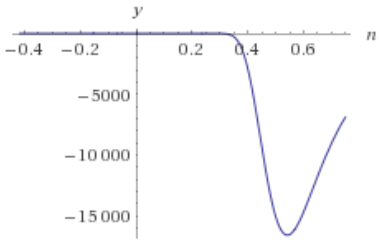


(*n* from −0.4 to 0.7)

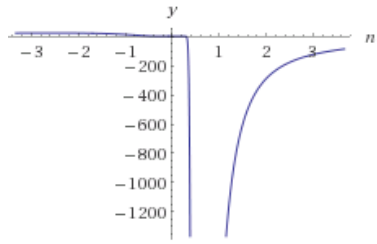


(*n* from −3.3 to 3.7)

If $\varepsilon = 0.01,$ we have



(*n* from −0.4 to 0.7)



(*n* from −3.3 to 3.7)

Finally, $\frac{\partial W}{\partial b_0} > 0$ for all $\eta > 0$, while $\frac{\partial W}{\partial b_0} < 0$ for all $\eta < 0$

The meaning of $\eta > 0$ and $\eta < 0$ _____, the changes are because

6. Conclusion

In this chapter, within a consistent framework, is aimed at obtaining consumption, real balances, and leisure optimal decisions of an infinitely-lived risk-averse rational consumer. We assume that preferences belong to the family of Constant Relative Risk Aversion (CRRA) utility functions. This research also find closed-form solutions of the decision making problem for the posed optimization problem. Finally, some comparative static experiments are carried out.

Reference

Barro, R. and X. Sala-i-Martin. (1995). Economic Growth. Mc. McGraw-Hill, New York.

Battermann, H., U. Broll and J. Wahl. (1997). Constant Relative Risk Aversion and Form Equivalence Classes. Working Paper Serie II, N. 345

Boulier, J., S. Huang, and G. Taillard, (2001). Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 28, No. 2, pp. 173-189.

Cairns, A., D. Blake, and K. Dowd, (2006). Stochastic lifestyling: Optimal dynamic asset allocation for defined-contribution pension plans, *Journal of Economic Dynamic and Control*. Vol. 30, No. 5, pp. 843-877.

Deelstra, G., M. Grasselli, and P. Koehl, (2003). Optimal investment strategies in the presence of a minimum guarantee. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 33, No. 1, pp. 189-207.

Dohmen, T., A. Falk, D. Huffman and U. Sunde (2010). Are Risk Aversion and Patience Related to Cognitive Ability? American Economic Review, Vol. 100, pp. 1238-1260.

Gao, J. (2008). Stochastic optimal control of dc pension funds. *Insurance: Mathematics and Economics*. Vol. 42, No. 3, pp. 1159-1164.

Krause, A. (2012). Optimal Saving Taxation when Individuals have Different CRRA Utility Functions. *Annals of Economics and Statistics*. N. 113-114, pp. 207.

Moreno-Bromberg, S., T. Pirvu, and A. Réveillac. (2012). CRRA Utility Maximization under Risk Constraints. arXiv preprint arXiv:1106.1702.

Vigna, E. (2009). Mean-variance inefficiency of CRRA and CARA utility function for portfolio selection in defined contribution pension schemes. *Working Paper* No. 108.

Xie, D. (2000). Power Risk Aversion Utility Functions. *Annals of Economics and Finance*. Vol. 1, pp. 265-282.

CAPÍTULO XXII

Valor en Riesgo de los Mercados de Capitales de México y Estados Unidos: Análisis con Diferentes Metodologías y Temporalidades.

Dr. Christian Bucio

Universidad Autónoma del Estado de México

Dr. Edgar Ortiz

Universidad Nacional Autónoma de México

Dra. Alejandra Cabello

Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

El análisis del riesgo en esta investigación se mide a través de la principal metodología de la administración del riesgo, el Valor en Riesgo (VaR). Se hace uso de diversas metodologías de VaR: VaR Simulación Histórica, VaR Delta-Normal, VaR Simulación Monte Carlo y VaR Cópulas Elípticas. El período de análisis comprende 40 años (1975-2014) de series de tiempo diarias, las cuales son segmentadas en periodos de 5, 10, 20 y 40 años. La muestra de estudio de los mercados de capitales comprende a sus principales índices bursátiles: IPyC de México y S&P 500 de Estados Unidos. La evidencia empírica identifica como varían a través del tiempo los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados de capitales bajo análisis y se comprueba la optimalidad y robustez de la medición del Valor en Riesgo mediante la metodología de cópula.

Palabras Clave: Valor en Riesgo, Mercados de Capitales, Cópulas.

JEL.- C14

1. Introducción

La creciente globalización económica financiera ha conllevado a que se creen diversos bloques económicos financieros, resaltando aquellos que se insertan en un área geo-económica común.

Los intereses económico financieros entre países vecinos se han incrementado no solamente debido a la mayor internacionalización de las actividades económico financieras intra y extra bloc, sino sobre todo por el incremento en la competencia internacional que ha derivado en estrategias de integración. Sin embargo, estos vínculos económico financieros involucran diversos riesgos que deben ser reconocidos y analizados, a fin de promover patrones de integración idóneos que promuevan un desarrollo conjunto óptimo del bloque económico.

La administración de riesgos es esencial para fomentar una mejor toma de decisiones por parte de ejecutivos de empresas, instituciones financieras, administradores públicos, o agentes económicos individuales, como es el caso de inversionistas en los mercados financieros. La administración de riesgos tiene como principal encomienda evitar pérdidas económicas debidas a la incertidumbre y volatilidad de los mercados real y financieros; es importante analizar y medir los riesgos con la finalidad de mejorar el desempeño económico financiero. Es necesario medir con la mayor precisión el riesgo a fin de lograr una asignación y rendimiento más eficientes del capital y en este sentido obtener inversiones más productivas que impulsen el crecimiento económico financiero.

El Valor en Riesgo es una de las herramientas más empleadas para la medición de riesgo. La principal razón de la popularidad de su modelo tradicional delta-normal es la sencillez y versatilidad al aplicarse a todas las posiciones de riesgo o carteras de inversión en cualquier nivel de una institución financiera, del sector público o del sector privado. Sin embargo, a fin de sobreponer limitaciones del modelo convencional, varios modelos alternativos han sido desarrollados. De todas maneras el punto de partida común es su conceptualización inicial: valor en riesgo corresponde a la pérdida máxima esperada en un horizonte de tiempo determinado y un intervalo de confianza dado (Crouchy, Galai y Mark, 2001; Jorion, 2007; Coleman, 2011; Llano de Monelo, y Piñeiro Sánchez, 2012).

El análisis del riesgo en esta investigación se mide a través de las pérdidas potenciales del Valor en Riesgo (VaR) entre los mercados de capitales de México y Estados Unidos, la muestra de estudio de los mercados de capitales comprende a sus principales índices bursátiles: IPC de México y S&P 500 de Estados Unidos. La estimación del VaR es realizada con ponderaciones iguales (ponderación naive) entre estos dos mercados y mediante varias metodologías: VaR Simulación Histórica, VaR Delta-Normal, VaR Simulación Monte Carlo y VaR Cópulas

Elípticas. El período de análisis comprende 40 años (1975-2014) de series de tiempo diarias, las cuales son segmentadas en periodos de 5, 10, 20 y 40 años. El objetivo de este trabajo es identificar los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados de capitales bajo análisis y discernir cual o cuales metodologías del VaR son más óptimas.

El trabajo está estructurado de la manera siguiente: primeramente se hace una revisión de la literatura incluyendo trabajos seminales y recientes; en la siguiente sección se presenta el marco teórico, definiendo las diferentes metodologías utilizadas para el cálculo del VaR; en la penúltima sección se discuten los resultados; y finalmente se presentan las conclusiones.

2. Revisión de la Literatura

En la actualidad existe un sinfín de estudios que analizan el VaR; hay estudios que analizan mercados locales (activos del mismo país) y estudios de VaR de mercados internacionales; asimismo hay estudios que investigan la interrelación de activos locales con activos internacionales, preocupación de la presente investigación. Con el avance tecnológico y metodológico los estudios de VaR que logran capturar de mejor manera el comportamiento del mercado son cada vez más difundidos y usados por los administradores de riesgos; su eventual aplicación depende en gran medida de estudios comparativos sobre resalten la precisión de los modelos analizados.

Varios estudios que resaltan el caso mexicano merecen citarse como antecedentes y motivación de la presente investigación. Reyes y Ortiz (2013) analizan el VaR de los mercados accionarios del TLCAN; su análisis del VaR de portafolios trinacionales aplica un modelo multivariado de la familia GARCH. En Benavides (2007) se realiza un análisis de VaR con futuros sobre tasas de interés mexicanas utilizando modelos GARCH. López, Ortiz y De Jesús (2012) analizan el VaR de la bolsa mexicana de valores complementando el análisis del VaR a través de econometría fraccional para determinar memoria larga en los mercados del TLCAN. Análogamente, Aguirre et al (2013) estiman el VaR de la Bolsa Mexicana de Valores para el período 27 de febrero de 2009 al 26 de febrero de 2010; emplean modelos de la familia ARCH, uno es simétrico (GARCH) y dos asimétricos (GJR-GARCH y EGARCH); y la teoría de valores extremos. También empleando la teoría de valores extremos Medina (2010) examina el comportamiento del IPyC de la Bolsa mexicana de Valores para el período 1991-2008; contrario a lo esperado su

evidencia señala que el mercado mexicano es poco volátil; el VaR del rendimiento negativo es muy bajo.

Por su parte, Alonso y Arcos (2005) evalúan el comportamiento de varios modelos de VaR para un portfolio representativo de 7 mercados accionarios latinoamericanos; su estudio incluye métodos paramétricos emplean el EWMA y un modelo TGARCH; sus resultados, en general, no identifican un mejor método para la medición del VaR, De Jesús y Ortiz (2013) analizan el efecto de la volatilidad y los rendimientos del peso en el desempeño de la bolsa mexicana aplicando la teoría de valores extremos en la medición del VaR. Finalmente, en Cortez, Rodríguez y Salazar (2009) se analiza el VaR paramétrico de un portafolio compuesto por los tipos de cambio de México y Argentina seccionando el análisis en época de crisis y en época de estabilidad cambiaría.

Respecto al análisis de riesgo vía la implementación del Valor en Riesgo con cópulas, Torres y Olarte (2009) analizan esta aplicación del VaR con cópulas elípticas y arquimedianas. Embrechts, Höing y Puccetti (2005) aplican el método de cópula para crear diversos escenarios de valor en riesgo para el peor de los casos. Rank (2006) muestra la fiabilidad del uso de copulas en uno de los dos métodos principales de la valuación del VaR, el método de Monte Carlo.

Cabe recalcar que estos últimos estudios analizan el caso de los mercados financieros desarrollados; los estudios con cópulas sobre mercados emergentes son escasos. Debe, no obstante resaltarse las investigaciones de Ozun y Cifter (2007) y Hotta, Lucas y Palaro (2008) quienes utilizan a la teoría de cópulas en la valuación del VaR de portafolios de mercados emergentes de Latinoamérica; y Bucio y Ortiz (2013) analizan dependencia y VaR entre mercados accionarios desarrollados y emergentes del continente americano.

3. Metodología

3.1 Valor en Riesgo

El Valor en Riesgo (Value at Risk, VaR; por sus siglas en inglés) es una técnica desarrollada en el ámbito financiero de la administración de riesgos. El Valor en Riesgo, esto es, valoración del riesgo, proviene de la necesidad de cuantificar con un determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período

predefinido de tiempo (Penza y Bansal 2001; Jorion 2007; Best 1998; Dowd 1998; Coleman, 2011; Llano de Monelo, y Piñeiro Sánchez, 2012). Es una medida de riesgo de mercado creada por JP Morgan y recomendada en la medición de riesgos por el Comité de Basilea.[1] La principal característica del porqué el VaR se ha convertido en la metodología estándar en la medición del riesgo de mercado, es su aparentemente fácil implementación, flexibilidad y sencilla lectura.

Sin embargo, el VaR es un concepto controvertido, debido principalmente a los diversos métodos utilizados en la obtención de su estimación; las divergentes mediciones así obtenidas conllevan a dudas en la toma de decisiones. Adicionalmente, se presenta el temor de que la administración de riesgos esté en algunos casos basada primordialmente en la estimación del VaR, teniendo por ende poca consideración para otros tipos de riesgos. Lo ideal sería que el VaR exprese con precisión la exposición al riesgo, sin embargo, la complejidad e inestabilidad de los mercados hace que sean necesarios modelos refinados que logren capturar las características de los mercados.

El concepto de VaR incorpora tres factores:

1. Un horizonte temporal dado. Es decir, un administrador de riesgos podría estar preocupado por las posibles pérdidas ya sea para un día, una semana, etc.

2. El VaR está asociado a una probabilidad. El VaR representa la posible pérdida durante un período determinado de tiempo con una determinada probabilidad.

3. El monto de dinero invertido.

En síntesis, la definición de VaR es la siguiente:

Valor en Riesgo.- El VaR resume la pérdida máxima esperada "o peor pérdida" a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza establecido.

En esencia el VaR no es más que una cifra, expresada en unidades monetarias o en términos porcentuales que indica la máxima pérdida esperada para un horizonte temporal y nivel de confianza determinado. Debido a la complejidad de las series financieras, así como a importantes avances en la econometría financiera múltiples metodologías han sido desarrolladas. De ahí que para sobreponer los alcances y controversias de las diferentes metodologías de VaR es necesario

[1] Basel Committee on Banking Supervision, Basel I, Basel II and Basel III, www.bis.org

realizar estudios comparativos y a su vez especificar no solo los parámetros referidos sino también el método de estimación empleado en su cálculo.

Para el cálculo del VaR, previamente se requiere modelar los rendimientos del portafolio y hallar la distribución de pérdidas que los describe; tradicionalmente y por simplicidad se han supuesto rendimientos normalmente distribuidos, pero la evidencia empírica muestra que las series financieras generalmente se alejan de la normalidad. De este modo es que se han creado modelos más refinados para medir de una mejor manera las pérdidas de portafolio, aunque se suscitan problemas como los anteriormente mencionados.

Las metodologías tradicionales de estimación del VaR aprobadas por el Comité de Basilea son: VaR Paramétrico, VaR Histórico y VaR Monte Carlo con un nivel de confianza del 95% tomando en cuenta series de datos diarias de por lo menos un año. Como un primer acercamiento, este trabajo aplica estos modelos. Posteriormente se contrastarán estas metodologías tradicionales contra el modelo de VaR con cópulas elípticas.

3.2 VaR Delta-Normal

J.P. Morgan en el año de 1994 mediante su destacada metodología llamada RiskMetrics introduce lo que se conoce como el método de valor en riesgo delta-normal. Esta metodología se fundamenta en la teoría de portafolio de Markovitz (1952, 1959) de varianza-covarianza.

La metodología delta-normal dada su fácil implementación es la más usual en el entorno financiero, este método está basado en el supuesto de normalidad de los datos, es decir para su cálculo se supone que los precios ó rendimientos de los activos financieros son independientes e idénticamente distribuidos, suponiendo que se distribuyen de manera normal (gaussiana). Al suponer linealidad se sobre entiende que las volatilidades y correlaciones son estables a través del horizonte temporal pactado.

El valor en riesgo delta-normal se determina como sigue,

$$VaR = Z_c\sqrt{w^T \Sigma w} * \sqrt{\Delta t} \qquad (1)$$

donde

$Z_c =$ nivel de significancia (valor critico) asociado a la distribución normal

$w =$ vector de posiciones de los activos

$w^T =$ transpuesta de w

$\Sigma =$ matriz de varianza-covarianza del activo o portafolio de activos

$\Delta t =$ horizonte temporal

La semejanza hacia la distribución normal hace que el mecanismo de medir las pérdidas de portafolio sea más fácil pues solo se necesita estimar el valor del percentil previamente escogido. Cabe resaltar que los cambios en el portafolio pueden interpretarse ya sea como pérdidas o como ganancias dependiendo si se mantiene una posición larga o corta, esto es de qué lado de la distribución sé este ubicado. Para el caso del VaR es común ubicarse del lado izquierdo de la distribución, i.e., en el lado de las pérdidas.

3.3 VaR de Simulación Histórica

Los modelos VaR de simulación tienen propiedades más atractivas que el modelo VaR delta-normal, la propiedad más significativa de estos modelos es que no se asume ningún supuesto sobre la estructura de la distribución de probabilidad de los rendimientos de los activos.

El modelo VaR de simulación histórica consiste en generar escenarios de los factores de riesgo (activos financieros) mediante la información observada de un periodo determinado. En la actualidad existen diversas metodologías para el VaR de simulación histórica, son semejantes en su mecanismo de implementación y la evidencia empírica ha comprobado que llevan a resultados similares, De Lara (2009).

El algoritmo de la simulación histórica utilizado en esta investigación es:

i) Recopilación de los datos del ó los activos que conformaran el portafolio.

$$P_k = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

donde P_k es el vector de precios de los activos (o vector de factor de riesgo).

ii) Mediante el vector de precios se obtiene el vector de rendimientos,

$$R_k = \begin{bmatrix} ln\dfrac{P_1}{P_0} \\ ln\dfrac{P_2}{P_1} \\ \vdots \\ ln\dfrac{P_n}{P_{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde R_k es el vector de los rendimientos de los precios de los activos.

iii) Se obtiene el último precio y se fija como semilla, P_n. Mediante el precio último se simulan nuevos precios, P_k^*. El precio semilla se multiplica por el exponencial de cada uno de los rendimientos y de esta manera se obtiene una nueva serie de datos, i.e.,

$$P_k^* = \begin{bmatrix} P_n * e^{R_1} \\ P_n * e^{R_2} \\ \vdots \\ P_n * e^{R_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{bmatrix} \qquad (4)$$

donde P_k^* es el vector de precios simulados de los activos.

iv) Para obtener el vector de pérdidas y ganancias se requieren tres pasos. Primeramente se toma el valor de la posición inicial, (si es que se tiene un portafolio de un activo) o posiciones iniciales (si es que se tiene un portafolio comprendido por más de un activo). Se obtiene el vector de precios y ponderaciones, para ello se realiza el cociente entre el valor de la posición inicial y el precio último, y se multiplica por cada uno de los precios simulados. Si se tiene un portafolio de más de un activo para llegar al vector de precios y ponderaciones se hace la suma de cada uno de los cocientes de las posiciones iniciales con sus respectivos precios últimos, multiplicadas por sus correspondientes precios simulados.

$$v_k = \begin{bmatrix} \dfrac{W}{P_n} * P_1^* \\ \dfrac{W}{P_n} * P_2^* \\ \vdots \\ \dfrac{W}{P_n} * P_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

donde v_k es el vector de precios y ponderaciones simulados de los activos.

v) El segundo paso a seguir en la obtención del vector de pérdidas y ganancias, es obtener el residuo entre el vector de precios y ponderaciones y el valor de posición inicial, o valores de posición inicial para el caso de más un activo. Para el caso de más de un activo se hace la suma de los residuos de los vectores de precios y ponderaciones versus sus respectivos valores de posición inicial, para así obtener un vector de pérdidas y ganancias conjunto.

$$V_k = \begin{bmatrix} v_1 - W \\ v_2 - W \\ \vdots \\ v_n - W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \qquad (6)$$

donde V_k es el vector de pérdidas y ganancias simulados de los activos, sin orden.

vi) Finalmente, los valores del vector de pérdidas y ganancias sin orden V_k son ordenados de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias V_k^*. Mediante el vector de pérdidas y ganancias V_k^* se hace el cálculo del valor en riesgo; en otras palabras, la estimación del VaR se obtiene a través del percentil c% del vector de pérdidas y ganancias.

3.4 VaR de Simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo, originalmente avanzada por Ulam y von Neumann en 1946[2] se basa en la utilización de números aleatorios para crear escenarios futuros. La simulación de escenarios consiste en crear una secuencia de valores que conjuntamente formen una trayectoria de la variable de interés (variable a analizar), i.e., la trayectoria se forma mediante la simulación de escenarios que es vista a través de un amplio rango de situaciones posibles.

En lo que respecta al VaR, la simulación Monte Carlo sirve para simular escenarios sobre el probable valor de un portafolio en una fecha específica, en otras palabras, la medición del VaR es el que se obtiene mediante la distribución de valores del portafolio simulado. Esta metodología no toma en cuenta linealidad; incorpora variaciones a través del tiempo, i.e., volatilidad; captura colas amplias y valores extremos.

La implementación de la metodología del VaR de simulación Monte Carlo es la siguiente:

[2] La metodología surgió de varios intercambios entre Ulam y von Neumann (Eckhart, R, 1987).

I) Primeramente se necesita seleccionar un modelo estocástico que describa el comportamiento de los precios (factores de riesgo) y especificar los parámetros que intervienen. El modelo más común en la literatura económico-financiera y el que utilizaremos en este trabajo, es el movimiento browniano geométrico,

$$dS_t = \mu_t S_t\, dt + \sigma_t S_t\, dz_t \qquad (7)$$

donde, S_t representa el precio del activo financiero, dz_t es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza dt; y los parámetros μ_t y σ_t representan a la tendencia instantánea y la volatilidad en el momento t, por simplicidad se asumen en adelante que estos parámetros son constantes.

Para la simulación de las trayectorias, es necesario previamente encontrar la solución única de la anterior ecuación estocástica, la cual puede expresarse como,

$$S_t = S_{t-1} \exp(\mu dt + \sigma dz_t) \qquad (8)$$

Esta última ecuación, caracteriza movimientos infinitesimales en el precio del activo financiero. Por cuestiones prácticas esta última ecuación se transforma a términos discretos, teniendo un intervalo de tiempo pequeño Δt, que comprende el momento actual t y el momento objetivo T. La transformación queda,

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}\right) \qquad (9)$$

donde, ε_t es ruido blanco, i.e., es una variable aleatoria distribuida normalmente con media cero y varianza 1.

II) Como segundo paso, se necesita generar una sucesión de números aleatorios $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t$ para simular la trayectoria de precios. De este modo, el conjunto de precios simulados a través del horizonte objetivo es,

$$S_t = S_{t-1} \exp\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_1 \sqrt{\Delta t}\right)$$

$$S_{t+1} = S_t \exp\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_2 \sqrt{\Delta t}\right)$$

$$S_{t+2} = S_{t+1} \exp\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_3 \sqrt{\Delta t}\right)$$

$$\vdots$$

$$S_{t+n} = S_{t+n-1} \exp\left(\mu \Delta t + \sigma \varepsilon_n \sqrt{\Delta t}\right) \qquad (10)$$

Ampliando la metodología anterior, para el caso de un portafolio con más de un activo se requiere de lo siguiente:

i) Inicialmente se necesita descomponer la matriz de varianza-covarianza del precio de los activos, para ello se lleva a cabo el mecanismo de descomposición de Cholesky. Mediante la descomposición de Cholesky se obtiene la matriz A, la cual cumple la obtención de una matriz triangular inferior, i.e.,

$$\Sigma = AA^T \qquad (11)$$

donde A representa una matriz triangular cuadrada de dimensión $n \, x \, n$.

ii) A continuación, se crea un vector de dimensión $n \, x \, 1$ de números aleatorios, $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, con media cero y varianza 1. Para el caso específico de esta investigación se generan 100,000 números aleatorios.

iii) Paso siguiente, se genera un conjunto de rendimientos que se distribuya de manera normal,

$$\mathrm{Y} = A^T \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (12)$$

donde Y representa un vector de dimensión $n \, x \, 1$, de variables normales transformadas.

iv) A continuación, se generan los precios que se distribuyen de manera lognormal,

$$\mathrm{Z} = S_t e^Y \qquad (13)$$

donde S_t representa el vector de dimensión $n \, x \, 1$, de los precios futuros esperados.

v) Una vez obtenido el vector de precios Z, este se utiliza para crear el vector de pérdidas y ganancias V_k, mediante $V_k = \mathrm{Z} - \mathrm{W}$, donde W es la posición total del portafolio.

vi) Y como en el caso de la simulación histórica; los valores del vector de pérdidas y ganancias sin orden V_k son ordenados de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias V_k^*. Y finalmente, mediante el vector de pérdidas y ganancias V_k^* se hace

el cálculo del valor en riesgo; en otras palabras, la estimación del VaR se obtiene a través del percentil c% del vector de pérdidas y ganancias.

3.4 Valor en Riesgo con Cópulas

En los últimos años, se ha tenido un gran auge en investigaciones e implementaciones para el cálculo del VaR utilizando cópulas,[3] determinando la estructura de dependencia del portafolio y de los activos riesgosos que lo conforman, sin partir de supuestos sobre sus distribuciones y con la esperanza de estimar las colas gruesas de estas distribuciones; así se obtiene resultados más realistas y se evita la sobrestimación o subestimación del valor en riesgo del portafolio.

Siguiendo a Romano (2002), Rank (2006), Fantazzini (2008) y Bucio y Ortiz (2013) en este trabajo se hace el uso de la estimación del VaR vía Monte Carlo con una adaptación a la teoría de Cópulas.

Inicialmente se debe encontrar la función distribución conjunta más adecuada, i.e, la que mejor describa los datos. Esto se hace seleccionando las funciones de distribución marginales específicas para los rendimientos de riesgo individual y una función cópula para unir las marginales en una sola función de distribución conjunta.

Sean x_t y y_t los log-rendimientos de los activos en el tiempo t, y sea $\beta \in (0,1)$ el peso de la asignación, por tanto el rendimiento del portafolio está dado por

$$z_t = \beta x_t + (1-\beta) y_t \qquad (14)$$

La función de distribución condicional conjunta estimada en el tiempo t-1 está dada como,

$$H_t(x,y|\Phi_{t-1}) = C_t(F_t(x|\Phi_{t-1}), G_t(y|\Phi_{t-1})|\Phi_{t-1}) \qquad (15)$$

de este modo, la función de densidad está dada como,

$$h_t(x,y|\Phi_{t-1}) = c_t(F_t(x|\Phi_{t-1}), G_t(y|\Phi_{t-1})|\Phi_{t-1}) \qquad (16)$$

Los pasos detallados del procedimiento para la estimación de los p-ésimos niveles de confianza del VaR-Cópula durante un período de tenencia de un día son los siguientes:

[3] Para un estudio a detalle de la Teoría de Cópulas véase, Nelsen (2006); Cherubini et al. (2004); Rank (2006); Pradier (2011).

1.- Sea un portafolio de dos activos z, el cual contiene una posición para cada uno de los dos factores de riesgo (o activos), cuyo valor en el tiempo $t-1$ es:

$$P_{z,t-1} = P_{x,t-1} + P_{y,t-1} \qquad (17)$$

donde $P_{x,t-1}$ y $P_{y,t-1}$ son los precios de mercado de los dos activos en el tiempo $t-1$.

2.- Simular $j = 100{,}000$ escenarios Monte Carlo para cada log-rendimiento de los activos, $\{x_{j,t}, y_{j,t}\}$, sobre el horizonte temporal $[t-1, t]$, usando la función de distribución condicional conjunta.

a) En primer lugar, se tienen que simular j variables aleatorias $(u_{j,x}, v_{j,y})'$ de la cópula $C_t(\cdot)$.

i) Si se emplea una cópula normal 2-dimensional, se tiene el siguiente algoritmo:

• Encontrar mediante la descomposición de Cholesky A a la matriz de correlación Σ, i.e.,

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_t \\ \hat{\rho}_t & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\rho}_t$ es la correlación condicional pronosticada, estimada mediante la copula.

• Simular dos variables aleatorias independientes distribuidas normal estándar $z_j = (z_{j,1}, z_{j,2})'$.

• Establecer el vector $b_j = Az_j$.

• Determinar los componentes $(u_{j,x}, v_{j,y})' = \left(\phi(b_{j,1}), \phi(b_{j,2})\right)'$, donde $\phi(\cdot)$ es la cdf normal estándar. El vector $(u_{j,x}, v_{j,y})'$ es una j variable aleatoria de la 2-dimensional Cópula Normal $C_{Normal}(\cdot\,; \hat{\rho}_t | \Phi_{t-1})$.

ii) Si se aplica una cópula t-Student 2-dimensional, se emplea el siguiente algoritmo:

• Encontrar mediante la descomposición de Cholesky A a la matriz de correlación Σ, i.e.,

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_t \\ \hat{\rho}_t & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\hat{\rho}_t$ es la correlación condicional pronosticada, estimada mediante la copula.

• Simular dos variables aleatorias independientes distribuidas normal estándar $\mathbf{z}_j = (z_{j,1}, z_{j,2})'$.

• Simular una variable aleatoria s_j, de una distribución $\chi^2_{\hat{\nu}_t}$, independiente de $\mathbf{z}_j$, donde $\hat{\nu}_t$ es el parámetro de los grados de libertad estimado mediante la copula.

• Establecer el vector $\mathbf{b}_j = A\mathbf{z}_j$.

• Construir el vector $\mathbf{c}_j = \frac{\sqrt{\hat{\nu}_t}}{\sqrt{s_j}}\mathbf{b}_j$.

• Determinar los componentes $(u_{j,x}, v_{j,y})' = \left(t_{\hat{\nu}_t}(c_{j,1}), t_{\hat{\nu}_t}(c_{j,2})\right)'$, donde $t_{\hat{\nu}_t}(\cdot)$ es la cdf t-Student, con grados de libertad iguales a $\hat{\nu}_t$. El vector $(u_{j,x}, v_{j,y})'$ es una j variable aleatoria de la 2-dimensional Cópula t-Student $C_{t-Student}(\cdot; \hat{\rho}_t, \hat{\nu}_t | \Phi_{t-1})$.

b) El paso siguiente consiste en obtener el registro de los log-rendimientos de los activos estandarizados mediante el uso de las funciones inversas de las marginales estimadas, las cuales pueden ser Normales o t-Student,

$$\mathbf{Q}_j = (q_{j,x}, q_{j,y})' = \left(\hat{F}_t^{-1}(u_{j,x}), \hat{G}_t^{-1}(v_{j,y})\right) \qquad (18)$$

c) Finalmente, se repite este procedimiento para $j = 100{,}000$.

3.- Mediante el uso de estos 100,000 casos, el portafolio será reevaluado en el tiempo t, es decir,

$$P_{z,t}^{\,j} = P_{x,t-1}\exp(x_{j,t}) + P_{y,t-1}\exp(y_{j,t}), \qquad j = 1, \ldots, 100{,}000 \qquad (19)$$

4.- Las pérdidas del portafolio en cada escenario j, son calculadas mediante,

$$L_j = P_{z,t}^{\,j} - P_{z,t-1}, \qquad j = 1, \ldots, 100{,}000 \qquad (20)$$

5.- El cálculo del VaR a diferentes niveles de confianza es muy simple:

Se toma en cuenta el vector de pérdidas y ganancias sin orden, entonces como en los casos anteriores de simulación de VaR, i.e., simulación histórica y simulación Monte Carlo; este vector es ordenado de manera ascendente, dando como resultado la simulación del vector de pérdidas y ganancias con el cual se hace el cálculo del valor en riesgo vía el c% percentil.

4. Evidencia Empírica

La estimación de pérdidas potenciales vía el Valor en Riesgo haciendo uso de diversas metodologías de VaR se realizan para un portafolio compuesto por índices de los mercados accionarios de México y Estados Unidos: IPyC y S&P 500, respectivamente. En este sentido el análisis realizado en este trabajo es un análisis bivariado, i.e., un análisis a dos activos (o factores de riesgo). El período de análisis abarca 1975-2014, tomando en cuenta datos de series de tiempo diarias, siendo un total de 9,736 observaciones, las cuales son segmentadas en periodos de 5, 10, 20 y 40 años.

Con el fin de contar con una muestra estadísticamente idónea, las series de datos fueron previamente homogenizadas tomando solo días en común. Además, se convierten los índices bursátiles a una sola moneda; en este caso el dólar estadounidense. La Gráfica 1 da cuenta del comportamiento de los merados de capitales de México y Estados Unidos, tanto en moneda local como en dólares estadounidenses.

Gráfica 1. Mercados de Capitales de México y Estados Unidos

Panel A. Moneda Local

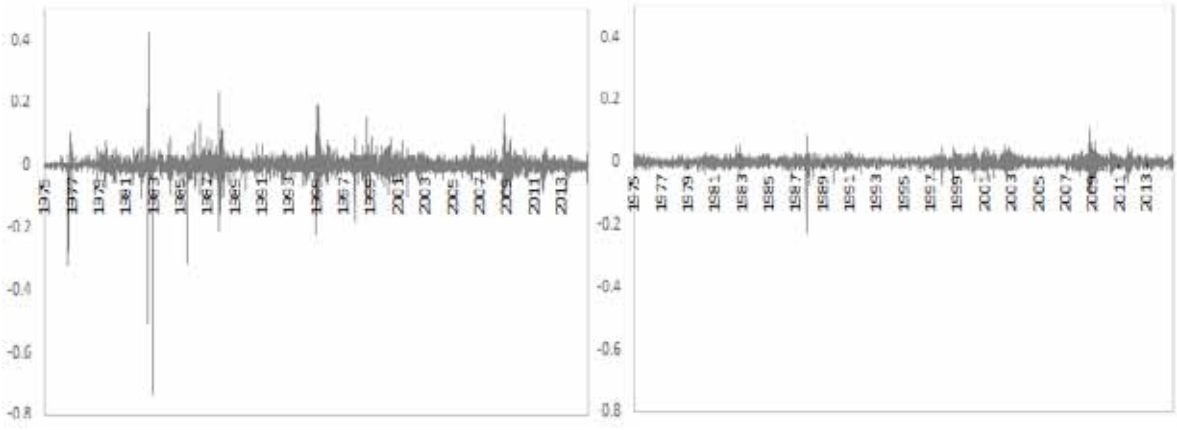
Panel B. Dólares Estadounidenses

Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la pagina web de yahoo finanzas.

Cabe mencionar que las estimaciones de las pérdidas potenciales entre estos mercados de capitales, se realizan aplicando los rendimientos de sus índices bursátiles expresados en dólares. La Gráfica 2 exhibe los rendimientos de los mercados de capitales de México y Estados Unidos para el período bajo análisis.

Gráfica 2. Rendimientos de los Mercados de Capitales de México y Estados Unidos

Panel A. IPC (México) Panel B. S&P 500 (Estados Unidos)



Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la pagina web de yahoo finanzas.

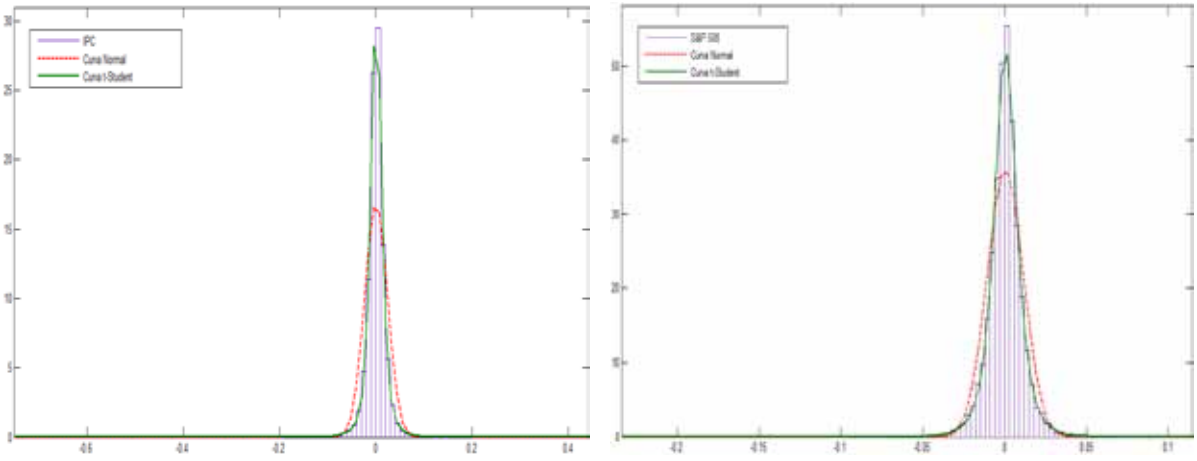
Se observa que los rendimientos de estos dos mercados no son estables, visiblemente se comprueba que se caracterizan por la presencia de clusters de volatilidad. Estos clusters de volatilidad señalan un comportamiento heteroscedástico de éstos mercados; en consecuencia cualquier análisis que parta del supuesto de normalidad en la serie de los índices bursátiles es erróneo y sus resultados conllevan a estimaciones espurias.

Para comprobar que no se cumple el supuesto de linealidad se presentan a continuación diversos análisis. Primeramente se genera el histograma de los rendimientos de cada uno de los mercados de capitales bajo análisis, y sobre cada uno de estos histogramas se sobrepone el ajuste mediante la curva de la distribución normal y el ajuste mediante una curva de la distribución t-student; de estas dos distribuciones la distribución t-student es la que más se asemeja a los datos de los rendimientos de los índices bursátiles de cada mercado de capitales. La Gráfica 3 muestra ésta situación.

Gráfica 3. Histogramas con Curvas Normal y t-Student de los

Rendimientos de los Mercados de Capitales de México y Estados Unidos

Panel A. IPC (México) Panel B. S&P 500 (Estados Unidos)



Fuente: Elaboración propia, datos obtenidos de la pagina web de yahoo finanzas.

La gráfica confirma que no se cumple la linealidad de los rendimientos de los mercados de capitales de éstos mercados norteamericanos; se observa claramente el comportamiento de la curva normal difiere en gran medida al comportamiento del histograma de los rendimientos. Sin embargo se puede afirmar se tiene un mejor ajuste mediante la curva t-student siendo esta similar al histograma de los rendimientos de los mercados de capital analizados. Cabe resaltar que el comportamiento de los rendimientos presenta leptocurtosis y colas pesadas.

Otro análisis relevante para confirmar la no linealidad se deriva de las estadísticas básicas de los rendimientos de los mercados de capitales de México y Estados Unidos. La Tabla 1 resume éstos estadísticos. Se observa que todos los periodos analizados se alejan de un comportamiento normal; la asimetría es marcada y los grados de curtosis son altos; finalmente, el estadístico Jarque-Bera también en todos los casos confirma la ausencia de normalidad.

Tabla 1. Estadísticos Descriptivos de los

Rendimientos de los Mercados de Capitales de México y Estados Unidos

	40 años		20 años				10 años							
	1975 - 2014		1975 - 1994		1995 - 2014		1975 - 1984		1985 - 1994		1995 - 2004		2005 - 2014	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	0.000531	0.000346	0.000693	0.000387	0.000399	0.000307	0.000061	0.000355	0.001326	0.000420	0.000420	0.000396	0.000377	0.000220
Mediana	0.000997	0.000537	0.001013	0.000399	0.000967	0.000685	0.000660	0.000131	0.001650	0.000628	0.000646	0.000577	0.001214	0.000748
Máximo	0.425974	0.109572	0.425974	0.087089	0.194642	0.109572	0.425974	0.053185	0.232839	0.087089	0.194642	0.055697	0.160382	0.109572
Mínimo	-0.736705	-0.228997	-0.736705	-0.228997	-0.182324	-0.094695	-0.736705	-0.040498	-0.312315	-0.228997	-0.182324	-0.071127	-0.112100	-0.094695
Varianza	0.000556	0.000123	0.000728	0.000093	0.000382	0.000153	0.000846	0.000077	0.000611	0.000109	0.000467	0.000135	0.000298	0.000171
Desv. Est.	0.023581	0.011095	0.026984	0.009646	0.019550	0.012363	0.029092	0.008756	0.024712	0.010456	0.021607	0.011621	0.017252	0.013068
Asimetría	-5.103308	-1.103446	-6.839007	-2.880989	0.010647	-0.229727	-9.661806	0.251082	-2.091625	-4.653268	0.052087	-0.107159	-0.073356	-0.310564
Curtosis	160.70880	29.35381	184.50282	73.75781	14.74871	10.86319	258.16632	4.62238	29.92592	104.19920	15.36403	6.03369	10.83458	13.64836
Jarque Bera	10130987.6	283691.61	6679909.19	1016163.36	28152.90	12653.76	6567424.82	289.27	75209.53	1046129.20	15606.50	944.19	6252.7931	11585.92
Probabilidad	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Correlación	0.326255		0.098190		0.597747		0.034637		0.162790		0.501781		0.723551	

	5 años															
	1975 - 1979		1980 - 1984		1985 - 1989		1990 - 1994		1995 - 1999		2000 - 2004		2005 - 2009		2010 - 2014	
	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500	IPC	S&P 500
Media	0.001053	0.000351	-0.000954	0.000376	0.001741	0.000621	0.000918	0.000200	0.000485	0.000947	0.000352	-0.000149	0.000611	-0.000061	0.000117	0.000490
Mediana	0.001014	0.000300	-0.000060	-0.000130	0.002581	0.001116	0.001000	0.000152	0.000395	0.000909	0.000691	0.000035	0.001878	0.000808	0.000816	0.000721
Máximo	0.101402	0.032224	0.425974	0.053185	0.232839	0.087089	0.105938	0.036642	0.194642	0.049887	0.088100	0.055697	0.160382	0.109572	0.055842	0.046317
Mínimo	-0.317875	-0.030024	-0.736705	-0.040498	-0.312315	-0.228997	-0.223988	-0.037272	-0.182324	-0.071127	-0.104731	-0.060045	-0.112100	-0.094695	-0.085053	-0.068958
Varianza	0.000316	0.000058	0.001376	0.000095	0.000895	0.000158	0.000329	0.000060	0.000658	0.000104	0.000276	0.000166	0.000416	0.000235	0.000178	0.000106
Desv. Est.	0.017772	0.007641	0.037090	0.009734	0.029922	0.012580	0.018127	0.007766	0.025652	0.010205	0.016621	0.012868	0.020407	0.015332	0.013333	0.010296
Asimetría	-8.237351	0.062872	-8.365123	0.336911	-1.934645	-5.411335	-2.049517	0.041886	0.106951	-0.528268	-0.180188	0.152134	0.051597	-0.221304	-0.580296	-0.438533
Curtosis	141.52144	3.58043	187.39729	4.68368	24.02753	99.46519	29.69756	5.35227	14.24189	8.47584	7.01707	4.73920	9.73674	12.86401	7.16921	7.44595
Jarque Bera	975412.71	17.68	1718398.42	164.85	23065.95	475451.88	37055.67	281.40	6452.98	1587.45	829.60	158.99	2317.00	4976.29	950.51	1042.19
Probabilidad	0.000000	0.001204	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
Correlación	-0.025655		0.059863		0.133018		0.242348		0.467841		0.606320		0.720124		0.732731	

Comprobada la no linealidad de los rendimientos de los índices bursátiles de los mercados de capitales de México y Estados Unidos, es preciso emplear metodologías que coadyuven a representar mejor situaciones disímiles a la distribución normal. En este trabajo se propone el uso de la teoría de cópulas en la estimación de pérdidas potenciales a través del VaR para de este modo obtener estimaciones más robustas. Para comprobar la validez de ésta propuesta se compara el Valor en Riesgo medido empleando diversas metodologías: VaR Delta-Normal, VaR Simulación Histórica, VaR Simulación Monte Carlo y VaR-Cópulas Elípticas.

Los supuestos mediante los cuales se cimientan las estimaciones del VaR del portafolio binacional, México-Estados Unidos son: horizonte temporal de un día, probabilidad de ocurrencia (nivel de significancia) al 99%, 95% y 90%, y la cantidad de 100 mil dólares por invertir.

En lo que respecta al monto de inversión por tratarse de un portafolio compuesto por un par de activos es necesario asignar un monto por cada uno de los activos, es decir, es necesario ponderar la inversión en cada índice bursátil de los mercados de capitales de México y Estados Unidos. Se asume una diversificación naïve, asignando 50% de los recursos a cada activo; a cada mercado se asigna 50 mil dólares; tomando montos de inversión idénticos, la estimación de Valor en Riesgo sirve como un comparativo mas de las características de los mercados de capitales de México y Estados Unidos.

Cabe mencionar, el análisis del VaR vía Cópulas Elípticas es llevado a cabo mediante el ajuste de funciones de densidad Kernel en cada una de las marginales que se requieren para la estimación de cada cópula propuesta.

La Tabla 2 muestra los resultados de las diversas metodologías de Valor en Riesgo propuestas para cada uno de los portafolios compuestos entre los mercados de capitales de México y Estados Unidos. Las pérdidas potenciales son reportadas en términos porcentuales para una mejor identificación.

Tabla 2. Medidas de Valor en Riesgo

de los Mercados de Capitales de México y Estados Unidos

	VaR 40 años	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975 - 2014	99%	3.789127	3.347043	8.631396	8.751624	11.855258
	95%	1.864520	2.353693	4.469264	4.484293	6.049181
	90%	1.226690	1.824142	2.732148	2.746837	3.684297

	VaR 20 años	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975 - 1994	99%	3.210378	3.381395	7.692870	7.783054	10.909668
	95%	1.486384	2.375021	4.009263	4.103580	5.597463
	90%	0.995665	1.838527	2.325191	2.461155	3.419542
1995 - 2014	99%	4.193622	3.303617	7.728445	7.747125	10.478813
	95%	2.119193	2.325499	3.939537	3.950586	5.313592
	90%	1.508977	1.804067	2.415728	2.432365	3.231462

	VaR 10 años	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975 - 1984	99%	2.709810	3.546698	4.423580	4.455231	6.387971
	95%	1.289035	2.501617	2.335586	2.343076	3.196449
	90%	0.896452	1.944488	1.415451	1.461685	1.927515
1985 - 1994	99%	4.250487	3.211200	7.614727	7.629725	10.654845
	95%	1.727689	2.244917	4.017264	4.018507	5.479879
	90%	1.109770	1.729796	2.465035	2.486254	3.341085
1995 - 2004	99%	3.844005	3.358158	8.159013	8.247069	11.147432
	95%	2.134137	2.362448	4.201133	4.208964	5.640621
	90%	1.590903	1.831638	2.547786	2.581660	3.410234
2005 - 2014	99%	4.281277	3.249047	6.875914	6.995546	9.375470
	95%	2.100047	2.288501	3.507652	3.533863	4.756153
	90%	1.432664	1.776437	2.155983	2.156425	2.894456

	VaR 5 años	S-H	D-N	S-M	Cópula N	Cópula t
1975 - 1979	99%	1.901819	2.158882	4.061081	4.313439	5.662210
	95%	0.966424	1.505881	2.065364	2.187410	2.841238
	90%	0.666244	1.157768	1.258113	1.334726	1.733644
1980 - 1984	99%	3.179176	4.554302	4.616476	4.971110	7.378537
	95%	1.646343	3.228608	2.787765	2.791889	3.736852
	90%	1.117808	2.521885	1.527217	1.595833	2.267131
1985 - 1989	99%	5.459661	3.832817	6.573421	6.648661	10.215307
	95%	1.925316	2.675417	3.375219	3.386550	5.253616
	90%	1.181617	2.058411	2.075445	2.081262	3.195537
1990 - 1994	99%	2.664593	2.431008	6.172599	6.205148	8.335572
	95%	1.560586	1.702475	3.120705	3.133915	4.234840
	90%	1.048654	1.314097	1.909857	1.923246	2.573704
1995 - 1999	99%	4.575899	3.619708	8.763476	8.863777	11.731550
	95%	2.294646	2.538353	4.498779	4.529669	6.000823
	90%	1.609550	1.961886	2.750370	2.764310	3.655238
2000-2004	99%	3.241862	3.069960	6.886990	7.001304	9.415723
	95%	2.035285	2.167666	3.540536	3.545410	4.755401
	90%	1.584119	1.686656	2.166396	2.169904	2.885954
2005 - 2009	99%	5.452813	3.834054	7.782585	7.914021	10.671541
	95%	2.551073	2.702828	3.975040	4.047583	5.435748
	90%	1.674667	2.099776	2.441377	2.479946	3.306049
2010-2014	99%	3.132580	2.531115	5.404616	5.434993	7.293485
	95%	1.782544	1.780737	2.733689	2.763932	3.681737
	90%	1.191686	1.380714	1.664766	1.675423	2.240037

Las estimaciones de Valor en Riesgo vía las metodologías Delta-Normal y Simulación Histórica, son las menos conservadoras; siguen las estimaciones vía la metodología de Monte Carlo las cuales muestran un umbral de pérdida más alto con respecto al VaR Delta-Normal y VaR Simulación Histórica. Finalmente, las estimaciones via el VaR Cópulas Elípticas son las de mayor umbral de pérdida, destacando las estimaciones obtenidas a través del VaR Cópula t-Student. Por lo tanto, se comprueba la eficiencia de la implementación del VaR-Cópula ya que conlleva a una mejor captura de los comportamientos leptocurticos y asimétricos de los rendimientos de los índices bursátiles, conformando un umbral de riesgo más amplio, destacando la estimada mediante la cópula t-student, la cual representa las mayores pérdidas.

Referente a las menores y mayores pérdidas potenciales estimadas, se puede decir que el portafolio conformado por los mercados de capitales de México y Estados Unidos presenta a través del tiempo y dependiendo del período analizado un menor o mayor umbral de pérdidas potenciales.

El período que presenta el mayor umbral de pérdidas corresponde al período de estimación completo, i.e., el comprendido de 1975-20014; sin embrago siendo coherentes se puede afirmar son tres los períodos los que presentan umbrales de pérdidas por arriba del resto, los cuales son 1975-2014, 1995-2004 y 1995-1999. Sin embargo se observa periodos con umbrales de perdidas muy cercanos a los que representan mayores pérdidas los cuales son 1975-1994, 1995-2014, el cual corresponde a todo el período bajo análisis segmentado en períodos de 20 años, y los períodos 1985-1994, 1985-1989 y 2005-2009. Por su parte el período que presenta un menor umbral de pérdida corresponde al período 1975-1979, seguido por el período 1975-1984.

5. Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue estimar e identificar los patrones de pérdidas potenciales entre los mercados de capitales de México y Estados Unidos y con base en las estimaciones obtenidas identificar cual o cuales metodologías del VaR son más precisas. De acuerdo a la evidencia presentada se puede afirmar que el uso de la teoría de cópulas en la estimación de pérdidas potenciales a través del Valor en Riesgo es más robusta que las metodologías utilizadas por la teoría económico-financiera convencional, conllevando a estimaciones más restrictivas pero idóneas en función del comportamiento no lineal de las series de tiempo de los rendimientos de los mercados de valores de México y Estados Unidos. En síntesis, se puede concluir que las estimaciones con metodologías más acordes al comportamiento de los activos financieros generan estimaciones más coherentes.

Bibliografía

Aguirre, Alejandro I.; Vaquera, Humberto; Ramírez, Martha E.; Valdez, José R. y Aguirre, Carlos. (2013). Estimación del Valor en Riesgo en la Bolsa Mexicana de Valores usando Modelos de Heteroscedasticidad Condicional y Teoría de Valores Extremos. *Economía Mexicana. Nueva Época*. Vol. XXII, Núm. 1, pp. 177-205.

Alonso, J.C., y Arcos, M.A. (2005). Valor en riesgo: Evaluación del desempeño de diferentes metodologías para 7 países latinoamericanos. Documento de Investigación, Universidad ICESI.

Benavides, Guillermo. (2007). Procesos GARCH y Valor en Riesgo: Un Análisis Empírico de Futuros. Panorama Socioeconómico. Núm. 35, pp. 92-105.

Bucio, Christian y Ortiz, Edgar (2013). Mercados Accionarios Desarrollados y Emergentes del Continente Americano: Dependencia y Valor en Riesgo. En *Fronteras en Economía Financiera*. Vol. 1. Ortiz, Francisco; López, Francisco y Venegas, Francisco (Coords.). Universidad Panamericana. pp. 1-32.

Best, Philip (1998). *Implementing value at risk*. John Wiley and Sons. England.

Cherubini, Umberto; Luciano, Elisa y Vecchiato, Walter. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley and Sons. England.

Cano Medina, J.L. (2010). Valor en riesgo del IPyC de México, 1991-2008. Tesis de Maestría, Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana.

Coleman, T.S. (2011). *A Practical Guide to Financial Management*. CFA Institute.

Crouhy, Michel; Galai, Dan y Mark, Robert. (2001). *Risk Management*. McGraw-Hill Education. Estados Unidos.

Cortez, K.A.; Rodríguez, M.P. y Salazar, R. (2009). Análisis del VaR en crisis y estabilidad: El caso de México y Argentina. *Innovaciones de Negocios*. 5(2) pp. 209-218.

De Jesús, Raúl y Ortiz, Edgar. (2013). El efecto de la volatilidad del peso mexicano en los rendimientos y riesgo de la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría y Administración*, 58 (3), pp. 89-119.

De Lara, Alfonso. (2009). *Medición y control de riesgos financieros*. Limusa. México.

Dowd, Kevin. (1998). *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, Frontiers in Finance Series. John Wiley and Sons. England.

Eckhart, R. (1987). Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method. Los Alamos Science Special Issue 1987.

Embrechts, Paul; Höing, Andrea y Puccetti, Giovanni. (2005). Worst VaR Scenarios Insurance. *Mathematics and Economics*. 37(1). pp. 115-134.

Fantazzini, Dean. (2008). Dynamic Copula Modelling for Value at Risk. *Frontiers in Finance and Economics*. Vol. 5, No. 2, pp. 72-108.

Hotta, Luiz K.; Lucas, Edimilson C. y Palaro, Helder P. (2008). Estimation of VaR using Copula and Extreme Value Theory. *Multinational Finance Journal*. 12 (3/4). pp. 205-218.

Jorion, Philippe. (2007). *Valor en Riesgo*. Limusa. México.

Llano de Monelos, P., y Piñeiro Sánchez, C. (2012). *Dirección Financiera. Un Enfoque Centrado en Valor en Riesgo*. Delta Publicaciones, Madrid.

López, Francisco; Ortiz, Edgar y De Jesús, Raúl. (2012). Long Memory Behavior in the Returns of the MexicanStock Market: Arfima Models and Value at Risk Estimation. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*. Vol. 2, No. 10, pp. 113-133.

Markowitz, Harry M. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*. 7(1). 77-91.

Markowitz, Harry M. (1959). *Porfolio selection, efficient diversification of investments*. John Wiley and Sons. New York.

Nelsen, Roger B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer. Estados Unidos.

Ozun, Alper y Cifter, Atilla. (2007). Portfolio Value-at-Risk with Time-Varying Copula: Evidence from the Americas. *MPRA Paper*. University Library of Munich, Germany.

Penza, Pietro y Bansal, Vipul K. (2001). *Measuring market risk with value at risk*. John Wiley and Sons. New York.

Pradier, E. (2011). Copula theory: An application to risk modeling. Travaux dEtudes et Recherches. Research Project Report, Ecole Nationale Supériore d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

CAPÍTULO XXIII

Estimación de múltiples tasas de interés técnico para una renta vitalicia mediante un modelo de riesgo de crédito.

Gabriel Alberto Agudelo Torres
Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia

Luis Ceferino Franco Arbeláez
Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia

Luis Eduardo Franco Ceballos
Instituto Tecnológico Metropolitano, Medellín, Colombia

Resumen

En la ciencia actuarial relativa a las rentas vitalicias se asume que la tasa a la cual se calculan las reservas para cubrir los pagos futuros, es igual a la tasa esperada de retorno de largo plazo de los portafolios en los cuales están invertidas. Ese supuesto es inconveniente ya que, tal como sugiere Merton (2012), podría llevar a los administradores de los recursos a tomar un exceso de riesgo con el fin de tener mayor rentabilidad y a la vez disminuir sus pasivos pensionales. Una alternativa es incorporar el comportamiento estocástico del valor de los portafolios en la elección de las tasas de descuento. En este capítulo se demuestra la existencia de una tasa de interés real adecuada para descontar cada pago futuro y que dichas tasas no son necesariamente iguales entre sí, ni iguales al retorno esperado de largo plazo del portafolio. Para determinar las tasas de interés adecuadas para el cálculo de una renta vitalicia, se propone la utilización de un modelo de riesgo de incumplimiento en los pagos previstos, que incorpora las fluctuaciones propias del portafolio en el cual están invertidas las reservas actuariales. Además se presenta una forma de estimar la tasa de interés técnico a partir de dicho modelo. Determinar las tasas de descuento adecuadas para calcular reservas actuariales contribuye a fortalecer la estabilidad de los sistemas pensionales y del sistema financiero en general.

JEL: C22, G22, H55.

Palabras clave: Renta vitalicia, riesgo de crédito, tasa de interés técnico.

1. Introducción

El cálculo de la reserva actuarial necesaria para cubrir la totalidad de los pagos de una renta vitalicia es un tema fundamental tanto para las compañías de seguros, como para los gobiernos y las entidades públicas o privadas pagadoras de sus propias pensiones. En la ciencia actuarial, esa reserva se calcula como la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles. En ese cálculo intervienen factores como la probabilidad de vivir de los individuos, la inflación, las edades, el monto del pago y la tasa de interés de descuento denominada "tasa de interés técnico". La estimación del monto de estas reservas afecta directamente la estabilidad y cobertura de los sistemas pensionales y por ende la calidad vida de millones de individuos.

En la ciencia actuarial relativa a las rentas vitalicias se asume, por lo general, que la tasa de interés técnico con la cual se calculan las reservas para cubrir los pagos, es igual a la tasa esperada de retorno de los portafolios en los cuales dichas reservas están invertidas, como lo indican Holsboer (2000) y Arango et al. (2013).

Tomar como tasa descuento para el cálculo de las reservas la tasa de retorno esperada del portafolio en los cuales están invertidas dichas reservas es recurrente pero no necesariamente correcto. Según Merton (2012) esa situación podría llevar a los administradores de portafolio a tomar un exceso de riesgo con el fin de tener mayor rentabilidad y a la vez disminuir sus pasivos pensionales.

Múltiples investigaciones han abordado el estudio de fenómenos financieros considerando su dinámica estocástica. Algunos trabajos seminales con este tipo de este enfoque son Black y Scholes (1973), Merton (1973), Vasicek (1977), y Cox Ingersoll y Ross (1985a) y (1985b). Otros trabajos que generalizan los procesos de Itô se encuentran en Grinols y Turnovsky (1993) y Schmedders (1998).

En este capítulo se demuestra que asumir que la tasa a la cual se calculan las reservas para cubrir el pago de las rentas vitalicias es igual a la tasa de retorno esperada de los portafolios en los cuales están invertidas no es una situación adecuada, si se abandona el supuesto de tasas de interés constantes y se incluye dentro del análisis la naturaleza estocástica del valor del

portafolio. Además se presenta un procedimiento para hallar las tasas de interés técnico que hacen que la probabilidad de incumplir con cada uno de los pagos de la renta sea cero.

Después de esta introducción, en la sección 2, se presenta el modelo; en la sección 3 se muestra una aplicación, y en la sección 4 se exponen algunas conclusiones.

2. Modelo

2.1.Reserva necesaria para la renta vitalicia

Sea $S(\pi)$ una función de sobrevivencia que indica la probabilidad de que la edad de muerte (Π) de una persona en particular sea mayor a una edad π. Por lo tanto:

$$S(\pi) = P(\Pi > \pi) \tag{1}$$

Se define ${}_tp_\phi$ como la probabilidad que tiene una persona de edad ϕ de no fallecer en los próximos t años y ${}_tq_\phi$ como la probabilidad de fallecer en el mismo período. De acuerdo con esta definición se tiene:

$${}_tp_\phi = P(\Pi > \phi + t | \Pi > \phi)$$

$${}_tp_\phi = \frac{P(\Pi > \phi \cap \Pi > \phi + t)}{\mathrm{P}(\Pi > \phi)}$$

$${}_tp_\phi = \frac{P(\Pi > \phi + t)}{\mathrm{P}(\Pi > \phi)}$$

$${}_tp_\phi = \frac{S(\phi + t)}{\mathrm{S}(\phi)}$$

Y por lo tanto,

$${}_tq_\phi = 1 - \frac{S(\phi+t)}{S(\phi)} \tag{2}$$

La reserva necesaria para el pago de una renta vitalicia será la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles. Se supone una renta vitalicia con una indemnización que

aumenta en el mismo porcentaje que el nivel general de precios y que inicialmente correspondiente a un valor D en caso de no fallecer y de cero (0) en caso de fallecer.

$$R_N = E(Pago_0)e^{-i*0} + E(Pago_1)e^{-i*1} + E(Pago_2)e^{-i*2} + \cdots + E\left(Pago_{w-\phi}\right)e^{-i*(w-\phi)}$$

$$R_N = \left(D_0\ {}_0p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*0} + \left(D_1\ {}_1p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*1} + \left(D_2\ {}_2p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*2} + \cdots + \left(D_{w-\phi}\ {}_{w-\phi}p_\phi + 0_{w-\phi}q_\phi\right)e^{-i*(w-\phi)}$$

Donde:

D_t: Monto de la mesada en un instante t.

i: Tasa de interés nominal.

ϕ: Edad actual del asegurado.

$w - \phi$: Tiempo máximo que el asegurado puede vivir.

R_N: Reserva necesaria para el pago de una renta vitalicia.

Suponiendo que D_t corresponde a un valor presente D actualizado con el porcentaje de cambio del nivel general de precios (ρ), la reserva necesaria puede expresarse como:

$$R_N = \left(De^{\rho*0}\ {}_0p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*0} + \left(De^{\rho*1}\ {}_1p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*1} + \left(De^{\rho*2}\ {}_2p_\phi + 0\ {}_0q_\phi\right)e^{-i*2} + \cdots + \left(De^{\rho*(w-\phi)}\ {}_{w-\phi}p_\phi + 0_{w-\phi}q_\phi\right)e^{-i*(w-\phi)}$$

Como la tasa de interés nominal (i) puede expresarse como la combinación del porcentaje de cambio del nivel general de precios (ρ) y de la tasa de interés real (r), entonces:

$$R_N = \left(De^{\rho*0}\ {}_0p_\phi\right)e^{-\rho*0} * e^{-r*0} + \left(De^{\rho*1}\ {}_1p_\phi\right)e^{-\rho*1} * e^{-r*1} + \left(De^{\rho*2}\ {}_2p_\phi\right)e^{-\rho*2} * e^{-r*2} + \cdots + \left(De^{\rho*(w-\phi)}\ {}_{w-\phi}p_\phi\right)e^{-\rho*(w-\phi)} * e^{-r*(w-\phi)}$$

$$R_N = D\ {}_0p_\phi e^{-r*0} + D\ {}_1p_\phi e^{-r*1} + D\ {}_2p_\phi e^{-r*2} + \cdots + D_{w-\phi}p_\phi e^{-r*(w-\phi)}$$

2.2.Probabilidad de incumplimiento en el pago

Sea V_t el valor de fondo necesario para soportar el pago futuro actualizado con la inflación D_T, con $0 \leq T \leq (w - \phi)$, que se realizará siempre y cuando la persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T - t$ años más.

Por lo tanto dicho valor de fondo corresponde al valor presente actuarial:

$$V_t = D * {}_{(T-t)}p_{\phi} * e^{-r*(T-t)}$$

Donde r es la tasa de interés técnico real utilizado para el cálculo actuarial y ${}_{(T-t)}p_{\phi}$ es la probabilidad de que una persona de edad ϕ sobreviva por lo menos $T - t$ años más.

Suponga que V_t es conducida por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)

$$dV_t = \mu_v * V_t * dt + \sigma_v * V_t * dW_t$$

Si $V_T < D_T$, donde $D_T = D * e^{\rho*(T-t)}$ se incumple, por lo menos parcialmente y no hay ningún tipo de excedente S_T en el portafolio que respalda la renta vitalicia, es decir $S_T = 0$.

Si $V_T \geq D_T$ se cumple, por lo tanto $S_T \geq 0$.

Entonces:

$$S_T = max(V_T - D_T, 0)$$

Mediante las ecuaciones de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), y asumiendo que los agentes necesitan un incentivo para invertir en una reserva para una renta vitalicia (no neutralidad al riesgo), se tiene que:

$$S_t = V_t * \Phi(d_1) - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \Phi(d_2)$$

Donde:

$$d_1 = \frac{Ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right) * (T - t)}{\sigma_v * \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v * \sqrt{T - t}$$

Y $\Phi(x)$ es a la probabilidad de que una variable normalmente distribuida con media cero (0) y desviación estándar uno (1) sea menor que x.

Como $V_t = D * {}_{T-t}p_\phi * e^{-r*(T-t)}$ y $D_T = D * e^{\rho*(T-t)}$, entonces

$$d_1 = \frac{Ln\left({}_{T-t}p_\phi * e^{-(r+\rho)*(T-t)}\right) + \left(\mu_v + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right) * (T-t)}{\sigma_v * \sqrt{T-t}}$$

Siguiendo a Merton (1974), es posible la probabilidad de incumplimiento total o parcial con el pago D_T, de la siguiente forma:

Se sabe que:

$$S_t = e^{-\mu_v*(T-t)} * \int_{-\infty}^{\infty} S_T * f_{V_T|V_t}(V|V_t) * dv$$

$$S_t = e^{-\mu_v*(T-t)} * \int_{-\infty}^{\infty} max(v - D_T, 0) * f_{V_T|V_t}(V|V_t) * dv$$

$$S_t = e^{-\mu_v*(T-t)} * \int_{D_T}^{\infty} (v - D_T) * f_{V_T|V_t}(V|V_t) * dv$$

$$S_t = e^{-\mu_v*(T-t)} * \int_{D_T}^{\infty} v * f_{V_T|V_t}(V|V_t) * dv - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \int_{\{v>D_T\}}^{\infty} f_{V_T|V_t}(V|V_t) * dv$$

$$S_t = e^{-\mu_v*(T-t)} * E\left[V_{T\{v>D_T\}}\middle|V_t\right] - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$$

Donde $f_{V_T|V_t}(V|V_t)$ es la función de densidad de probabilidad de V_T, condicional al valor inicial V_t.

Como $S_t = V_t * \Phi(d_1) - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \Phi(d_2)$, entonces:

$$\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} = \Phi(d_2)$$

Por lo tanto la probabilidad de incumplimiento será:

$$\mathbb{P}\{V_T < D_T|V_t\} = 1 - \Phi(d_2)$$

Y para que esta última sea cero es necesario que $\Phi(d_2) = 1$.

2.3.Estimación de la tasa de interés técnico

Suponiendo que S_t se conduce por el proceso $dS_t = \mu_S * S_t * dt + \sigma_S * S_t * dW_t$ y teniendo en cuenta que $S_t = V_t * \Phi(d_1) - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \Phi(d_2)$, se puede deducir a través del Lema de Ito que:

$$\mu_S * S_t * dt + \sigma_S * S_t * dW_t$$
$$= \left(\frac{\partial S_t}{\partial t} + \mu_v * V_t * \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}\sigma_v^2 * V_t^2 * \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2}\right) dt + \sigma_v * V_t * \frac{\partial S_t}{\partial V_t} * dW_t$$

Dado que las componentes estocásticas deben ser iguales:

$$\sigma_S * S_t = \sigma_v * V_t * \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$

$$\sigma_S * S_t = \sigma_v * V_t * \Phi(d_1)$$

$$S_t = \frac{\sigma_v}{\sigma_S} * V_t * \Phi(d_1)$$

Remplazando en $S_t = V_t * \Phi(d_1) - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \Phi(d_2)$ se obtiene:

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_S} * V_t * \Phi(d_1) = V_t * \Phi(d_1) - D_T * e^{-\mu_v*(T-t)} * \Phi(d_2)$$

Siendo $\hat{\sigma}_S$ observable, puesto que $S_t = \max(V_t - D_t, 0)$, siendo $D_t = D_T * e^{-\rho*(T-t)}$ y ρ el porcentaje de inflación anual.

Además, como $\hat{\mu}_v$ y $\hat{\sigma}_v$ son observables si ya se tiene constituido un portafolio para garantizar la renta vitalicia, es posible resolver la siguiente ecuación para la tasa de interés técnico real r; sujeto a la restricción que la probabilidad de incumplimiento es cero $\mathbb{P}\{V_T < D_T | V_t\} = 1 - \Phi(d_2) = 0$. Por lo tanto:

$$0 = V_t * \Phi(d_1) * \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_v}{\hat{\sigma}_S}\right) - D_T * e^{-\hat{\mu}_v*(T-t)}$$

Donde

$$d_1 = \frac{Ln\left({}_tp_\phi * e^{-(r+\rho)*(T-t)}\right) + \left(\hat{\mu}_v + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_v^2\right) * (T-t)}{\hat{\sigma}_v * \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}_v * \sqrt{T-t}$$

El procedimiento anterior permite hallar una tasa de interés técnico real diferente para cada pago a realizar. El cálculo actuarial completo quedaría entonces:

$$\mathcal{V}_t = D\ {}_0p_\phi e^{-\hat{r}_0*0} + D\ {}_1p_\phi e^{-\hat{r}_1*1} + D\ {}_2p_\phi e^{-\hat{r}_2*2} + \cdots + D_{w-\phi}p_\phi e^{-\hat{r}_{w-\phi}*(w-\phi)}$$

3. Aplicación

Suponga que se desea hallar la tasa de interés técnico real que se debe utilizar para encontrar el monto de la reserva que se debe constituir para realizar un pago de $15.000.000, actualizados con la inflación, a un hombre que hoy tiene 62 años, siempre y cuando se encuentre vivo dentro de 5 años.

Si se supone que la probabilidad de que se encuentre con vida es de 0.94349618 y que la EDE que describe el comportamiento del portafolio en el cual será invertida la reserva es:

$$dV_t = \mu_v * V_t * dt + \sigma_v * V_t * dW_t$$

Entonces $dV_t = 0.0829 * V_t * dt + 0.0401 * V_t * dW_t$

Así que la volatilidad del excedente del portafolio será: $\sigma_S = 136.22\%$ (considerando una inflación anual del 3.5% anual).

Por lo tanto:

$0 = 15'000.000 * 0.94349618 * e^{-r*5} * \Phi(d_1) * \left(1 - \frac{4.01\%}{136.22\%}\right) - 15'000.000 * e^{-8.29\%*5}$. Donde

$$d_1 = \frac{Ln\left(0.94349618 * e^{-(r+3.5\%)*5}\right) + \left(8.29\% + \frac{1}{2}(4.01\%)^2\right) * 5}{4.01\% * \sqrt{5}}$$

$$d_2 = d_1 - 4.01\% * \sqrt{5}$$

Resolviendo para r, se obtiene que la tasa de interés técnico real que debe ser utilizada para realizar el cálculo actuarial es 0.96% anual.

Si el administrador del portafolio decidiera aumentar el nivel de riesgo hasta $\sigma_v = 6\%$ y esto trajera consigo un aumento de la rentabilidad hasta ubicarla en $\mu_v = 13\%$, la tasa de interés técnico a utilizar debería ser 3.44% anual.

Suponiendo que al año siguiente se realizará un segundo pago, manteniendo los parámetros $\mu_v = 13\%$ y $\sigma_v = 6\%$, la tasa de interés técnico a utilizar será 4.07% anual.

4. Conclusiones

En este capítulo se estableció un procedimiento para calcular las tasas de interés técnico necesarias para realizar el cálculo actuarial de una renta vitalicia. Ese planteamiento, basado en el modelo de Merton (1974) para calcular probabilidades de incumplimiento en bonos corporativos, se presentó como alternativa ante la opción tradicional pero poco realista de suponer una tasa de descuento constante e igual al retorno esperado del portafolio a largo plazo. Dicha alternativa tuvo en cuenta que la probabilidad de incumplimiento total o parcial en cada uno de los pagos de la renta debe ser cero. Se recomienda para futuras investigaciones estudiar los efectos prácticos y legales de calcular las deudas pensionales de las entidades gubernamentales mediante el modelo presentado en este capítulo.

Referencias

Arango, L.E. Cabrera, W. Gómez, E. (2013). Tasa de interés de largo plazo, interés técnico y pasivo pensional. Borradores de Economía. Banco de la Republica de Colombia. No 796.

Black, F. and M. Scholes (1973). The Pricing of Option and Corporative Liabilities. Journal of Political Economy, Vol. 81, No 3, pp. 637-654.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, Econometrica, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross (1985b). A theory of the term structure of interest rates, Econometrica, Vol. 53, No. 2, pp. 385-467.

Grinols, E. L. y S. J. Turnovsky (1993). Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 17, No. 1-2, pp. 1-36.

Holsboer, J. H. (2000). The Impact of Low Interest Rates on Insurers. The Geneva Papers on Risk and Insurance, 25 (1), 38-58, 2000.

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Merton, R. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. The Journal of Finance, Vol. 29, No. 2, pp. 449-470.

Merton, R. (2012). Introduction to Pension Finance. M. Barton Waring, Wiley Finance.

Schmedders, K. (1998). Computing Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Markets. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 22, No. 8-9, pp. 1375-1401.

Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics 5: 177-188.

CAPÍTULO XXIV

Modelado de rendimientos financieros mediante Mixturas Gaussianas:

Una reflexión sobre el supuesto de normalidad en finanzas.

Cuevas Covarrubias C.

Universidad Anáhuac

Íñigo Martínez J.

Universidad Anáhuac

Jiménez Padilla R.

Universidad Anáhuac

Resumen

El supuesto de normalidad de los rendimientos financieros es fundamento de la teoría matemática que da sustento a diversos modelos econométricos utilizados en finanzas. Sin embargo, la evidencia empírica contradice con frecuencia este supuesto distribucional. En la práctica, se observan series de rendimientos cuyas densidades empíricas son asimétricas y leptocúrticas; y que por lo tanto, no pueden modelarse satisfactoriamente con una distribución normal. Como consecuencia, el modelado de rendimientos financieros mediante distribuciones flexibles se ha convertido en un tema de investigación relevante en Finanzas Cuantitativas, en Econometría y en Teoría del Riesgo. En este artículo mostramos el potencial de las mixturas Gaussianas finitas como medio para modelar la distribución de probabilidad de los rendimientos financieros. Discutimos desde el punto de vista de la inferencia estadística, un problema de modelación presente en tareas tan importantes como la valuación de opciones, la optimización de portafolios y el cálculo del valor en riesgo. El trabajo presenta varios ejemplos desarrollados con datos reales que fueron observados en el mercado Mexicano. Estos ejemplos dan testimonio del enorme potencial de los modelos de mixturas Gaussianas en el análisis y modelación de fenómenos financieros.

Palabras clave: Rendimientos financieros, Mezclas de normales, cópula Gaussiana.

1. Introducción

Varios modelos matemáticos en finanzas cuantitativas, asumen que los precios de los activos se comportan conforme a un proceso de movimiento Browniano Geométrico. Esto implica que los rendimientos logarítmicos se asuman como variables aleatorias de distribución normal. Aunque el supuesto de normalidad es un pilar teórico de las Finanzas Cuantitativas, en la práctica se observan rendimientos con comportamientos alejados de la distribución normal. Generalmente, esta discrepancia entre la teoría y evidencia se debe a que las densidades empíricas son asimétricas y leptocúrticas. En este trabajo exploramos el potencial de las mezclas de normales como herramienta para modelar la distribución de los rendimientos financieros. Nuestra discusión está basada en ejemplos prácticos con datos tomados del mercado mexicano. El artículo considera modelos tanto univariados como multivariados; en estos últimos se discute además sobre la descripción que las mixturas Gaussianas hacen de la estructura de dependencia de los rendimientos.

Comenzamos en la sección 2 con una breve revisión del supuesto de normalidad en finanzas. Luego en las secciones 3 y 4 definimos los modelos de mixturas Gaussianas y explicamos cómo estimar sus parámetros por Máxima Verosimilitud. Las secciones 5 y 6 ilustran sobre la aplicación de estos modelos con ejemplos reales. En estas secciones se discuten modelos para rendimientos marginales y conjuntos. Los resultados son alentadores, y sugieren que las mixturas Gaussianas merecen ser estudiadas con profundidad dentro de la teoría financiera moderna, debido a su gran flexibilidad y enorme potencial para modelar distribuciones en fenómenos financieros y económicos.

2. Estudios sobre el supuesto de no normalidad en finanzas

Con frecuencia, los modelos econométricos y financieros asumen que los precios de los activos siguen un proceso de movimiento Browniano geométrico. En consecuencia, los rendimientos financieros suelen considerarse como una secuencia de variables aleatorias independientes, que se distribuyen conforme a una misma normal. Por ejemplo, el artículo original de Black y Scholes (*Black y Scholes 1973*) sobre valuación de opciones, asume que el precio del bien subyacente se comporta conforme a una caminata aleatoria en tiempo continuo, y que la

distribución de sus rendimientos es una log-normal. En otras palabras y de acuerdo con Balck y Scholes, si el precio del bien subyacente S_t define un proceso de movimiento Browniano geométrico. Entonces, los rendimientos logaritmos

$$r_t = ln\frac{S_t}{S_{t-1}},$$

observados en momentos equidistantes $t_1, t_2, \ldots\ t_n$, constituyen una muestra aleatoria proveniente de una normal centrada en 0 y con varianza σ^2 constante. Este supuesto sobre la distribución de los residuos es una hipótesis teórica fundamental en finanzas matemáticas. Sin embargo en la práctica, la distribución empírica de los rendimientos de los activos cotizados en bolsa suele ser asimétrica y leptocúrtica, lo cual contradice este supuesto distribucional.

La no normalidad de los rendimientos financieros es un hecho conocido, y reportado en la literatura desde la década de 1960 (ve por ejemplo, *Fama 1965*). Sin embargo, cincuenta años después sigue siendo motivo de análisis y discusión en la literatura especializada (ver por ejemplo *Jondeau et al 2000 y Mota 2012*). Desde entonces, el estudio teórico de la no normalidad de los rendimientos financieros y de su modelación mediante modelos flexibles de funciones de distribución, ha dado como resultado la publicación de trabajos interesantes sobre el tema. Algunos artículos recientes, se concentran específicamente en analizar el potencial de los modelos de mixturas Gaussianas para modelar la distribución de los rendimientos financieros. Por ejemplo, en *Zhang y Cheng 2005* se propone un criterio original para cálculo del VaR basado en el supuesto de que los rendimientos se distribuyen conforme a una mezcla de normales. En el marco actual de la teoría de portafolios, el supuesto de normalidad es conveniente para resolver con facilidad el problema de optimización riesgo-rendimiento conforme a lo establecido en el modelo de Markowitz. En *Buckely et al 2008,* se discute este problema bajo el supuesto de que los rendimientos de los activos se comportan conforme a una mixtura Gaussiana. En un artículo más reciente, *Esch 2010* hace un análisis del efecto de la no normalidad de los rendimientos financieros, defiende el uso de la distribución normal y comenta sobre los inconvenientes de algunos modelos flexibles para estimar funciones de distribución en finanzas. Desde el título hasta las conclusiones, previene al lector sobre los riesgos implícitos en el rechazo radical y sumario de la distribución normal. En las conclusiones recomienda considerar a las mixturas Gaussianas como una alternativa conveniente para modelar la distribución de los rendimientos

financieros. Recientemente, *Tan y Chu 2012* exploran el potencial de las mixturas Gaussianas finitas como modelo distribucional en teoría de portafolios y proponen su aplicación para el cálculo del VaR.

En los últimos diez años, también se han publicado trabajos cuya contribución, lejos de ser una aportación teórica, consiste en dar evidencia empírica contundente del potencial de los modelos de mixturas Gaussianas en la modelación de rendimientos financieros. Por ejemplo, en *Behr y Poetter 2009* se presenta el análisis de las variaciones diez índices bursátiles europeos por medio de varias alternativas flexibles. De acuerdo con los autores, todos los modelos considerados en su estudio muestran un desempeño satisfactorio, sin embargo las mezclas de normales parecen ser la mejor opción. En un ejercicio similar, en *Kamaruzzaman et al 2012* se aplican modelos de mixturas Gaussianas para modelar la distribución de los rendimientos de tres índices bursátiles del mercado de Malasia. Los resultados ilustran con claridad la capacidad de las mezclas de normales para modelar distribuciones leptocúrticas como las observadas en todos los mercados financieros.

3. Mixturas Gaussianas

Sea $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria continua y sea f su función de densidad. Decimos que X se distribuye conforme a una mixtura Gaussiana de orden k (o conforme a una mezcla de k normales), siempre que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \frac{1}{\sigma_j} \phi\left(\frac{x - \mu_j}{\sigma_j}\right).$$

En la ecuación anterior, ϕ representa la densidad de una normal estándar; *i.e.* $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, y $\{\pi_j\}_{j=1}^{k}$ son constantes positivas tales que $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$. Es decir, una mezcla de normales es una combinación lineal convexa de densidades normales. Tenemos entonces que es posible asumir que el espacio muestral Ω está particionado en k subconjuntos (que llamaremos regímenes) que son ajenos entre sí, pero cuya unión reproduce al espacio original en su totalidad. En otras palabras,

$$\Omega = \bigcap_{j=1}^{k} \Omega_j \ ; \ \Omega_r \Omega_s = \emptyset.$$

En este caso, cada parámetro π_j puede ser representado como la probabilidad a priori de Ω_j. Es decir, si tomamos al azar un ω dentro de Ω; entonces $\pi_j = \Pr[\omega \in \Omega_j]$. Si X se distribuye conforme a una mezcla de k normales, entonces X es una variable aleatoria que con probabilidad π_j se distribuye conforme a una $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ siendo $j = 1,2, \dots k$.

Tenemos entonces que, dado un x que es realización de X, podemos calcular la probabilidad a posteriori de cada régimen por medio del Teorema de Bayes; *i.e.*

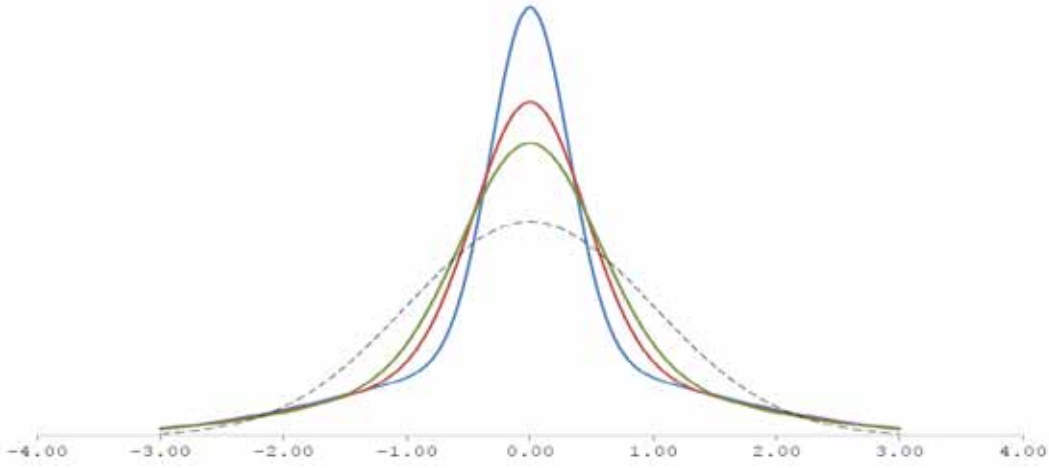
$$\Pr[\Omega_h | X = x] = \frac{\pi_h \frac{1}{\sigma_h} \phi(\frac{x - \mu_h}{\sigma_h})}{\sum_{j=1}^{k} \pi_j \frac{1}{\sigma_j} \phi(\frac{x - \mu_j}{\sigma_j})}; h = 1,2, \dots k.$$

En *Griedgean 1970* se demuestra que la mezcla de dos normales centradas en una misma media siempre es leptocúrtica. Esta propiedad hace de las mixturas gaussianas una excelente alternativa para modelar distribuciones con alto grado de curtosis; especialmente la distribución de los rendimientos financieros. La figura 1 muestra tres versiones diferentes del modelo

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sigma_1} \phi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) + (1 - \pi) \frac{1}{\sigma_0} \phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)$$

y lo compara con una normal estándar. Las cuatro densidades en esta figura tienen esperanza cero y varianza unitaria; no obstante, sus niveles de curtosis son todos diferentes.

Figura 1. Tres mixturas leptocurticas y una Normal estándar.



Los modelos de mixturas pueden generalizarse fácilmente al caso multivariado. Consideremos ahora un vector aleatorio $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$, decimos que X se distribuye conforme a una normal con vector de medias μ y matriz de covarianza Σ, siempre que su función de densidad conjunta sea de la forma:

$$\phi(x|\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t\Sigma^{-1}(x-\mu)}.$$

De manera análoga al caso univariado, diremos que el vector X se distribuye conforme a una mixtura Gaussiana (o conforme a una mezcla de normales), siempre que su densidad conjunta sea una combinación lineal convexa de densidades normales multivariadas.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \pi_j \, \phi\left(x|\mu_j,\Sigma_j\right).$$

4. Estimación puntual y ajuste del modelo

Sea $x_1, x_2, \ldots x_n$ una muestra aleatoria proveniente de una mezcla de k normales univariadas, y sea $\theta = (\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_k, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_k, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_k)^t$ el correspondiente vector de parámetros. Tenemos entonces que la log-verosimilitud para θ es la función $\mathcal{L}$ definida continuación:

$$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\pi_j}{\sigma_j} \phi\left(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j}\right)\right).$$

Para encontrar el estimador máximo de θ debemos maximizar $\mathcal{L}$ sujeta a la condición $\sum_{j=1}^{k} \pi_j = 1$. Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange, se demuestra que el estimador máximo verosímil es necesariamente una solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\pi_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right] \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right] \frac{\partial}{\partial \mu_j} \ln\left(\frac{1}{\sigma_j}\phi(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j})\right) = 0 \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right] \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \ln\left(\frac{1}{\sigma_j}\phi(\frac{x-\mu_j}{\sigma_j})\right) = 0 \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

Vale la pena resaltar que:

- El sistema a resolver es un sistema con $(3k-1)$ecuaciones y $(3k-1)$ incógnitas.
- El estimador máximo-verosímil de la probabilidad a priori π_j correspondiente al j^o régimen, es la media aritmética de las probabilidades a posteriori $\Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right]$ ese mismo régimen.
- Los estimadores máximo-verosímiles de μ_j y de σ_j se obtienen maximizando una forma de log-verosimilitud ponderada por las probabilidades a posteriori del j^o régimen. La mayor información en esta verosimilitud la aportan aquellas observaciones con mayor probabilidad a posteriori $\Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right]$.

El sistema de ecuaciones anterior puede transformarse en:

$$\hat{\pi}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr\left[\Omega_j | X = x_i\right] \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\mu}_j = \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\sigma}_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_{ji}\left(x_i - \hat{\mu}_j\right)^2} \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

Siendo $w_{ji} = \frac{\Pr[\Omega_j | X = x_i]}{\sum_{h=1}^{n} \Pr[\Omega_h | X = x_i]}$. Esta solución al sistema define un proceso iterativo conocido como el algoritmo EM (*Expectation Maximization*). Este algoritmo consiste en los siguientes pasos:

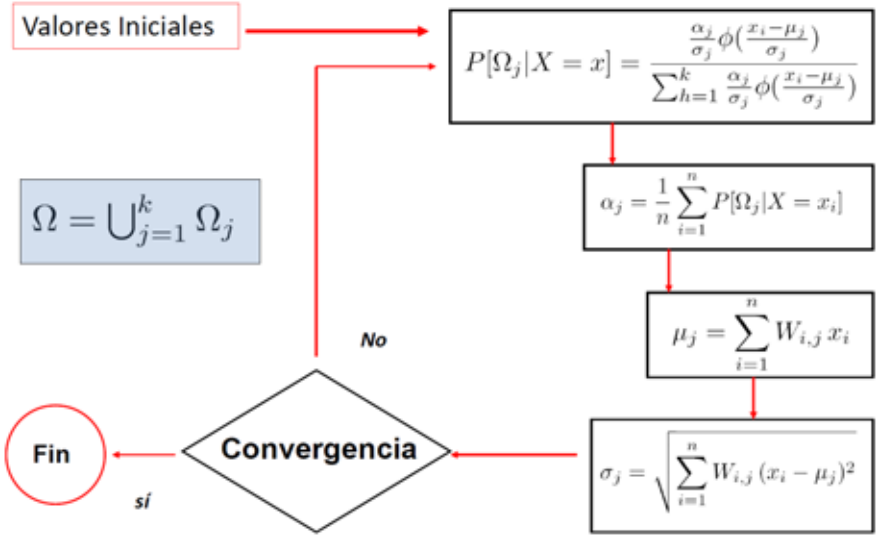
a. Definir estimadores iniciales para $\theta = (\pi_1, \pi_2, \dots \pi_k,\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_k,\ \sigma_1, \sigma_2, \dots\ \sigma_k)^t$.

b. Con base en estos estimadores, calcular para cada $\{x_i\}_{i=1}^n$ las probabilidades a posteriori $\Pr[\Omega_j|X = x_i]$ de cada régimen $\{\Omega_j\}_{j=1}^k$.

c. Calcular los nuevos estimadores máximo-verosímiles de π_j, μ_j y σ_j y volver al paso anterior.

El ciclo anterior debe mantenerse hasta que la solución sea satisfactoria en términos de algún criterio adecuado, definido en términos de la precisión que el usuario determine. El ciclo se ilustra con un diagrama de flujo en la figura 2.

Figura 2. Algoritmo EM para una Mixtura Gaussiana



Es algoritmo EM es un algoritmo numérico diseñado para maximizar verosimilitudes. Es un algoritmo muy útil para ajustar mixturas Gaussianas. A los lectores interesados en estudiarlo con mayor profundidad les recomendamos consultar *McLachlan y Peel 2000* o *McLachlan y Krishnan 2008*.

La extensión de este algoritmo para ajustar mezclas de normales multivariadas es natural e inmediata. Aunque el número de parámetros crece de manera importante, basta con definir la función de verosimilitud correspondiente y aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange como en el caso univariado. Por ejemplo, si se desea modelar la densidad conjunta de dos variables (X, Y) con una mixtura Gaussiana, debemos estimar dos entradas cada vector de medias $\mu_j = (\mu_{xj}, \mu_{yj})^t$; y tres elementos de cada matriz de covarianza $\Sigma_j = \begin{bmatrix} \sigma_{xxj} & \sigma_{xyj} \\ \sigma_{yxj} & \sigma_{yyj} \end{bmatrix}$. El proceso iterativo se define en términos del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\hat{\pi}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pr[\Omega_j | X = x_i] \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\mu}_{xj} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\mu}_{yj} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji} y_i \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\sigma}_{xxj} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji}(x_i - \hat{\mu}_{xj})^2 \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\sigma}_{yyj} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji}(y_i - \hat{\mu}_{yj})^2 \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

$$\hat{\sigma}_{xyj} = \sum_{i=1}^{n} w_{ji}(x_i - \hat{\mu}_{xj})(y_i - \hat{\mu}_{yj}) \text{ para } j = 1,2,\dots k$$

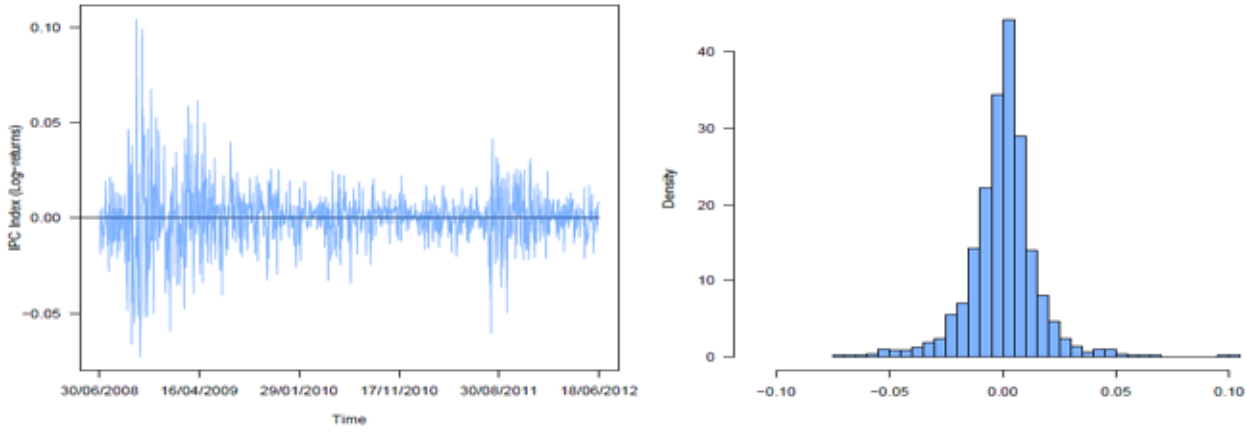
5. Modelado de rendimientos marginales

En esta sección presentamos tres ejemplos prácticos, con datos reales tomados de la Bolsa Mexicana de Valores. El objetivo es ilustrar el potencial de las mixturas Gaussianas como herramienta para modelar rendimientos financieros cuya distribución sea leptocúrtica.

Ejemplo 1. IPC; Bolsa Mexicana de Valores

En este ejemplo modelamos el comportamiento de los rendimientos diarios del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de valores. Para esto, analizamos una muestra de mil rendimientos diarios observados del 30 de junio de 2008 al 18 de junio de 2012. La gráfica mostrada en la figura 3 muestra la serie de rendimientos en el tiempo y el histograma de los mismos.

Figura 3. IPC, Rendimientos diarios.



La serie de rendimientos en el tiempo muestra contracciones y expansiones aleatorias de la volatilidad. Esta es una característica común en las realizaciones secuenciales de algunas mixturas Gaussianas. El histograma sugiere que estos rendimientos provienen de una densidad leptocúrtica.

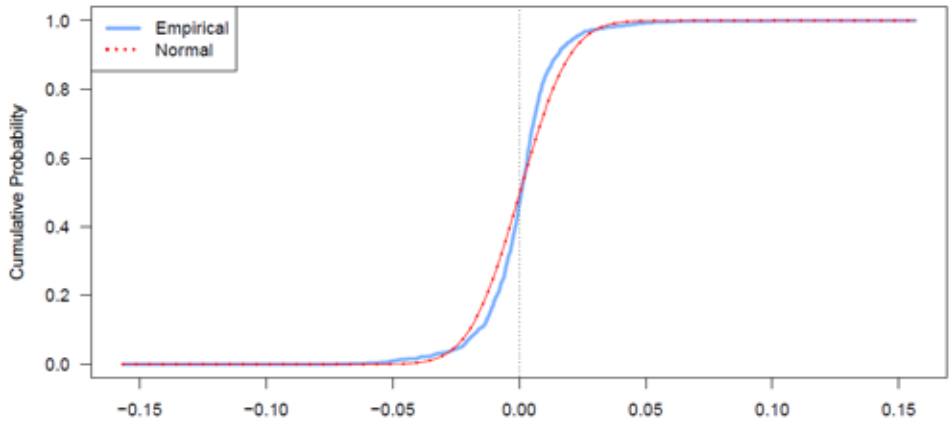
Decidimos ajustar una normal y estimar la media y la varianza por máxima verosimilitud. El resultado se muestra en la Tabla 1. La prueba Kolmogorov- Smirnov de bondad de ajuste, rechaza contundentemente la hipótesis de que los datos provienen de una distribución normal.

Tabla 1. IPC rendimientos diarios, ajuste de una normal.

μ	σ	Kolmogorov-Smirnov	p-value
0.00026	0.015	0.09	pv $\leq$ 0.01

La gráfica en la Figura 4 compara la distribución empírica de los rendimientos diarios con la distribución normal ajustada. La discrepancia entre ambos modelos es evidente.

Figura 4. IPC, ajuste de una normal.



Dado que una sola distribución normal no logra un ajuste adecuado, decidimos incrementar el número de parámetros y ajustar la siguiente mistura Gaussiana:

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + (1-\pi)\frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}\right).$$

El modelo fue ajustado por máxima verosimilitud mediante el algoritmo EM. Los resultados se muestran a continuación en la Tabla 2.

Tabla 2. IPC, Mezcla de dos normales

	Régimen Ω_1		Régimen Ω_0			
π	μ_1	σ_1	μ_0	σ_0	K-S	PV
0.2457	-0.001613	0.02764	0.000872	0.00836	0.02	pv > 0.1

La prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov no detectó evidencia contundente en contra de la mixtura Gaussiana. La gráfica en la Figura 5 compara esta mezcla de normales con la distribución empírica. La Figura 6 muestra un *pp-plot* y compara la densidad empírica de los datos con la densidad de ambos modelos; el ajuste de la mixtura es excelente.

Figura 5. IPC, Mezcla de dos normales

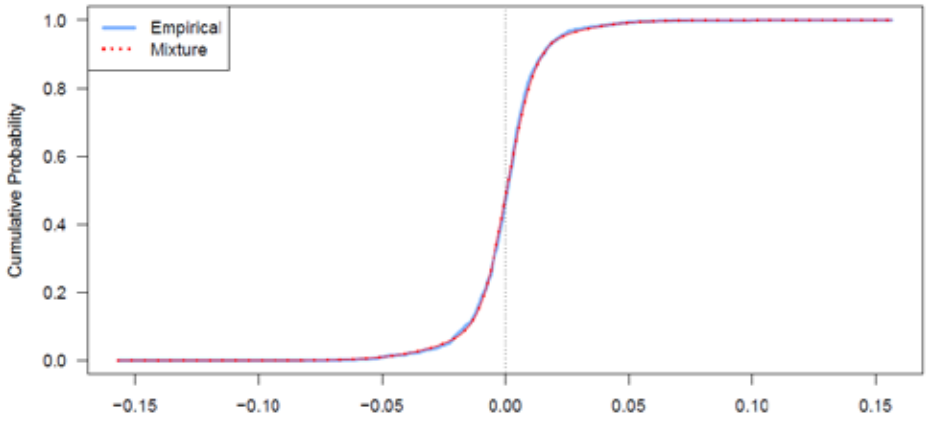
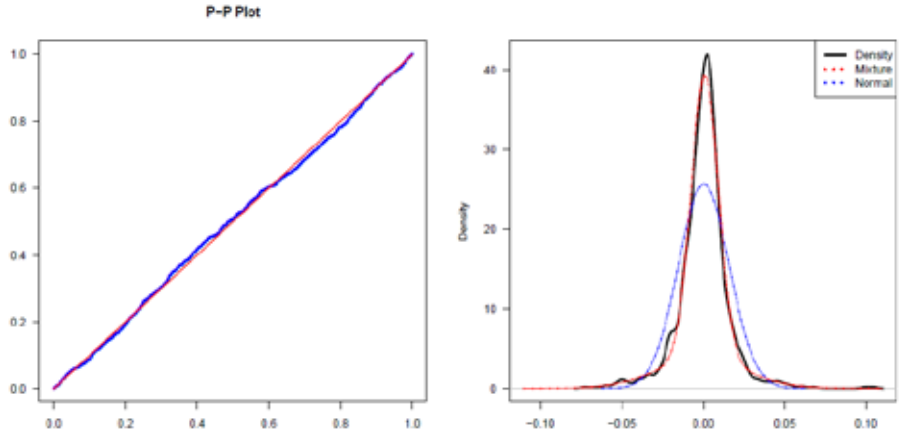


Figura 6. IPC, *PP-Plot* y comparación de densidades ajustadas.



Esta mezcla de normales identifica dos regímenes en este período de tiempo. Según este modelo, el 25% del tiempo se observa un régimen de estrés con alta volatilidad y rendimientos esperados a la baja. La mayor parte del tiempo se observa una volatilidad moderada y con un rendimiento esperado positivo.

Ejemplo 2. TELMEX y AMXL

En este ejemplo analizamos los rendimientos marginales diarios de dos acciones cotizadas en la Bolsa Mexicana de Valores: TELMEX y AMXL. El período de observación es del 4 de marzo de 2008 al 15 de abril de 2010 (un total de 529 observaciones). En ambos casos, la prueba de

Kolmogorov-Smirnov rechazó la hipótesis de normalidad. Los resultados se muestran en la Tabla 3. La falta de ajuste es también evidente en las gráficas de la Figura 7.

Tabla 3. TELMEX y AMXL, rendimientos diarios, ajuste de una normal

Título	μ	σ	**K-S**	***p-value***
TELMEX	-0.00005	0.0259	0.08	pv ≤ 0.01
AMXL	0.00008	0.0196	0.07	pv ≤ 0.01

Figura 7. TELMEX y AMXL, rendimientos diarios, ajuste de una normal.

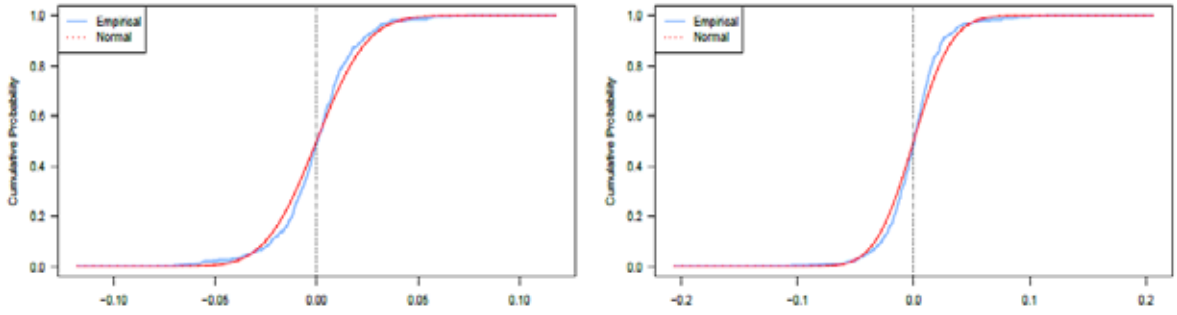


Figura 8. TELMEX y AMX L. Rendimientos diarios en el tiempo.

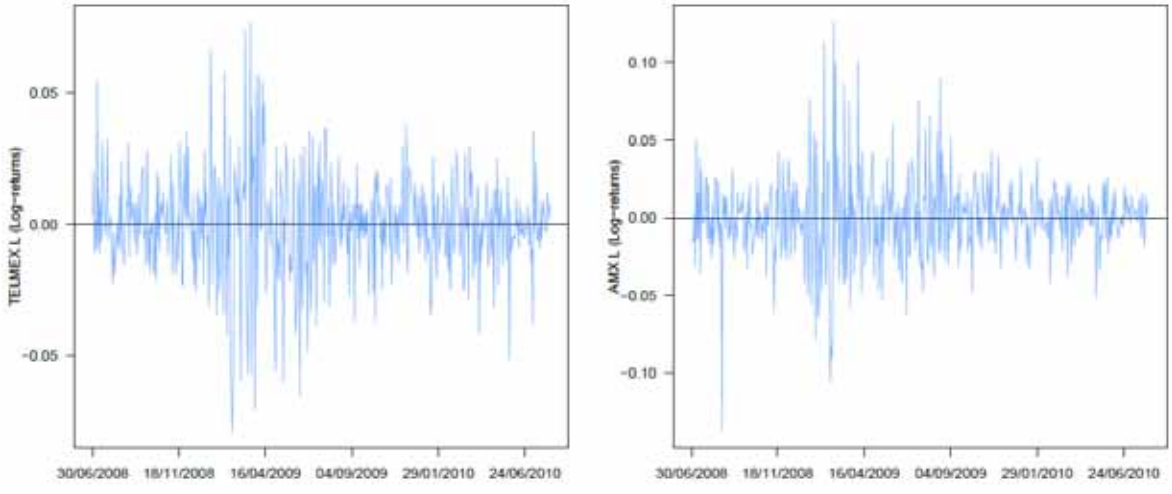
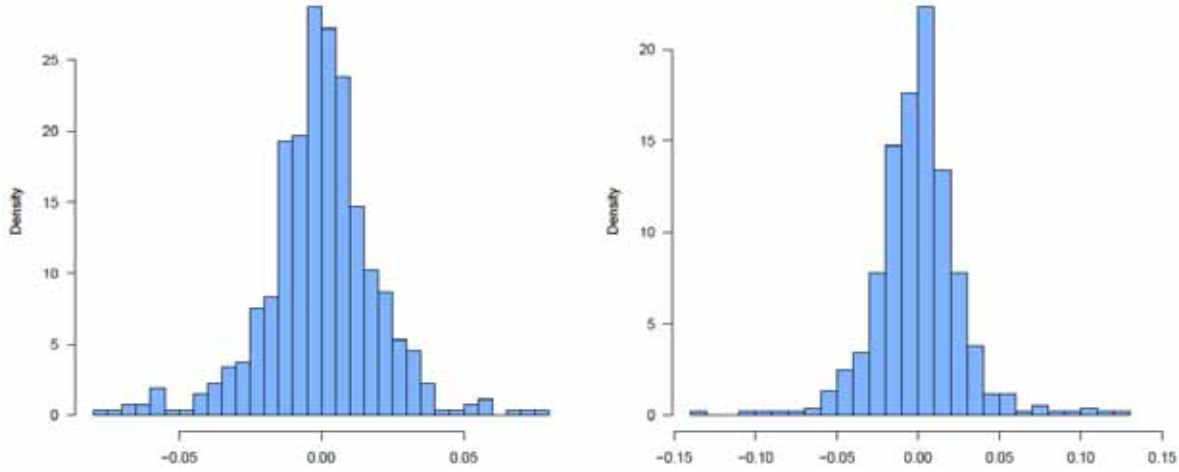


Figura 9. Histograma de los rendimientos diarios, TELMEX (izq) y AMX L (der).



Las Figuras 8 y 9 muestran un análisis gráfico para ambas acciones. Una vez más, el comportamiento de las series en el tiempo muestra contracciones y expansiones aleatorias de la volatilidad. Por otro lado, los histogramas de estos rendimientos sugieren que ambas densidades son leptocúrticas. Decidimos entonces modelar ambas densidades con la siguiente mezcla de normales.

$$f(x) = \pi \frac{1}{\sigma_1} \phi\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) + (1-\pi) \frac{1}{\sigma_0} \phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right)$$

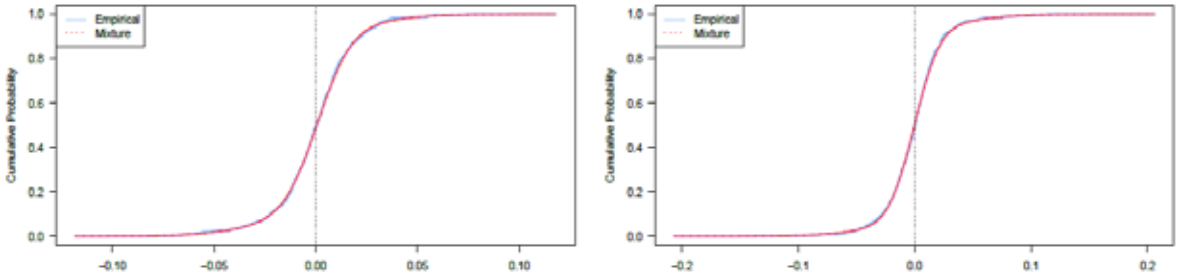
En ambos casos, los parámetros fueron estimados por máxima verosimilitud aplicando el algoritmo EM. Los resultados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. TELMEX y AMXL, rendimientos diarios, ajuste de una mixtura Gaussiana.

Título	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\sigma_1}$	$\boldsymbol{\sigma_0}$	**K-S**	***p-value***
TELMEX	0.29	0.0308	0.0123	0.02	pv $>$ 0.1
AMXL	0.18	0.0491	0.0169	0.02	pv $>$ 0.1

La bondad del modelo se evalúa con la prueba de Kolmogorov-Smirnov (Tabla 4) y se ilustra con dos gráficas en la Figura 10; el ajuste es casi perfecto.

Figura 10. TELMEX (izq) y AMX L (der), mixtura Gaussiana.



Es importante resaltar que este modelo consiste en la mezcla de dos normales centradas en cero y con varianzas diferentes. Es una densidad definida con tan sólo tres parámetros libres. Aunque se define con un parámetro más que la normal, la calidad del ajuste es mucho mayor. Esta mixtura sugiere que el comportamiento de los rendimientos sigue dos regímenes: un régimen de estrés con alta volatilidad (que en el caso de TELMEX se observa el 29% del tiempo) y otro de baja volatilidad observado la mayor parte del tiempo. De acuerdo con este enfoque, el comportamiento de los rendimientos cambia de un régimen a otro de manera aleatoria.

6. Modelado de rendimientos financieros conjuntos

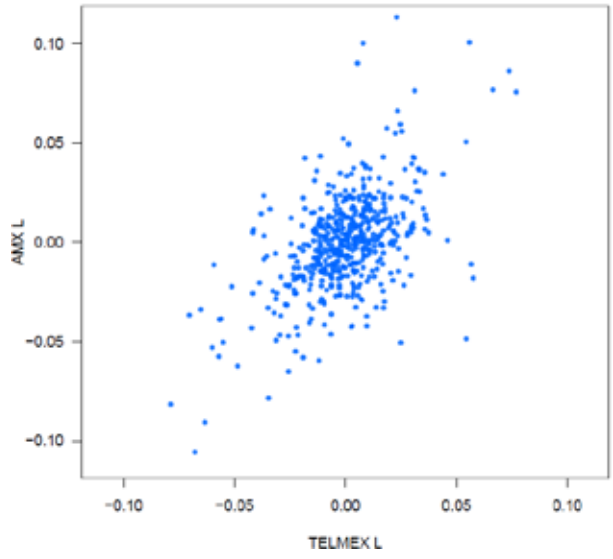
Los ejemplos desarrollados en la sección anterior ilustran con claridad el potencial de las mixturas Gaussianas finitas para modelar con precisión el comportamiento de los rendimientos financieros de los activos cotizados en la Bolsa Mexicana de Valores. Sin embargo, no ofrecen información sobre el comportamiento conjunto de los activos. En esta sección presentamos dos ejemplos prácticos en los que se estima la densidad conjunta de los rendimientos de TELMEX y AMX L. En uno se construye una mezcla de dos normales bivariadas. En el otro la densidad se estima por medio de una cópula Gaussiana que une a dos marginales que son mixturas Gaussianas univariadas. Los dos modelos se comparan y se evalúan en un análisis sencillo de bondad de ajuste.

Ejemplo 3. Mixtura Gaussiana en $\mathbb{R}^2$.

Analizamos los rendimientos conjuntos de TELMEX y AMX L que se aparecen en la Figura 11. Es una muestra de 529 realizaciones del vector aleatorio $\mathbf{V}$, en el que la primera entrada contiene

los rendimientos de TELMEX y la segunda los de AMX L. La forma del diagrama de dispersión sugiere que la densidad conjunta es unimodal y que la correlación entre X y Y es positiva. Si se observa con cuidado, es posible ver que las capas profundas de la nube de puntos sugieren una estructura de dependencia diferente a la estructura de dependencia en las capas más superficiales.

Figura 11. TELMEX y AMX L, Rendimientos conjuntos.



Se ajustó una mezcla de dos normales bivariadas como se define al final de la sección 3. El modelo ajustado es de la forma

$$f(x,y) = \pi\phi(x,y|\mu_1,\Sigma_1) + (1-\pi)\phi(x,y|\mu_0,\Sigma_0)$$

Cada una de las densidades en esta mezcla es una normal bivariada. Depende de cinco parámetros y tiene la siguiente forma funcional:

$$\phi(x,y|\mu,\Sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{y\sqrt{1-\rho^2}}} e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

En la ecuación anterior: los parámetros μ_x y μ_y representan las esperanzas marginales de entre X y Y respectivamente (*i.e.*, TELMEX Y AMX L respectivamente); los parámetros σ_x y σ_y son las

desviaciones estándar de X y Y; el parámetro ρ representa el coeficiente de correlación lineal entre ambas variables.

Los parámetros del modelo se estimaron por Máxima Verosimilitud aplicando en algoritmo EM, tal como se explica al final de la sección 4. Los resultados se muestran en la Tabla 5:

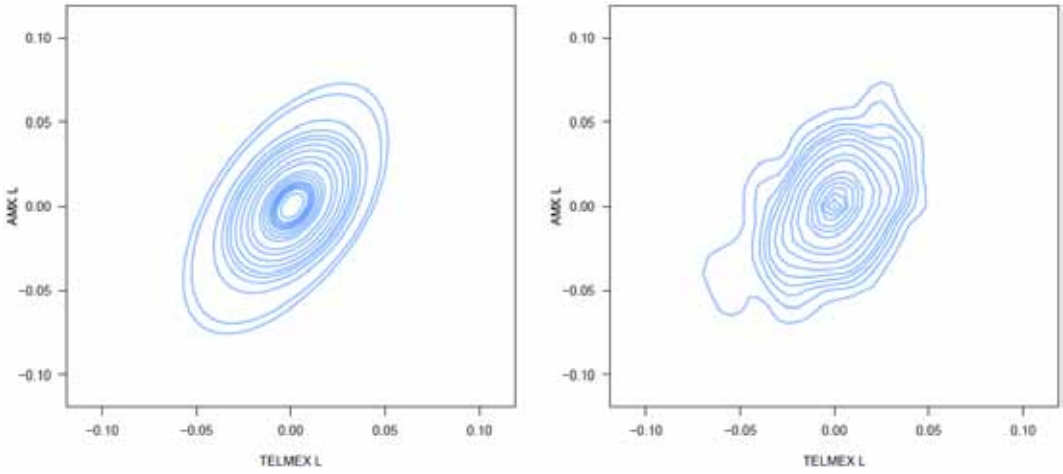
Tabla 5. TELMEX y AMXL, ajuste de una mixtura Gaussiana bivariada.

Régimen j	π_j	μ_{xj}	μ_{yj}	σ_{xj}	σ_{yj}	ρ_j
j = 0	0.7644	0.0008	0.0004	0.0123	0.0160	0.4159
j = 1	0.2358	0.0030	0.0014	0.0326	0.0449	0.5725

Este modelo describe el comportamiento conjunto de TELMEX y AMX L en términos de dos normales bivariadas. La primera define un régimen de operación regular que se observa el 76% del tiempo. Este primer régimen se caracteriza por mantener un comportamiento estable de poco riesgo, pero con un moderado rendimiento promedio. El segundo régimen puede describirse como un régimen de estrés que se observa el 24% del tiempo, con rendimientos promedio más altos, con mayor volatilidad y con una mayor dependencia entre los rendimientos. De acuerdo a este enfoque, los rendimientos conjuntos cambian de régimen en forma aleatoria. Este modelo describe con sencillez y claridad el comportamiento conjunto de ambas acciones. Esta descripción brinda información importante sobre la estructura de dependencia, así como de los rendimientos esperados y de volatilidad en ambas acciones.

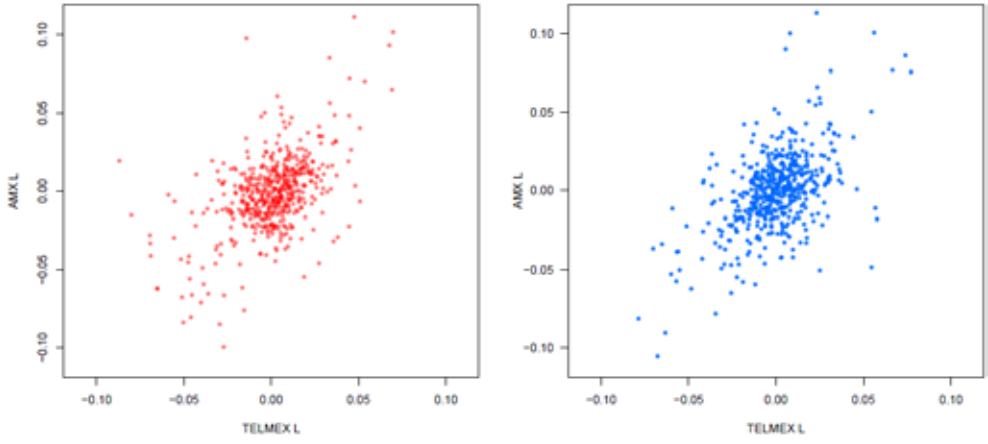
En una primera evaluación del ajuste del modelo, la Figura 12 muestra las curvas de nivel de la mixtura Gaussiana ajustada a TELMEX y AMX L, y las compara con las curvas de nivel de una densidad empírica estimada con kérneles de suavizamiento. Ambas gráficas son similares y sugieren un ajuste conveniente del modelo.

Figura 12. TELMEX y AMX L, mixtura Gaussiana (Izq.) y densidad empírica (Der.)



Las curvas de nivel de la mixtura Gaussiana son siempre elípticas. La orientación de los ejes cambia conforme el nivel de la densidad disminuye. Su eje principal toma pendientes más pronunciadas en las curvas exteriores. Esto se debe a que el coeficiente de correlación es mayor en el régimen de alta volatilidad.

Figura 13. Muestra simulada (Izq.), TELMEX y AMX L (Der.)



La Figura 13 contrasta la muestra observada de TELMEX y AMX L contra una muestra de 529 puntos simulados a partir de la mixtura Gaussiana ajustada. Los patrones de comportamiento son similares en ambos diagramas de dispersión, esto sugiere que el ajuste de la mezcla de normales es adecuado.

Ejemplo 4. Aplicación de una cópula Gaussiana

Consideramos nuevamente las 529 observaciones conjuntas (X, Y) de TELMEX Y AMX L junto con sus respectivas distribuciones marginales F_X y F_Y.

Sea $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una distribución conjunta. Entonces, el Teorema de Sklar (*Nelsen 1999*) garantiza la existencia de una función $C: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$H(x, y) = C\big(F_X(x), F_Y(y)\big) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

La función C se conoce como la función cópula de la distribución conunta H. Es una función de distribución definida en el cuadro unitario, que evaluada en las marginales reconstruye la distribución conjunta H. Cuando F_X y F_Y son continuas, el mismo Teorema de Sklar garantiza que C es única (*Nelsen 1999*).

Un modelo de cópula Gaussiana se genera al ocupar a la distribución normal bivariada como función cópula. Es decir, cuando definimos

$$C(u, v|\rho) = \Phi_\rho[\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)] \;\; 0 < u < 1, 0 < v < 1$$

En la ecuación anterior, $\Phi_\rho$representa la distribución conjunta de una normal bivariada centrada en el origen, con varianzas unitarias y con coeficiente de correlación ρ. Al definir $u = F_X(x)$ y $v = F_Y(y)$, la distribución de probabilidad conjunta de F_{XY} se modela como

$$F_{XY}(x, y) = \Phi_\rho[\Phi^{-1}(F_X(x)), \Phi^{-1}(F_Y(y))],$$

y la densidad conjunta correspondiente queda dada por

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\phi_\rho\big[\Phi^{-1}\big(F_X(x)\big), \Phi^{-1}\big(F_Y(y)\big)\big]}{\phi\big[\Phi^{-1}\big(F_X(x)\big)\big]\phi\big[\Phi^{-1}\big(F_Y(y)\big)\big]} f_X(x) f_Y(y)$$

Utilizamos este modelo de cópula Gaussiana para estimar la densidad conjunta de los rendimientos de TELMEX y AMX L. Las distribuciones marginas se calcularon a partir de las mixturas Gaussianas estimadas por Máxima Verosimilitud y cuyos parámetros se definen en la Tabla 4 de la Sección 5. El coeficiente de correlación se estimó también por Máxima Verosimilitud y su valor es

$$\hat{\rho} = 0.4968$$

Las gráficas presentadas en las Figuras 14 y 15 ofrecen una evaluación gráfica de la bondad de ajuste del modelo. La Figura 14 muestra las curvas de nivel de la densidad conjunta obtenida a partir de la cópula Gaussiana. Las curvas del modelo teórico son semejantes a las curvas de nivel de la densidad empírica, y el patrón mostrado por el diagrama de dispersión de los datos simulados también es semejante al observado en la muestra verdadera. Podemos concluir al nivel de este análisis gráfico que el modelo de cópula Gaussiana también ofrece un ajuste satisfactorio.

Figura 14. TELMEX y AMX L, cópula Gaussiana (Izq.) y densidad empírica (Der.)

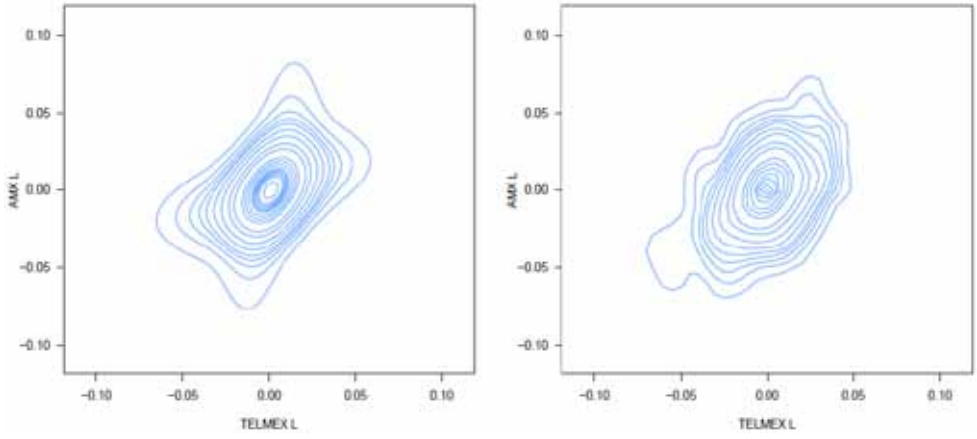
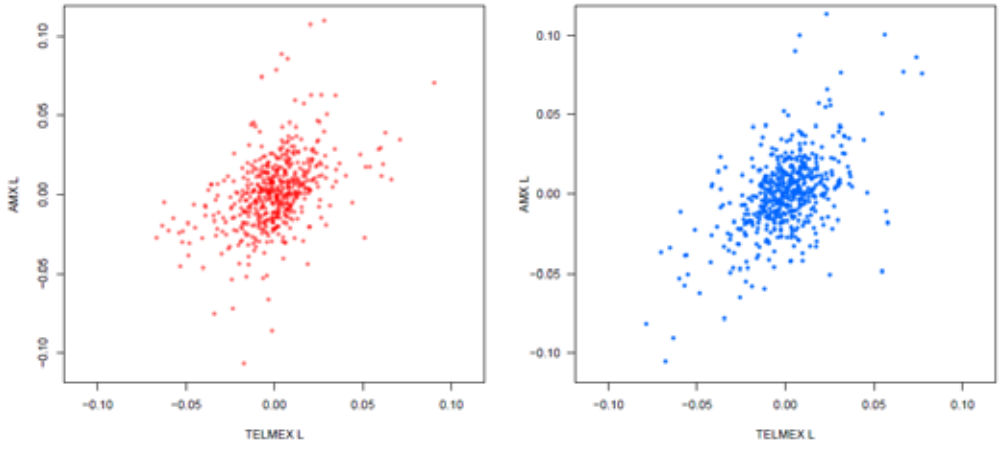


Figura 15. Muestra simulada por cópula Gaussiana (Izq.), TELMEX y AMX L (Der.)



Análisis comparativo de ambos modelos

Tanto el modelo de mezclas de normales como el modelo de cópula Gaussiana parecen ofrecer un buen ajuste. Las curvas de nivel de ambos modelos son, en alguna forma, similares a las curvas de nivel de la densidad empírica suavizada. Sin embargo, existen diferencias notables en la forma de las densidades conjuntas definidas por estos modelos. Cada enfoque parece captar aspectos diversos de la verdadera distribución conjunta.

Los dos modelos tienen curvas de nivel elípticas al centro. Sin embargo, mientras la mezcla de normales mantiene este patrón y sólo modifica la inclinación de las elipses en diferentes valores de la densidad, el modelo basado en la cópula Gaussiana evoluciona y deforma sus curvas en los niveles más bajos de la función. Aunque estas deformaciones mantienen cierta semejanza con las curvas de nivel empíricas, es difícil creer que la verdadera densidad conjunta tome formas tan irregulares. Pese a tener un menor número de parámetros, la copula Gaussiana pareciera ser demasiado sensible al ruido aleatorio presente en la zonas de baja densidad de la muestra. El efecto de esta aparente sensibilidad, provocó una mayor volatilidad (probablemente exagerada) en las muestras simuladas y graficadas en la Figura 15.

Una ventaja de la mezcla de normales bivariadas, es que permite modelar la estructura de dependencia de los dos rendimientos considerados con mayor flexibilidad que el modelo de cópula Gaussiana. Esto se refleja en los cambios de orientación de las curvas de nivel elípticas en los diferentes valores de la densidad.

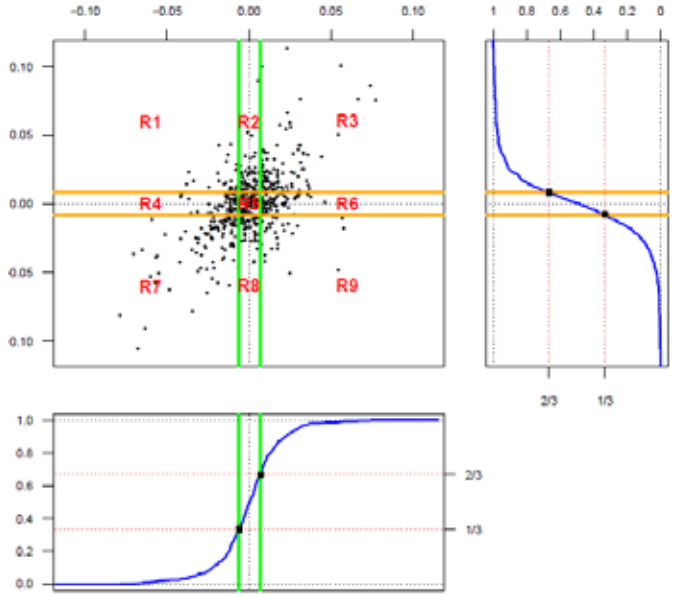
Con el objeto de completar este análisis comparativo, decidimos evaluar la calidad del ajuste mediante una prueba Ji-Cuadrada. Para esto, dividimos el plano cartesiano en nueve regiones mutuamente excluyentes, y contrastamos el número esperado de observaciones para cada región, contra el número de observaciones en muestra, realmente contenido dentro de la misma región. La idea se ilustra con claridad en la figura 16. Las probabilidades de cada región bajo la hipótesis nula se calcularon numéricamente. Los resultados del análisis, se muestran en la Tabla 6 a continuación.

Tabla 6. Prueba de bondad de ajuste para distribuciones conjuntas.

Modelo	**Estadística** χ^2	***p-value***
Mezcla de normales bivariadas	2.0640	0.9790
Cópula Gaussiana y mezclas de normales marginales	4.0997	0.8480

De acuerdo a la estadística χ^2, ambos modelos son satisfactorios, aunque la mixtura Gaussiana bivariada parce tener un ajuste ligeramente mejor.

Figura 16. TELMEX y AMX L, Partición del espacio para prueba Ji-Cuadrada



7. Discusión

La no normalidad de los rendimientos financieros es una realidad que debemos considerar, tanto en la práctica como en el trabajo académico. Con frecuencia, las distribuciones de los rendimientos financieros son asimétricas y leptocúrticas. Por esta razón, los modelos de mixturas ofrecen una alternativa flexible y parsimoniosa para modelar distribuciones en finanzas. Al ser combinaciones lineales convexas de densidades normales, las mixturas Gaussianas heredan de la

distribución normal algunas propiedades convenientes. Por ejemplo, son cerradas ante la convolución.

Las mezclas de normales parecen ser fácilmente adaptables a las densidades empíricas de los rendimientos. Artículos recientes muestran su aplicación exitosa en mercados europeos y asiáticos. Este trabajo mostramos evidencia de su potencial con datos del mercado mexicano.

En contraste con otras publicaciones, nuestro análisis no se limita al caso univariado. También damos evidencia sobre la utilidad de las mixturas para modelar rendimientos conjuntos. En este contexto, el enfoque de cambio aleatorio de régimen permite modelar y explicar satisfactoriamente la estructura de dependencia estocástica a partir de dos o más coeficientes de correlación.

En la Sección 6 se ajusta una mezcla de normales bivariadas y se evalúa comparándola con un modelo basado en la Cópula Gaussiana. Ambos modelos son satisfactorios; sin embargo, el ajuste de la mixtura es ligeramente superior y ofrece información más clara sobre la estructura de dependencia.

Una limitante de las mixturas Gaussianas es que son capaces de ajustar distribuciones con colas pesadas.

8. Conclusión

Hemos presentado evidencia clara de que las mixturas Gaussianas son un medio eficiente y competitivo para modelar las distribuciones de los rendimientos financieros. Por sus características, ofrecen al administrador de riesgos una combinación atractiva de flexibilidad y parsimonia. La posibilidad de ajustarlas fácilmente por Máxima Verosimilitud las convierte en una herramienta atractiva en la práctica profesional.

Este trabajo incluye ejemplos prácticos basados en datos reales tomados del Mercado Mexicano. Incluye ejemplos en donde densidades asimétricas y leptocúrticas que no pueden modelarse satisfactoriamente con una normal, son modeladas en forma muy exitosa con mixturas Gaussianas finitas. En contraste con otros trabajos, hemos explorado el potencial de las mixturas en la estimación de densidades conjuntas. De estos ejemplos, podemos concluir que las mixturas

multivariadas no sólo ofrecen un excelente ajuste, sino que además permiten modelar la estructura de dependencia por medio de un enfoque claro de cambio de régimen.

Las mixturas Gaussianas heredan propiedades importantes de la distribución normal. Por lo tanto, consideramos importante nos invita a considerarlas como fundamento teórico en posibles extensiones de los modelos y criterios que hoy son un estándar en Finanzas Cuantitativas. Concretamente, creemos que su aplicación en el cálculo del Valor en Riesgo, así como en la optimización de portafolios de inversión merece ser estudiada con profundidad.

Bibliografía.

Behr A., Poetter U. (2009); Modelling marginal distributions of ten European stock market index returns, *International Journal of Finance and Economics*, Issue 28, pp. 104-118.

Black F., Scholes M. (1973); The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political economy*, Vol. 81, No. 3, 637-654.

Buckley I., Saunders D., Seco L. (2008); Portfolio optimization when asset returns have the Gaussian mixture distribution, *European Journal of Operational Research*, Vol. 185, No. 3, pp. 1434-1461.

Esch D. (2010); Non-Normality, facts and fallacies, *Journal of Investment Management*, Vol. 8, No. 1, pp 49-61.

Fama E.F. (1965); The behavior of Stock Market Prices, *The Journal of Business*, Vol. 38, No. 1, pp. 34-105.

Jondeau E., Poon S.H., Rockinger M. (2000); *Financial Modeling under Non-Gaussian Distributions*, Springer.

Kamaruzzaman Z.A., Isa Z., Ismail M.T. (2012); Mixtures of normal distributions, application to Bursa Malaysia Stock Market Indices, *World Applied Sciences Journal*, Vol. 16, No. 6, 781-790.

McLachlan G.J., Krishnan T. (2008); *The EM algorithm and extensions*, Wiley.

McLachlan G.J., Peel D. (2000); *Finite Mixture models*, Wiley.

Mota P.P. (2012); Normality assumption for the log-return of the stock prices, *Discussiones Mathematicae, Probability and Statistics*, Vol. 32, pp. 47-58.

Nelsen R.B. (1999); *An introduction to Copulas*, Springer.

Tan K., Chu M. (2012); Estimation of Portfolio Return and Value at Risk using a Class of Gaussian Mixture Distributions, *The International Journal of Business and Finance*, Vol. 6, No. 1, pp. 97-107.

Zhang M.H., Cheng Q.S. (2005); An approach to VaR for capital markets with Gaussian Mixtures, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 168, pp. 1079-1085.

CAPÍTULO XXV
Aspectos económicos de la planeación de la producción en líneas de manufactura bajo condiciones de incertidumbre.

Gilberto Pérez Lechuga
Escuela Superior de Apan**,** Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Ali Aali Bujari
Escuela Superior de Apan, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Francisco Venegas Martínez
Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional

Resumen

La planeación de la producción es un problema clásico de ingeniería donde se involucran, proveedores, manufactura, inventarios, materia prima, explosión de materiales, subensambles, producto terminado y más. En esta actividad existen 4 elementos básicos que determinan los resultados de la misma: a) la topología de la cadena de suministro, b) los tiempos de operación, c) los costos del trabajo y d) la incertidumbre asociada al sistema. La incertidumbre se debe a la estocasticidad inherente a los sistemas complejos multivariables que evolucionan en el tiempo, en este caso, la demanda, los costos de operación, la disponibilidad de materiales y equipo, los tiempos de manufactura, paros, arreglos de distribuciones de equipo, entre otros.

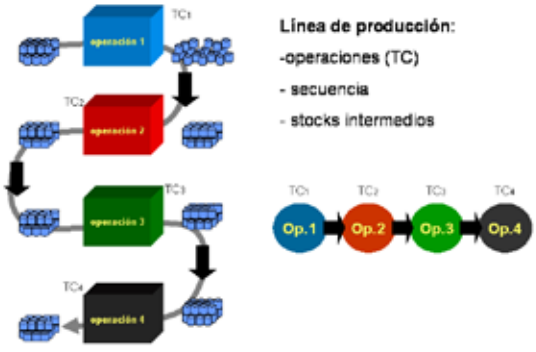
En esta propuesta se aborda dicha instancia desde una perspectiva ingenieril y econométrica resaltando los campos más importantes donde existen áreas de oportunidad para practicantes, ingenieros y científicos de la manufactura. Se discuten las siete áreas emergentes más importantes de esta especialidad y se mencionan métodos y autores relevantes del tema.

1. Introducción

La manufactura se define como el proceso de convertir materia prima en componentes o productos terminados para satisfacer las expectativas de un cliente. Durante este proceso, generalmente se emplean máquinas que efectúan trabajos en grandes volúmenes para producir un bien a través de transformaciones físicas, químicas o mecánicas.

Una línea de manufactura se forma de un flujo continuo de materiales, áreas de almacenaje y procesos donde la pieza o producto a fabricar visitan cada estación una sola vez. Normalmente, al inicio de cada línea de ensamble existe un almacén de materia prima y al final de ésta, un almacén de producto terminado. Los tiempos de permanencia del producto en cada estación son casi siempre aleatorios sin importar si cada estación está operada automáticamente. La fuente de aleatoriedad proviene de eventos como fallas de energía eléctrica, reparaciones, paros por materiales, cansancio de operarios y más. En algunos casos, la línea maneja también almacenes temporales o áreas de almacenaje temporal (Figura [1] 1) para desacoplar la operación secuenciada entre máquinas, (Buzacott & Shanthikumar, 1993), (Pérez, Pérez, & Venegas, 2015).

Figura (1) Operaciones en una línea de manufactura.



La modelación estocástica de los sistemas de manufactura es un proceso interactivo que involucra a la aleatoriedad. Este método ayuda tanto a los tomadores de decisiones a comprender la dinámica del comportamiento del proceso, como a evaluar la construcción de una planta de manufactura y a organizar el Layout de la misma.

Una vez establecido el modelo, la operación de éste permite la determinación de los cuellos de botella del proceso y las estaciones con ocio asociadas al tiempo de fabricación entre otras cosas. Las ventajas de trabajar vía modelos, es su costo relativamente barato y su alta confiabilidad para detectar oportunidades de mejora desde el diseño hasta la operación de la planta. La introducción de la aleatoriedad se hace en forma de distribuciones de probabilidad (teóricas o empíricas) asociadas a los diversos eventos que presentan incertidumbre. Dichas funciones de probabilidad pueden derivarse del análisis estadístico de los eventos medidos in situ, es decir, de la observación física de las operaciones de planta en tiempo real.

[1] Figura tomada de: http://www.leanroots.com/line_balancing.html

Las distribuciones más comúnmente usadas para representar a los eventos aleatorios son la distribución de Poisson para eventos discretos, y en el campo de las distribuciones continuas la exponencial, para representar al tiempo y la distribución normal entre otras. En la práctica, los modelos estocásticos son más valiosos que los modelos deterministas ya que representan con más veracidad la fenomenología del sistema, (Pérez, Pérez, & Venegas, 2015), (Mula, Poler, García-Sabater, & Lario, 2006).

En materia económica y financiera, la influencia de la manufactura va mucho más allá de la contribución directa al producto nacional y del empleo. La industria manufacturera es un negocio global que sustenta toda la actividad económica de un país. El gasto en bienes representa más de la mitad de todos los gastos de consumo, mientras que la fabricación de bienes representa alrededor de dos tercios de todas las exportaciones de la mayoría de los países desarrollados. Por ejemplo, la mano de obra de éstos crea el 4% del producto interno bruto mundial y el 6% de las exportaciones del mundo, de naciones cuya población fluctúa entre el uno y el dos por ciento de la población mundial.

La importancia económica de la manufactura radica en la idea de valor agregado. Éste es un concepto de uso corriente en la economía, y las finanzas, y representa la diferencia entre los precios del mercado y los costos de producción. En manufactura, el concepto se refiere al valor económico que gana un bien cuando es modificado en el marco del proceso productivo. El aumento en el valor agregado de un producto se logra a través de las siguientes estrategias.

- Aumentar la calidad y las especificaciones del producto
- Proporcionando niveles superiores de servicio en el suministro del producto
- La mejora de la imagen del producto a través de la comercialización.

Todas estas medidas sirven para diferenciar el producto de una empresa en particular de otros ofrecidos por los competidores. A la vista de los mercados cada vez más competitivos y los consumidores cada vez más exigentes, la capacidad de agregar valor a los productos es crucial para la prosperidad futura, (Reinert, 2008).

La importancia de la manufactura se puede resumir en seis razones: (Six reasons manufacturing is central to the economy, 2011):

1. La industria manufacturera ha sido el camino hacia el desarrollo y la clave de la prosperidad.

2. La industria manufacturera es el fundamento mundial del "Gran Poder". Las naciones más poderosas del mundo - las "grandes potencias" - son los que controlan la mayor parte de la producción mundial de la tecnología de fabricación. Es decir, no basta con tener fábricas y producir más bienes, lo que tienes que saber es cómo construir la maquinaria que fabrica a las mercancías. La clave es saber construir los "medios de producción".

3. La industria manufacturera es la causa más importante de crecimiento económico de los países desarrollados. El crecimiento de la producción de maquinaria de fabricación y mejoras tecnológicas en esa maquinaria, son los principales motores del crecimiento económico. No hay industrias de maquinaria sin un crecimiento económico sostenido de largo plazo.

4. El comercio mundial se basa en bienes, no en servicios. Un país no puede negociar servicios para la mayor parte de sus bienes. Según la OMC, el 80% del comercio mundial entre las regiones es el comercio de mercancías - es decir, sólo el 20% del comercio mundial se encuentra en los servicios, (Six reasons manufacturing is central to the economy, 2011). Si en el caso extremo de una economía, ésta se compone únicamente de los servicios, entonces sería muy pobre, porque no los podría cambiar por bienes; su moneda valdría muy poco.

5. Los servicios dependen de productos manufacturados. Los servicios son en su mayoría el acto de usar los productos manufacturados. No se puede exportar la experiencia de usar algo.

6. La fabricación crea puestos de trabajo. La mayoría de los puestos de trabajo, directa o indirectamente, dependen de la fabricación y la consolidación del sector podría proporcionar decenas de millones de nuevos puestos de trabajo.

La importancia de la manufactura en el mundo de las finanzas implica la redirección de los recursos excedentes que el sector no financiero que la economía produce, lo que significa que indirectamente, incluso las finanzas son dependientes de la fabricación. El ciclo de auge y declive funciona generalmente como esto: alguna sociedad inteligente se da cuenta de cómo sacar provecho de las tecnologías actuales de producción, generando enormes excedentes, beneficiando con ello a las fuerzas financieras, a los muy ricos, o a los militares. Estos sectores se apropian de esta riqueza y del poder para su propio beneficio, matando con ello a la gallina de los huevos de oro. En resumen: la salud de la economía depende de manera crítica de la salud del sector manufacturero, (Six reasons manufacturing is central to the economy, 2011).

La construcción de equipo para producir bienes, el diseño para la administración y el control de las líneas de manufactura y de sus áreas conexas (como la gestión de la cadena de suministro) son hoy, uno de los campos de oportunidad más importantes en el desarrollo de la economía de un país. Los métodos desarrollados para ello varían grandemente según la perspectiva empleada.

Por ello, se debe desplegar un gran esfuerzo para implantar y consolidar acciones que la beneficien, desde una perspectiva holística, de manera integral, atacando todos los frentes, y haciendo uso de aquellas herramientas que proporcionen alternativas de mejora. Esto involucra tanto a los procesos electromecánicos de diseño de sistemas de manufactura para crear manufactura como a los procesos administrativos diseñados para llevar a cabo su gestión y control. Por ello, se han investigado las 7 áreas de mayor énfasis reportadas en la literatura como los campos emergentes más importantes en la aplicación práctica de modelos matemáticos estocásticos para la planeación y el control de la operación de las grandes líneas de producción. Este material se ha resumido y se presenta en este documento como un indicador de las posibles tendencias que se siguen hoy en día con relación a este tema.

2. Los siete campos emergentes

Dada la importancia manifiesta de la manufactura en el mundo económico financiero, a continuación se identifican y discuten las áreas emergentes de oportunidad para hacer modelación matemática estocástica tendiente al análisis y optimización de los sistemas de manufactura; éstas

son: a) El Benchmarking, b) Las redes de Petri estocásticas, c) La simulación digital de sistemas discretos, d) la teoría de líneas de espera, e) El análisis de perturbación, f) La reingeniería, g) Los sistemas flexibles de manufactura.

La totalidad de ellos considera aspectos de análisis, modelación y optimización de dichos sistemas con miras a lograr beneficios incorporando en sus funciones de eficiencia.

2.1 El Benchmarking.

El Benchmarking es la práctica de un negocio para comparar las métricas clave de sus operaciones con relación a otras empresas similares. Se constituye de una comparación sistemática de los procesos de organización y actuación para crear nuevas normas o para mejorar los procesos. A menudo, se usa una evaluación comparativa para mejorar la comunicación, la profesionalización de la organización o de sus procesos o por razones presupuestarias. Normalmente, las medidas de desempeño se comparan con las medidas anteriores de la misma organización en diferentes momentos. En la práctica, existen cuatro tipos de métodos de evaluación comparativa: a) internos, b) funcional, c) competitivo y d) genérico. Benchmarking es generalmente considerado como un proceso de búsqueda y aplicación de las mejores prácticas en el mejor costo. Esta búsqueda de rendimiento se basa en la colaboración entre varias organizaciones.

El principio básico de la evaluación comparativa consiste en identificar un punto de balance, llamado el *punto de referencia* contra el cual todo lo demás se puede comparar. Introducido por la empresa Xerox en un esfuerzo para reducir sus costos de producción, los métodos de evaluación comparativa se extendieron por todo el sector industrial desde la década de los años 80's. Utilizado por primera vez como un método para comparar los costos de producción con los de sus competidores en el mismo sector, la evaluación comparativa más tarde se convirtió en algo conceptualizado y se utiliza como un método para la mejora continua de la calidad en cualquier sector.

Los métodos paramétricos más usados para hacer comparaciones en el benchmarking son los mínimos cuadrados ordinarios y corregidos, los mínimos cuadrados cóncavos no paramétricos, el análisis estocástico de frontera, la gestión de la cadena de suministro y el análisis evolvente de datos (DEA).

2.2 La redes de Petri estocásticas

Las redes de Petri estocásticas son un formalismo muy conveniente para la representación y evaluación de los sistemas dinámicos discretos. La distribución de los procesos estocásticos representando en el tiempo la evolución de un sistema de manufactura es el tópico central de esta herramienta y es la base fundamental para la evaluación cuantitativa del comportamiento del modelo. Frecuentemente, el análisis trascendente de los modelos de manufactura es muy complejo para tratarse de forma cerrada llegando a ser la simulación, la alternativa más viable para el análisis de éstos.

Estos modelos están bien adaptados para usarse en la representación de algunos sistemas de manufactura donde las actividades de cada estación de trabajo son representadas bajo condiciones de precedencia y concurrencia.

Formalmente, una red de Petri es una tupla de cuatro componentes $N = (P, T, F, W)$, donde P es un conjunto finito no vacío de $n = |P|$ lugares, T es un conjunto finito no vacío de $|T|$ transiciones, donde los lugares y las transiciones son conjuntos disjuntos tales que $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$. Aquí, F representa la relación de flujo del sistema (conjunto de arcos dirigidos) y es tal que $dom(f) \cup range(f) = P \cup T$, y $W : F \rightarrow \mathcal{N}^+$ asigna un valor a cada arco con $f \in F$. Esta forma de representar a los sistemas hace posible que puedan llevarse a programas de computadora y analizarse bajo distintos contextos y escenarios. Con ello, se le facilita al tomador de decisiones a comprender las relaciones antecedentes y consecuentes de los procesos involucrados y a vislumbrar las consecuencias de alterar el orden en las técnicas de fabricación. El método puede manejar funciones tales como la flexibilidad de enrutamiento, recursos compartidos, tamaños de lote, concurrencia y más.

Las redes de Petri estocásticas han aportado un excelente medio de trabajo que, combinado con la heurística forman una pareja muy poderosa para la programación de los sistemas flexibles de manufactura.

2.3 La simulación digital de sistemas discretos

La simulación de eventos discretos es el proceso de codificar el comportamiento de un sistema complejo en una secuencia ordenada de eventos bien definidos. Aquí, un evento es cualquier actividad del sistema que involucre un cambio específico en un punto del tiempo.

En la industria manufacturera, la simulación es una herramienta de trabajo muy útil y valioso. Ésta se usa para comprender el comportamiento del sistema global o una parte de éste. También se le utiliza para comprender cómo reacciona el sistema a cambios imprevistos, por ejemplo en los Layout originalmente planeados, experimentando con diferentes configuraciones del mismo y definiendo con toda anticipación cómo se debe adecuar y/o modificar antes de operarlo a nivel real. El costo de construir y operar un modelo de simulación es relativamente bajo y es una herramienta de análisis rápido y seguro.

Los siguientes son algunos de los temas específicos en que se utiliza la simulación: a) determinación del número y tipo de máquinas para un objetivo particular, b) determinación del número, tipo y disposición física de los transportadores y otros equipos de apoyo, c) localización y cálculo del tamaño de los almacenes del inventario, d) evaluación de los cambios relacionados con el volumen de producto o mezcla, e) evaluación del efecto de una nueva pieza de equipo en un sistema de fabricación existente, f) evaluación de inversiones de capital, g) planeación de la mano de obra, h) análisis del rendimiento del equipo, i) análisis del tiempo en sistema, j) análisis de cuellos de botella, k) programación de la producción, l) análisis de diferentes políticas de inventario, m) estrategias de control, n) análisis de confiabilidad, o) políticas de control de calidad, p) rendimiento de materiales y equipo, q) tiempo de la producción en el sistema, r) tiempo y cantidad de piezas en cola , s) tiempos de entrega, t) utilización del equipo y de la mano de obra y más, (Hosseinpour & H. Hajihosseini, 2009).

El uso de la simulación ofrece demasiados beneficios pues permite revisar y validar los sistemas de automatización de procesos, realizar pruebas de aceptación del software y capacitar a los operadores de las industrias de proceso. Muchas plantas están siendo operadas con materias primas cuyos costos cambiantes se basan con frecuencia en las condiciones de mercado. Esto crea oscilaciones constantes e inestabilidades en las operaciones unitarias. Además, muchas unidades se ejecutan a capacidad con un equipo de control sofisticado, haciendo que las operaciones sean mucho más exigente. Los errores humanos son costosos, no sólo en términos de residuos, fallas en los equipos, las catástrofes ambientales y de seguridad de los trabajadores. Con las demandas del negocio de hoy y fuerza laboral que envejece, la necesidad de que los operadores bien entrenados está aumentando.

Una de las variantes del uso de la simulación consiste en el uso de simuladores de entrenamiento para operadores. Ésta, sigue siendo una de las mejores maneras de entrenar a nuevos operadores y refrescar las habilidades de los ya experimentados. La técnica permite aprender la funcionalidad del sistema de automatización de procesos sin la presión de control de la planta real. Aquí, se convive tanto con la formación normal y anormal, situación son posibles sin poner en peligro la planta, el personal de medio ambiente.

Hoy, en esta economía cambiante todo el mundo quiere reducir costos. Nadie quiere gastar innecesariamente. Cuando los presupuestos son ajustados, se sugiere reconsiderar la aplicación de uno o más proyectos. Aquí, la simulación interviene para ayudar al tomador de decisiones al respecto. Algunas razones son (Sturrock, 2015):

1. Reducción de gastos. El efectivo es apretado. Nadie se puede permitir el lujo de perder ni un solo dólar. Pero, ¿cómo saber realmente lo que es una buena inversión?. Simular para asegurarse de que realmente se necesita lo que se está comprando. Un resultado frecuente del simulador es aquél que está destinado a justificar las compras no justificadas. Una simulación puede ahorrar cientos de veces su costo con el reembolso inmediato.

2. Optimizar el uso de lo que se tiene. ¿Podría utilizarse una reducción en el costo? ¿Sería útil para mejorar la satisfacción del cliente?. La respuesta sería siempre sí, pero más aún en tiempos

difíciles. ¿Cómo se puede mejorar, sobre todo con una inversión mínima? La simulación es una forma comprobada para encontrar los cuellos de botella e identificar a menudo oportunidades de bajo costo para mejorar su funcionamiento.

3. Cambio de control. En una economía en crisis a menudo la empresa utiliza sus instalaciones en formas nuevas y creativas - quizás ejecutando la producción de productos en nuevas formas o en nuevos lugares. ¿Cómo saber si estas nuevas y creativas iniciativas realmente funcionan? ¿Cómo saber que no van a costar más que ahorrar?. La simulación ayuda a descubrir las interacciones ocultas que pueden causar grandes problemas. Diferente no siempre es mejor. Simular primero para evitar errores costosos.

4. Mantener y/o mejorar el talento. Algunas personas que de otro modo podrían ser despedidos pueden tener las habilidades para ser parte de un equipo SWAT de simulación. Al permitir que participen en proyectos de simulación, es probable que se logren mejoras de reducción de costos y productividad suficientes que pagan por sí mismos. Como bono adicional, el equipo va a aprender mucho acerca de sus sistemas, la gente, y la comunicación, obtendrán conocimiento que mejoren su valor y las contribuciones de largo después de que el proyecto esté terminado.

5. Reducir el riesgo. Frecuentemente, los tomadores de decisiones se ven obligados a hacer cambios. ¿Cómo saber que son los cambios adecuados? Será un poco más, un poco menos, o un enfoque diferente dará mejores resultados? ¿Cómo se mide?. Una fuerza de la simulación es la capacidad para evaluar de manera objetiva los diversos enfoques y configuraciones.

2.4 La teoría de líneas de espera

Las líneas de espera son un método matemático de análisis de las congestiones y demoras de espera que se forman en una línea. Esta herramienta examina cada componente de espera en la cola para ser servido, incluyendo el proceso de llegada, proceso de servicio, número de servidores, el número de plazas del sistema y el número de clientes que se van atender. Las aplicaciones de la vida real de la teoría de colas incluyen, proporcionar más rápido servicio al cliente, mejorar el flujo de tráfico, crear un sistema de órdenes de envío de manera eficiente

desde un almacén y el diseño de los sistemas de telecomunicaciones tales como los centros de llamadas.

A la fecha, se ha desarrollado una amplia gama de técnicas para abordar el diseño de sistemas de fabricación y problemas operativos. En la práctica existen dos tipos de modelos más usuales, los modelos generativos y los modelos evaluativos. Los modelos generativos proporcionan al usuario una "solución óptima" que satisface la función objetivo del usuario pero se basan en supuestos no siempre congruentes con la realidad. Los modelos de evaluación, no lo hacen, en su lugar, éstos evalúan un conjunto dado de decisiones proporcionando al usuario las medidas de rendimiento. Para cuestiones prácticas, ambos modelos se complementan.

Para fines prácticos, los modelos que usan líneas de espera clasifican a los sistemas manufactureros por su volumen de producción de los cuales se derivan tres sub grupos: a) El trabajo en masa, b) el trabajo por lote, c) el trabajo en piso, (Papadopoulos & Heavey, 1996). El trabajo en masa genera grandes volúmenes de productos y hace uso de instalaciones secuenciadas donde cada estación de trabajo efectúa una o más operaciones sobre el producto que avanza siguiendo la topología de la línea. Esta característica aporta una inmejorable oportunidad para analizar al sistema desde una perspectiva de líneas de espera. Los clientes (el producto) esperan a ser atendidos por un servidor (la estación de trabajo) bajo una variedad infinita de configuraciones. Aquí, interesa medir factores de producción esperada, eficiencia de la producción y más. Dos referencias altamente especializadas en este tema son (Buzacott & Shanthikumar, 1993), (Pérez, Gress, Karelyn, & Orán, 2010).

En estos modelos, cada línea de producción es un arreglo en serie consistente de K estaciones (S_i). En cada estación existe un buffer B_i que la antecede. En particular, la capacidad del buffer en la primera estación puede ser finita o infinita. Cada pieza a manufacturarse pasa por cada estación donde se le efectúan una o más operaciones hasta abandonar el sistema como productos terminados. Los supuestos más importantes de los modeles de líneas de espera en la modelación de sistemas de manufactura son: a) la línea opera en condiciones estado-estable, b) todas las variables aleatorias son independientes, c) los tiempos de transporte entre estaciones son cero, d) las fallas entre máquinas son independientes y sólo pueden fallar cuando están operando, e) no

existen piezas rechazadas, f) sólo se modela una parte a la vez, g) todas las piezas avanzan en una estricta disciplina Primero en Entrar, Primero en Salir (PEPS), h) se puede hacer mantenimiento y reparación de las máquinas cuando sea necesario.

Este enfoque hace uso de dos tipos de sistemas de producción, la discreta y la continua. La primera maneja unidades enteras mientras la segunda hace uso de flujos continuos como gases, líquidos u otros usados mayormente en la industria química. La mayoría de estos modelos hace uso del supuesto de confiabilidad. Esto es, los paros en el sistema son raros. Los modelos de colas mas usados en la representación de los sistemas de manufactura son:

1. Para el proceso de arribo de clientes: $(M/M/1)$, $(M^x/M^y/1)$, $(D/M/1)$.
2. Para el tiempo de servicio al cliente: $(M/M/1)$, $(M^x/M^y/1)$, $(D/M/1)$, $(M/G/1)$.
3. Para el número de servidores: uno o varios.
4. Fuente poblacional: finita e infinita.
5. Disciplina de la cola: Primero en Entrar, Primero en Salir (PEPS)

Finalmente, es importante mencionar que algunos modelos presentas formas no cerradas para analizarlos cuantitativamente cuando se forman varias colas en varios canales con distintas disciplinas. En este caso, la simulación digital o las redes de Petri son las herramientas más recomendadas para estudiar estos fenómenos.

Dentro de los desarrollos más recientes en esta disciplina están las llamadas Redes de Jackson. Éstas son una clase de colas en red donde la distribución de equilibrio es particularmente fácil de calcular. Este modelo aportó un avance significativo en la teoría de las redes de colas, generalizó y aplicó soluciones forma-producto. Este tipo de modelos fueron identificados por primera vez por James R. Jackson, (Jackson, 2004). Una red Jackson consiste en un número de nodos, donde cada nodo representa una cola en la que la tasa de servicio puede ser tanto nodo-dependiente y dependiente del estado. Las piezas viajan entre los nodos siguientes en una matriz de enrutamiento fijo. Todos los puestos de trabajo en cada nodo pertenecen a una sola "clase" y la pieza a manufacturar sigue la misma distribución de tiempo de servicio y el mismo mecanismo

de enrutamiento. En consecuencia, no existe una noción de prioridad en el servicio a los puestos de trabajo: se sirven todos los puestos de trabajo en cada nodo en un estricto orden PEPS.

2.5 Análisis de perturbación

El Análisis de Perturbación (P/A en inglés) de sistemas de eventos discretos es una técnica reciente que permite el análisis de sensibilidad de los parámetros de decisión de una sola corrida de simulación. Por lo tanto, a partir de una sola simulación de un diseño de fabricación, se pueden estimar los efectos de cambiar muchas decisiones diferentes, tales como la adición de más máquinas o instalaciones, el cambio de tamaños de búfer o cambiar los tamaños de lote. Esta técnica también recibe el nombre de análisis de perturbación infinitesimal y se refiere a un conjunto de métodos matemáticos para aproximar la solución a una ecuación o un conjunto de ellas para las cuales no existe una solución cerrada, exacta, factible o conocida.

En la práctica de la manufactura, esta técnica se refiere a la modelación de sistemas automatizados y/o sistemas de control. Su uso se extiende a aquellos casos donde el sistema no puede describirse por medio de ecuaciones diferenciales parciales donde las complejas interacciones del sistema dependen del tiempo. Por ejemplo, en un sistema de manufactura flexible con varias estaciones de trabajo cada una conteniendo una o más máquinas idénticas, atendidas por operarios + inspectores y productos arribando a ellas de acuerdo a un plan de producción. Cada trabajo hará cola en el sistema hasta que éste se encuentre desocupado. Las estaciones de trabajo se encuentran conectadas a través del flujo de materiales y o vehículos que transportan el material desde y hacia cada una de ellas. Aquí, la dinámica del sistema está claramente determinada por las complejas interacciones y los tiempos requeridos por los eventos discretos (llamados eventos discretos del sistema dinámico, DEDS en inglés).

Normalmente esta clase de eventos se manejan usando simulación Monte Carlo o modelos de la teoría de líneas de espera. Aquí, la teoría de la perturbación combina las ventajas de ambas metodologías sin considerar sus desventajas. La técnica se usa para estudiar los tiempos de varios eventos realizados en una trayectoria simulada de DEDS con objeto de obtener respuestas a preguntas del tipo “qué pasa si” sin necesidad de utilizar la fuerza bruta de la repetición

aportando esto una ventaja sobre la simulación. Debido a la facilidad de su uso, el análisis de perturbación la técnica aporta una enorme capacidad de respuesta real e inmediata.

Algunos ejemplos de aplicaciones de esta técnica pueden encontrarse en (Sadok, Olivier, & Nidhal, 2013), (Yao, 2012), (Sadok, Zied, & Nidhal, 2014).

2.6 La reingeniería

La reingeniería se define como el proceso de reiniciar nuevamente y en forma sistemática, la forma de ver un proceso o negocio (BusinessDictionary.com, 2015). Esta ciencia cobra importancia con los enormes requerimientos que se tiene hoy en día para masificar la producción de bienes. La flexibilidad inherente a los sistemas de manufactura debe considerar los riesgos tomados en sus sistemas de planeación de recursos (ERP en inglés), impactando con ello en el diseño y rediseño de sus productos y procesos.

Durante el último medio siglo, se hicieron grandes cambios en las empresas de fabricación. En los años 1950 y 1960, se vivió la era donde el mercado le pertenecía al vendedor. Los fabricantes podían vender lo que producían y dependían de un alto volumen y una mezcla baja de producto para obtener economías de venta y mantener los costos bajos. Sin embargo, hoy en día es el mercado de los compradores. Los clientes quieren productos personalizados. Por lo tanto, las empresas de fabricación tienen que cambiar a producir productos personalizados en gran variedad y en última instancia, esto conducirá a una de una producción de tipo. Al mismo tiempo, para obtener una ventaja competitiva, los productos deben ser fabricados con el menor costo posible, con la mayor calidad posible y en el menor tiempo posible. Este es un gran desafío para las empresas manufactureras. Sin embargo, los sistemas de fabricación de hoy en día están diseñados principalmente para producir productos estándar con alto volumen, y mezcla baja producto. Ante tal demanda del mercado, las empresas tienen que rediseñar los procesos de fabricación mal concebidos, mal diseñados y obsoletos. Por lo tanto, la reingeniería de procesos se convirtió en una técnica muy popular en nuestros días.

Por ello la reingeniería en el negocio de la manufactura se puede conceptualizar como el replanteamiento fundamental y el rediseño radical de procesos de negocios para lograr mejoras en el rendimiento, tales como costos, calidad, servicio y rapidez. Para ello, algunos autores han diseñado medidas para comparar la eficiencia del antes y el después en un proceso de reingeniería (Naiqi, 2005), (Nee, Song, & Ong, 2013). La técnica ha sido descrita como un nuevo enfoque radical para el mejoramiento del negocio, con el potencial de lograr una mejora dramática en el rendimiento del negocio. Es el examen y el cambio de los cinco componentes de la estrategia de negocio, procesos, tecnología, organización y cultura. Muchas compañías continúan experimentando con la reingeniería, incluso si han fracasado en intentos previos. En la práctica se reconocen: a) reducir los costos/gastos, b) mejorar el rendimiento financiero, c) reducir la presión de la competencia externa d) evitar la erosión inversa de la cuota de mercado, e) responder a las nuevas oportunidades de mercado, f) mejorar la satisfacción del cliente, g) mejorar la calidad de los productos y servicios.

La mayoría de los analistas consideran reingeniería y tecnología de la información como irrevocablemente ligados. En la práctica se ha observado que la solución tecnológica real es mucho menos importante que la educación de los empleados a utilizar tanto como una iniciativa estratégica y como herramienta en el proceso de reingeniería. Es por ello que desde el punto de vista cuantitativo, existen pocas oportunidades de hacer modelación en este campo ya que la orientación del mismo es más una filosofía que una técnica científica

2.7 Los sistemas flexibles de manufactura

Un sistema de manufactura flexible (SMF) es un método de fabricación donde existe flexibilidad que le permite a éste reaccionar en caso de cambios, programados o no. Esta flexibilidad se considera generalmente dividida en dos categorías: La flexibilidad de máquina que cubre la capacidad del sistema para fabricar nuevos tipos de productos, y la capacidad de cambiar el orden de las operaciones ejecutadas en una pieza. La segunda categoría se llama flexibilidad de enrutamiento y consiste en la capacidad de utilizar múltiples máquinas para realizar la misma operación en una parte, así como la capacidad del sistema para absorber los cambios a gran escala, como en el volumen, la capacidad, o la capacidad.

La principal ventaja de un SMF es su alta flexibilidad en la gestión de los recursos de fabricación como el tiempo y el esfuerzo con el fin de fabricar un nuevo producto. Se aplica en la producción de pequeñas series de productos así como en la fabricación en masa.

La modelación de sistemas flexibles de manufactura son un campo poco explorado y una gran oportunidad para matemáticos aplicados, ingenieros y expertos en sistemas computacionales. El principal problema en esta actividad es que no hay dos sistemas de producción que sean idénticos. Incluso si éstos fueron diseñados de forma equivalente, numerosos cambios y ajustes que son introducidos en el transcurso del tiempo por personal de ingeniería y de mantenimiento obligan a, evolucionar de manera que se convierten fundamentalmente en sistemas diferentes. Por lo tanto, hay, en términos prácticos, una infinidad de sistemas de producción diferentes. Sin embargo, es posible introducir un pequeño conjunto de modelos estándar a la que cada sistema de producción se pueden reducir, tal vez a expensas de sacrificar alguna fidelidad de la descripción.

Un modelo matemático que representa a de un sistema de producción se define por los siguientes cinco componentes: a) El tipo de sistema de producción (las conexiones entre máquinas, el manejo de materiales, dispositivos de arrastre y el flujo en el sistema, b) Los modelos de las máquinas (productividad, fiabilidad y calidad), c) la forma en que se manipulan los materiales, d) las interacciones entre máquinas y materiales., e) las medidas de eficiencia del sistema de producción. El enfoque general para el modelado estructural de un sistema de manufactura se basa en la máxima atribuida a Einstein: "El modelo debe ser lo más simple posible, pero no más sencillo". La última cláusula hace que el proceso de modelado sea más un arte que la propia ingeniería del mismo, y, al igual que las artes, éste debe ser enseñado a través de ejemplos y experiencias.

Las técnicas más comúnmente usadas para elaborar modelos matemáticos de manufactura son las siguientes: a) Programación lineal normal, mista y entera, b)Programación no lineal, c) programación matemática difusa, d) programación multi-objetivo, e) programación estocástica, f) algoritmos heurísticos y meta heurísticos, g) modelos híbridos, h)otros. Para una exhaustiva

revisión de autores y técnicas se remite al lector a (Mula, Peidro, Díaz-Madroñero, & Vicens, 2010).

3. Conclusiones

La manufactura es quizá la actividad económica más productiva de la totalidad de las actividades humanas. La manufactura posee el mayor proceso multiplicador de todos los sectores de la economía. Se estima que por cada dólar recibido como producto de una venta final, éste soporta casi un dólar y medio en otros sectores de la economía en contraste con los servicios financieros que sólo generan medio dólar por cada actividad.

Asimismo, la manufactura potencia. Se estima que la productividad de la manufactura supera en forma consistente el crecimiento de la productividad en otros sectores creciendo a un ritmo de casi el 4.6 por ciento por año. Esto es, el 60 por ciento más que la economía no agrícola haciendo así que la manufactura sea el factor determinante de la productividad más importante de los niveles promedio de vida. Aunado a esto se encuentran los salarios de los empleados en empresas manufactureras los cuales reciben ingresos más altos y más generosos que otros empleados de otras actividades económicas. N promedio un 23 por ciento más.

Asimismo, los empleos en la manufactura ayudan a reducir la desigualdad de ingresos. Obreros, supervisores ingenieros y personal directivo tienen una fuente de ingresos más altos que los promedios empleando a personal con diversas formaciones académicas. Además, el sector manufacturero es el garante en gran medida del mantenimiento de nuestra capacidad innovadora. Los fabricantes son responsables de más del 70 por ciento de toda la I + D, que en última instancia beneficia a otras industrias manufactureras y la actividad no manufacturera. Son también la clave para la mejora de una balanza comercial con nuestras exportaciones.

Por ello, el mantenimiento de un sector manufacturero fuerte y vibrante es esencial para otros sectores de alto valor añadido de la economía, incluyendo el diseño, las telecomunicaciones y las finanzas.

Así, es de vital importancia proporcionar a las empresas una infraestructura de clase mundial adecuada para la producción de mayor valor, así como de servicios de calidad mediante el aumento de la inversión pública. Conviene reducir el costo de la energía y los materiales de producción nacionales para un mejor aprovechamiento de la revolución de la eficiencia, y mediante el fomento de la expansión de la oferta de gas natural, que es una fuente de energía principal para la manufactura en general. Conviene también habilitar a ciertos trabajadores calificados mediante el establecimiento de programas de capacitación específicas del trabajo que preparen y reorienten la profesional de habilidades específicas para las que existe una gran demanda.

Una alternativa más es la reducción de la carga tributaria mediante la reducción del impuesto de sociedades y el impuesto sobre la nómina, lo que a su vez, reduciría el costo del capital y el costo de mano de obra, la eliminación de los incentivos actuales en el código tributario movería la inversión de nuestros capitales en el extranjero.

Una alternativa importante para mejorar la manufactura en nuestro país consiste en optimizar el uso de la política comercial para proteger a las empresas mexicanas de las prácticas comerciales desleales de las economías mercantilistas. En particular, en nuestro país se debe hacer un mejor trabajo de proteger a las empresas contra sobretensiones de suministro desde el exterior y desde el vertido del exceso de producción durante la desaceleración en el crecimiento económico mundial, como ocurrió después de la crisis financiera de 1997- 1998 y que está ocurriendo ahora.

Existen muchas alternativas prácticas para hacer de la manufactura un nicho de oportunidades económicas para el enriquecimiento de nuestro país, oportunidades administrativas y científicas. Queda a la conciencia del lector su mejor opinión al respecto.

Bibliografía

BusinessDictionary.com. (2015, October). Retrieved 2015, from reengineering: http://www.businessdictionary.com/definition/reengineering.html

Buzacott , J. A., & Shanthikumar, J. G. (1993). *Stochastic Models of Manufacturing Systems*. N.Y.: Prentice Hall.

Hosseinpour, F., & H. Hajihosseini. (2009). Importance of Simulation in Manufacturing. *International Scholarly and Scientific Research & Innovation , 3 (3)*, 261-264.

Jackson, J. R. (2004). Jobshop-Like Queueing Systems. *Management Scienes , 50 (12)*, 1796–1802.

Mula, J.; Poler, R; García-Sabater, R.J.; Lario, J. (2006), Models for production planning under uncertainty: A review. International Journal of Production Economics, 271-285.

Mula, J. , Diaz M., Vincent, (2010). Mathematical programming models for supply chain production and transport planning . European Journal of Operational Research, 204, 377-390.

Naiqi, W. (2005). Flexibility to manufacturing process reengineering for mass customization. *Internationa Journal of Intelligent Control and Systems, 10 (2)*, 152-161.

Nee, A. Y., Song, B., & Ong, S.-K. (2013). Re-engineering Manufacturing for Sustainability. *Proceedings of the 20th CIRP International Conference on Life Cycle Engineering, Singapore*.

Papadopoulos, ., & Heavey, C. (1996). eueing theory in manufacturing systems analysis and design: A classification of models for production and transfer lines . *European Journal of Operational Research , 92*, 1-27.

Pérez, L. G., Gress, E., Karelyn, A., & Orán, M. (2010). Some efficiency measures in operations of flexible manufacturing systems: a stochastic approach. *Proceedings of the 2009 SIAM Conference on "Mathematics for Industry".* S. Francisco, Cal.: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Pérez, L. G., Pérez, R. E., & Venegas, M. (2015). Stochastic Optimization of Manufacture Systems by Using Markov Decision Processes. In IGI-Global (Ed.), *Modern Optimization Algorithms and Applications in Engineering and Economics*. To be appear.

Reinert, E. S. (2008). *How Rich Countries Got Rich . . . and Why Poor Countries Stay Poor*. (P. Affairs, Ed.) New York.

Sadok, T., Olivier, B., & Nidhal, R. (2013). Infinitesimal perturbation analysis based optimization for a manufacturing-remanufacturing system. *Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA), 2013 IEEE 18th Conference on* (pp. 1-8). Cagliari: IEEE.

Sadok, T., Zied, H., & Nidhal, R. (2014). Perturbation analysis for optimal production planning of a manufacturing system with influence machine degradation. *9th World Congress The International Federation of Automatic Control*, (pp. 10766-10771). Cape Town, South Africa.

Six reasons manufacturing is central to the economy. (2011). Retrieved October 15, 2015, from Roosvelt Institute:
http://www.rooseveltinstitute.org/new-roosevelt/six-reasons-manufacturing-central-economy

Sturrock, D. (2015). *Five Reasons Why Simulation is Important in a Tough Economy*. Retrieved from SIMIO Forward thinking:
http://www.simio.com/resources/news/5-Reasons-Why-Simulation-is-Important-in-a-Tough-Economy.htm

Yao, D. D. (2012). *Stochastic Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*. (D. D. Yao, Ed.) Springer Verlan.

CAPÍTULO XXVI

Estrategia cuna mediante opciones europeas de compra y venta en escenarios Monte Carlo con expectativas de alta volatilidad.

Héctor Alonso Olivares Aguayo

Instituto Politécnico Nacional

Ambrosio Ortiz-Ramírez

Instituto Politécnico Nacional

Christian Bucio Pacheco

Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En este trabajo se generan estrategias especulativas en volatilidad para opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y sobre cuatro de sus componentes (ALFAA, AMXL, BIMBOA y KIMBERA), bajo el supuesto de volatilidad del activo subyacente conducida por un proceso GARCH-M (1,1) calibrado con datos históricos y el precio de la opción se obtiene por simulación Monte Carlo. Con las estrategias de volatilidad construidas con los precios de las opciones simuladas se determinó que la estrategia *Cuna* es adecuada para inversiones en 45 días para ALFAA y BIMBOA; y para 90 días en el IPC y en ALFAA.

Clasificación JEL: C15, C58, G13, G17

Palabras clave: Monte Carlo, GARCH, valoración de opciones, volatilidad.

1. Introducción

En la gran mayoría de tópicos relacionados con la modelación del comportamiento de la volatilidad de los activos financieros el riesgo juega un papel relevante. La varianza condicional de las series de tiempo financieras se utiliza para el cálculo de medidas de riesgo por posiciones en un activo, en la construcción de portafolios y en la valuación de opciones. Para algunos modelos, como el CAPM y el modelo de Black y Scholes (1973), se supone que los rendimientos

son independientes y siguen una distribución normal con varianza constante. Este supuesto no se verifica empíricamente en series de tiempo financieras. Según Cont (2001) una de las características más importantes de los rendimientos de los activos financieros o índices es que su media parece ser constante mientras su varianza cambia con el tiempo. Además los rendimientos muestran *clusters* de volatilidad; es decir, grandes cambios en los rendimientos son seguidos por otros grandes cambios. Otra propiedad es que la distribución de los rendimientos tiende a tener colas más gordas en comparación con la distribución normal. Uno de los primeros trabajos en los que se estudiaron estos tópicos conocidos como hechos estilizados, fué Engle (1982) con el modelo autorregresivo de heterocedasticidad condicional (ARCH). Posteriormente Bollerslev (1986) extendió al modelo generalizado (GARCH).

La mayor utilidad de los modelos GARCH es su capacidad para describir las propiedades de la varianza de los series de tiempo de los rendimientos de las variables financieras, han resultado ser herramientas muy efectivas en la resolución de problemas que incluyen a la volatilidad como variable de interés. Diversas extensiones del modelo básico son capaces de describir hechos más atípicos de datos financieros, tales como los diferentes impactos de perturbaciones positivas y negativas en la volatilidad futura[1].

En un marco de valoración de opciones, el modelo teórico más utilizado para calcular precios de opciones financieras sobre un subyacente sin pago de dividendos se desarrolla Black y Scholes (1973) y Merton (1973), en ambos trabajos se proporciona una fórmula basada en el supuesto de que el precio del activo subyacente sigue un proceso de difusión lognormal con volatilidad constante. Sin embargo, desde un enfoque de mercado este supuesto no se cumple, por ejemplo: las volatilidades implícitas obtenidas con el modelo de Black y Scholes para diferentes plazos y precios de ejercicio no son constantes y tienden a ser en forma de sonrisa. Durante las últimas décadas múltiples trabajos han propuesto extensiones al modelo Black y Scholes para explicar este hecho estilizado. Un enfoque propuesto por Merton (1973) es que la volatilidad sea una función determinista del tiempo. Otros modelos que tratan con la heteroscedasticidad incluyen, el modelo de elasticidad constante en la varianza de Cox (1975), Christoffersen, Elkamhi, Feunou y Jacobs (2010), Hao y Zhang (2013), entre otros.

[1] Véase Bollerslev (2008) para una tentativa pero no lista exhaustiva sobre los modelos GARCH.

Algunos trabajos relacionados con la valuación de opciones con volatilidad cambiante por mencionar algunos son: la caracterización de la medida de neutral al riesgo en el caso GARCH para valuar una opción basada en la función de utilidad de un agente representativo está en Duan (1995). Heston y Nandi (2000) proporciona una fórmula cerrada para el precio de la opción con un modelo GARCH para la volatilidad, aunque tiene implícito el cálculo de una integral compleja por métodos numéricos. En la medición del riesgo mercado se encuentra el trabajo de Angelidis, Benos y Degiannakis (2004) en el que aplican los modelos GARCH al cálculo del Valor en Riesgo (VaR) y muestran que el uso la distribución t-Student en lugar de una distribución normal mejora notablemente los pronósticos de VaR.

Además de considerar los riesgos implícitos por la volatilidad, los negociadores de opciones diseñan estrategias con opciones. Las estrategias son generadas al comprar y vender opciones financieras, o por las posibles combinaciones de al menos dos de éstas, de acuerdo a la expectativa del inversionista sobre la dinámica del mercado. Las estrategias de inversión son útiles porque el agente puede protegerse, tanto de los cambios del precio del subyacente y por supuesto de la volatilidad, es por ello que las estrategias pueden clasificarse en cinco clases: alcistas, bajistas, neutrales, de arbitraje y de volatilidad McMillan (2002).

En esta investigación se propone la construcción de estrategias mediante la expectativa del inversionista en la volatilidad del activo subyacente; utilizando opciones europeas con el supuesto de que la volatilidad de la opción financiera es conducida por un modelo GARCH-M calibrado con datos históricos y el precio de la opción financiera se obtiene por simulación Monte Carlo. La hipótesis es que dicho modelo es viable cuando el inversionista tiene una expectativa de que el precio de subyacente cambie drásticamente en el corto plazo, es decir, cuando se espera una volatilidad alta en tal componente el inversionista obtiene ganancias. La metodología propuesta se aplica en la valuación de opciones europeas sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y sobre cuatro de sus componentes (ALFAA, AMXL, BIMBOA y KIMBERA). Esta investigación está organizada de la siguiente manera. En la siguiente sección se presenta una breve descripción del modelo ARCH-M, en la sección 3 se desarrolla la metodología propuesta, en la sección 4 se discuten los resultados obtenidos, y por último, se concluye en la sección 5.

2. Modelo ARCH-M

Una de las extensiones del modelo ARCH es el modelo ARCH-M propuesto por Engle, Lilien y Robins (1987), en el cual se supone que la media depende de los movimientos de la varianza condicional. Por su parte, Enders (2009) explica que una clase particular de los modelos ARCH-M se pueden aplicar a series históricas de precios de activos, dado que una característica fundamental de estos mercados es que los inversionistas adversos al riesgo requieren una compensación para retener un activo riesgoso. Puesto que el riesgo de un activo puede ser medido por la varianza del rendimiento, el premio al riesgo puede incrementarse en función de la varianza condicional del rendimiento.

Engle *et al* (1987) expresan la idea anterior formulando el rendimiento en exceso del activo riesgoso por retener como sigue:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{1}$$

Donde:

y_t : rendimiento en exceso del activo que se desea retener,

μ_t : premio al riesgo necesario para inducir el inversionista a retener el activo

ε_t : "shock" no estimable del rendimiento en exceso de los activos

Esta ecuación explica que el exceso de rendimiento para retener el activo debe ser igual al premio al riesgo:

$$\mathrm{E}_{t-1}(y_t) = \mu_t \tag{2}$$

Engle *et al* (1987) suponen que el premio al riesgo se incrementa en función de la varianza condicional de ε_t es decir, el incremento de la varianza condicional de los rendimientos aumenta la compensación necesaria para inducir a los inversionistas a retener el activo a largo plazo. Formalmente, si σ_t^2 es la varianza condicional del premio al riesgo puede ser expresado como:

$$\mu_t = \beta + \delta\sigma_t^2, \tag{3}$$

donde σ_t^2 es un proceso ARCH(q):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-1}^2 \tag{4}$$

Una generalización del modelo ARCH-M(q) es el modelo ARCH-M(p,q) que considera a la varianza condicional como un modelo GARCH y está dado como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j-1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j-1}^{p} \beta_j \mu_{t-j}^2. \tag{5}$$

Las ecuaciones anteriores constituyen la idea básica del modelo ARCH-M. De las dos primeras ecuaciones observamos que la media de y_t depende de la varianza condicional σ_t^2. De las dos últimas ecuaciones, se observa que la varianza condicional es un proceso ARCH(q) y ARCH(p,q), respectivamente. Si la varianza condicional es constante $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_q = 0$ y el modelo ARCH-M degenera dentro del caso tradicional con premio al riesgo constante. La importancia del modelo ARCH-M es que incorpora la varianza condicional no constante al exceso de rendimiento necesario para retener el activo a largo plazo.

3. Valuación de opciones con un modelo GARCH-M para la volatilidad

El modelo de Black y Scholes, no obstante su renombre, exhibe algunos sesgos sistemáticos. Puesto que la volatilidad del subyacente es uno de los parámetros clave del modelo, el problema radica en si el proceso asumido es consistente con las características de la serie de tiempo del activo subyacente. Dado el hecho de que los modelos GARCH proporcionan una descripción eficiente de la dinámica del precio de un activo, en Duan (1995) se desarrolla un modelo para valuar opciones europeas que combina las características de los modelos estructurales y estadísticos; es decir, se supone que la volatilidad es conducida por un proceso GARCH calibrado con datos históricos, pero el precio de equilibrio de la opción financiera se basa en argumentos de no arbitraje condicional a la volatilidad del proceso GARCH. Con esos supuestos, el modelo es capaz de reflejar los cambios en la volatilidad condicional del activo subyacente en una forma sencilla. No obstante, el modelo no tiene una solución en forma cerrada, para lo cual se recurre a la simulación Monte Carlo para obtener el precio de la opción. En seguida se plantea el modelo.

Suponga que los rendimientos diarios de un activo son independientes e idénticamente distribuidos como una normal:

$$R_{t+1} = \ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \tag{6}$$

El rendimiento agregado en T días se distribuye también normal con media μ y varianza σ^2 escaladas de la siguiente manera:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{X_{t+T}}{X_t}\right) \sim N\left(T\mu, T\sigma^2\right) \tag{7}$$

y el precio futuro del activo es:

$$X_{t+T} = X_t e^{R_{t+1:t+T}} \tag{8}$$

En el modelo se supone que el rendimiento esperado del activo subyacente es igual a la tasa libre de riesgo, r, más un premio al riesgo por volatilidad, λ, y un término de normalización. El rendimiento diario observado es igual al rendimiento esperado más un término de perturbación. La distribución condicional de este término se distribuye normal con media cero y la varianza sigue un proceso GARCH-M (1,1) con apalancamiento. Al hacer que el rendimiento pasado entre en la varianza con la magnitud del signo del rendimiento, el efecto de apalancamiento crea una asimetría en la distribución de los rendimientos. Esta asimetría es importante para capturar el sesgo implícito observado en precios de opciones financieras. Específicamente, se supone que el proceso de rendimientos del subyacente satisface:

$$R_{t+1:t+T} = \ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) = r + \lambda\sigma_{t+1} - \frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1}z_{t+1}, \quad con \quad z_{t+1} \sim N(0,1), \tag{9}$$

y

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\sigma_t z_t - \theta\sigma_t\right)^2 + \beta\sigma_t^2. \tag{10}$$

Note que el valor esperado y la varianza del rendimiento del periodo siguiente condicional a toda la información disponible al tiempo t son:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[R_{t+1} \mid \Im_t\right] &= r + \lambda\sigma_{t+1}, \\ \mathrm{Var}\left[R_{t+1} \mid \Im_t\right] &= \sigma_{t+1}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Para una variable $x \sim N\ (\mu, \sigma^2)$, se sabe que $\mathrm{E}(e^x) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$, por lo que la esperanza condicional del proceso anterior es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\middle|\Im_t\right) &= \mathrm{E}\left(r+\lambda\sigma_{t+1}-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2+\sigma_{t+1}z_{t+1}\middle|\Im_t\right)\\
&= e^{r+\lambda\sigma_{t+1}-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}E\left(e^{\sigma_{t+1}z}{}_{t+1}\middle|\Im_t\right)\\
&= e^{r+\lambda\sigma_{t+1}-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}\\
&= e^{r+\lambda\sigma_{t+1}}
\end{aligned} \tag{12}$$

Donde se ha usado $\sigma_{t+1}z_{t+1}\sim N\ (\mu,\sigma^2)$. La ecuación del rendimiento esperado en la ecuación (12) destaca el papel de λ como la prima al riesgo de la volatilidad. De esta manera se obtiene el precio de la opción financiera bajo neutralidad al riesgo como:

$$c=\mathrm{E}\left[\max\left(X_{t+T}-L,0\right)\middle|\Im_t\right]e^{-rT},,$$

de donde se sigue que:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\middle|\Im_t\right)=e^r,\\
&\mathrm{Var}\left(R_{t+1}\middle|\Im_t\right)=\sigma_{t+1}^2
\end{aligned} \tag{13}$$

De modo que la tasa esperada de rendimiento en el activo con riesgo es igual a la tasa libre de riesgo y la varianza condicional bajo neutralidad al riesgo es la misma que bajo el proceso original. Considere el proceso siguiente:

$$R_{t+1}=\ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)=r+\lambda\sigma_{t+1}-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2+\sigma_{t+1}z_{t+1},\quad con\quad z_{t+1}\sim N(0,1), \tag{14}$$

donde:

$$\sigma_{t+1}^2=\alpha_0+\alpha_1\left(\sigma_t z_t-\lambda\sigma_t-\theta\sigma_t\right)^2+\beta\sigma_t^2. \tag{15}$$

En este caso, se puede comprobar que la esperanza condicional es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\middle|\Im_t\right) &= \mathrm{E}\left(r-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2+\sigma_{t+1}z_{t+1}\middle|\Im_t\right)\\
&= e^{r-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}E\left(e^{\sigma_{t+1}z}{}_{t+1}\middle|\Im_t\right)\\
&= e^{r-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}e^{\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2}\\
&= e^{r}, \qquad (16)
\end{aligned}$$

lo cual satisface la primera condición en la ecuación (13). Además, la varianza condicional bajo el proceso neutral al riesgo es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[R_{t+1}\mid\Im_t\right] &= \mathrm{E}\left[\alpha_0+\alpha_1\left(\sigma_t z_t-\lambda\sigma_t-\theta\sigma_t\right)^2+\beta\sigma_t^2\mid\Im_t\right]\\
&= \mathrm{E}\left[\alpha_0+\alpha_1\left(R_t-r+\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2-\lambda\sigma_t-\theta\sigma_t\right)^2+\beta\sigma_t^2\mid\Im_t\right]\\
&= \mathrm{E}\left[\alpha_0+\alpha_1(\sigma_t z_t-\theta\sigma_t)^2+\beta\sigma_t^2\mid\Im_t\right]\\
&= \sigma_{t+1}^2, \qquad (17)
\end{aligned}$$

Donde la última igualdad resulta de la varianza del periodo $t+1$, que es conocida a final del periodo t en el modelo GARCH-M (1,1). Por lo tanto, se puede concluir que las condiciones para un proceso neutral al riesgo se cumplen.

3.1 Derivación del precio de la opción por simulación Monte Carlo

Hasta este punto se ha desarrollo un procedimiento para valuar una opción europea bajo neutralidad al riesgo, pero como no se cuenta con una fórmula cerrada, se utiliza la simulación Monte Carlo para calcular el precio de la opción financiera como el valor presente del valor intrínseco de una opción de compra:

$$c=\mathrm{E}\left[\max\left(X_{t+T}-L,0\right)\middle|\Im_t\right]e^{-rT} \qquad (18)$$

Gráfica 1: Simulación de los rendimientos $t+1$ a $t+T$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \hat{z}_{1,1}\to\hat{R}_{1,t+1}\to\hat{\sigma}_{1,t+2}^2 & \hat{z}_{1,2}\to\hat{R}_{1,t+2}\to\hat{\sigma}_{1,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{1,T}\to\hat{R}_{1,t+T} \\
\square & \hat{z}_{2,1}\to\hat{R}_{2,t+1}\to\hat{\sigma}_{2,t+2}^2 & \hat{z}_{2,2}\to\hat{R}_{2,t+2}\to\hat{\sigma}_{2,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{2,T}\to\hat{R}_{2,t+T} \\
\sigma_{t+1}^2\to & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\square & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \hat{z}_{M,1}\to\hat{R}_{M,t+1}\to\hat{\sigma}_{M,t+2}^2 & \hat{z}_{M,2}\to\hat{R}_{M,t+2}\to\hat{\sigma}_{M,t+3}^2 & \cdots & \hat{z}_{M,T}\to\hat{R}_{M,t+T}
\end{array}$$

Fuente: elaboración propia.

En la figura 1 se representa el proceso de simulación de rendimientos desde el periodo $t+1$ hasta el periodo $t+T$, las $\hat{z}_{i,j}$ son variables aleatorias de una distribución $\mathrm{N}(0,1)$ y M es el número de trayectorias de los rendimientos simulados. Observe que al final del periodo t obtenemos R_t por lo que se puede calcular σ_{t+1}^2 que es la varianza del periodo $t+1$ en el modelo GARCH.

Para ejecutar la simulación observe que se puede eliminar un parámetro al reescribir la ecuación (15):

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\sigma_t z_t - \lambda\sigma_t - \theta\sigma_t\right)^2 + \beta\sigma_t^2, \tag{19}$$
$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\sigma_t z_t - \delta\sigma_t\right)^2 + \beta\sigma_t^2, \text{con} \quad \delta = \lambda + \theta,$$

Ahora, para una varianza condicional dada σ_{t+1}^2, y parámetros, $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \delta$ dados, se puede utilizar simulación Monte Carlo para crear trayectorias de los rendimientos del activo.

Es necesario calcular la esperanza en la ecuación (18) usando el proceso neutral al riesgo. Primero se calcula el rendimiento simulado neutral al riesgo en el periodo $t+j$ para la trayectoria i de la simulación como:

$$\hat{R}_{i,t+j} = r - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{i,t+j}^2 + \hat{\sigma}_{i,t+j}\hat{\hat{z}}_{i,j} \tag{20}$$

y la varianza es actualizada por:

$$\hat{\sigma}_{i,t+j+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\hat{\sigma}_{i,t+j}\hat{\hat{z}}_{i,j} - \delta\hat{\sigma}_{i,t+j}\right)^2 + \beta\hat{\sigma}_{i,t+j.}^2 \tag{21}$$

En una primera instancia las trayectorias simuladas empiezan con σ_{t+1}^2 por lo que:

$$R_{i,t+1} = r - \frac{1}{2}\sigma_{i,t+1}^2 + \sigma_{i,t+1}\hat{\hat{z}}_{i,1}$$
$$\sigma_{i,t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1\left(\sigma_{t+1}\hat{\hat{z}}_{i,1} - \delta\sigma_{t+1}\right)^2 + \beta\sigma_{t+1}^2$$

Una vez que se han simulado por ejemplo 1,000,000 trayectorias ($M = 1{,}000{,}000$) cada día hasta la fecha de vencimiento T, es posible calcular los precios estimados del activo neutral al riesgo en el vencimiento como:

$$X_{i,t+T} = X_t e^{\sum_{j=1}^{T}\hat{R}_{i,t+j}}, i = 1,2,...,M. \tag{22}$$

El precio de la opción de compra (*call*) se calcula como el valor presente del promedio de los pagos futuros estimados:

$$c_{GARCH} = E\left[\max\left(X_{t+T} - L,0\right)\middle|\Im_t\right]e^{-rT} \approx e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\max\left(X_{i,t+T} - L,0\right). \tag{23}$$

Para el caso de la opción de venta (*put*) se tiene:

$$p_{GARCH} = E\left[\max\left(L - X_{t+T},0\right)\middle|\Im_t\right]e^{-rT} \approx e^{-rT}\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\max\left(L - X_{i,t+T},0\right). \tag{24}$$

De esta manera se utiliza la simulación para calcular el precio de la opción financiera, que es usado como una estimación del valor esperado en las ecuaciones (23) y (24). En estas condiciones a mayor número de realizaciones del proceso considerado el promedio converge a la esperanza.

4. Aplicación y análisis de resultados.

En esta sección se muestra la valuación de opciones europeas de compra y venta sobre el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) y sobre cuatro de sus componentes (ALFAA, AMXL, BIMBOA y KIMBERA) con la metodología propuesta en la sección anterior. La muestra comprende del primero de febrero de 2008 hasta el veintidós de marzo de 2013 (1294 observaciones). Para cada serie histórica de los componentes seleccionados se calibró un modelo GARCH-M (1,1) por máxima verosimilitud. Posteriormente se diseñó y ejecutó un algoritmo para simular trayectorias y precios de opciones para cada componente por simulación Monte Carlo con Matlab©, con los cuales se conforma la estrategia *Cuna*[2] (alta expectativa de volatilidad). Se realizaron 100,000 simulaciones para cada opción de compra y de venta.

Se observan los sectores económicos analizados en esta investigación en la tabla siguiente:

Cuadro 1: Distribución de los componentes del IPC

Componente	**Sector (eco)**
ALFAA	Siderurgia y metalurgia
AMXL	Telecomunicación
BIMBOA	Alimentos y bebidas
KIMBERA	Papel y celulosa
IPC	Índice de acciones

Fuente: Elaboración propia con datos de Economatica.

[2] Una Cuna (*Strangle*) consiste en dos posiciones largas, la primera en una opción de compra y otra en una opción de venta, el precio de ejercicio de la opción de compra será mayor, ambas opciones con la misma fecha de vencimiento (Cohen, 2005).

A continuación se muestran los resultados de los valores de las primas de las opciones europeas de compra (*call*) y de venta (*put*) para los componentes del IPC y del mismo IPC analizados a plazos de 45 y 90 días.

Cuadro 2: Precio de la opción *call* sobre ALFAA, con precio inicial de 29.83

L	Call Garch 45	Call Garch 90
27	2.8149	2.8000
28	1.8203	1.8118
29	0.8300	0.8422
30	0.0804	0.1451
31	0.0013	0.0093
32	0.0005	0.0009
33	0.0001	0.0001

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 3: Precio de la opción *put* sobre ALFAA, con precio inicial de 29.83.

L	Put Garch 45	Put Garch 90
27	0.0001	0.0001
28	0.0009	0.0013
29	0.0044	0.0211
30	0.2495	0.3133
31	1.1651	1.1668
32	2.1585	2.1478
33	3.1531	3.1363

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 4: Precio de la opción *call* sobre BIMBOA, con precio inicial de 36.6.

L	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 90 días
34	2.9808	3.5137
35	2.2596	2.8883
36	1.6541	2.3453
37	1.1706	1.8835
38	0.8036	1.4989
39	0.5385	1.1842

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 5: Precio de la opción *put* sobre BIMBOA, con precio inicial de 36.6

L	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 90 días
34	0.3947	0.9414
35	0.6682	1.3054
36	1.0574	1.7517
37	1.5685	2.2792
38	2.1961	2.884
39	2.9257	3.5586

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 6: Precio de la opción *call* sobre AMXL, con precio inicial de 12.58

L	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 90 días
10	2.6080	2.7002
11	1.7332	1.9236
12	1.0301	1.3021
13	0.5494	0.8463
14	0.2692	0.5361
15	0.1255	0.3355

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 7: Precio de la opción *put* sobre AMXL, con precio inicial de 12.58

L	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 90 días
10	0.0418	0.1477
11	0.1617	0.3604
12	0.4532	0.7283
13	0.9671	1.2618
14	1.6816	1.9409
15	2.5326	2.7297

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 8: Precio de la opción *call* sobre KIMBERA, con precio inicial de 39.77

L	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 90 días
37	3.3977	4.0058
38	2.7097	3.3922
39	2.1150	2.8470
40	1.6165	2.3695
41	1.2120	1.9578
42	0.8946	1.6076

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 9: Precio de la opción *put* sobre KIMBERA, con precio inicial de 39.77

L	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 90 días
37	0.6425	1.2654
38	0.9492	1.6411
39	1.3491	2.0852
40	1.8453	2.5970
41	2.4354	3.1747
42	3.1127	3.8138

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

Cuadro 10: Precio de la opción *call* sobre IPC, con precio inicial de 42,686.68 puntos base

L	Call GARCH a 45 días	Call GARCH a 90 días
41000	1945.2000	2288.2000
42000	1247.7000	1671.6000
43000	731.7023	1181.2000
44000	395.2637	812.2133
45000	201.2439	547.8110
46000	99.0778	365.2833

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

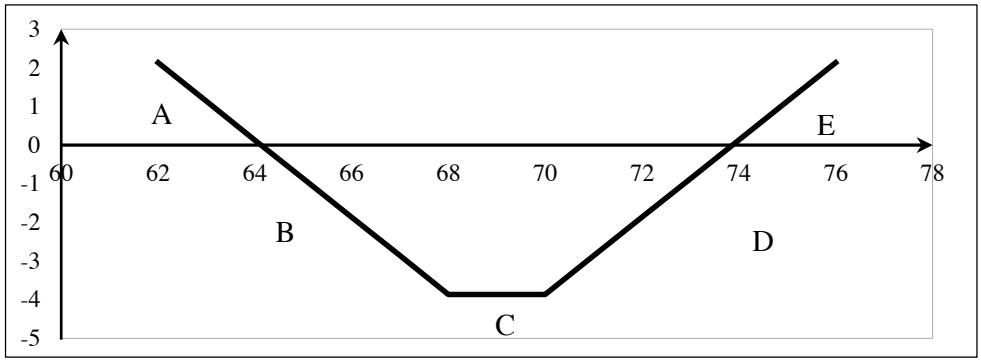
Cuadro 11: Precio de la opción *put* sobre IPC, con precio inicial de 42,686.68 puntos base

L	Put GARCH a 45 días	Put GARCH a 90 días
41000	267.5245	619.4986
42000	564.7368	992.2546
43000	1043.3000	1491.2000
44000	1701.6000	2111.5000
45000	2502.2000	2836.4000
46000	3394.7000	3643.2000

Fuente: Elaboración propia con datos obtenidos de Matlab©.

A partir de la obtención de los precios de las opciones europeas de compra y venta anteriormente descritos, se construyen 40 estrategias *Cuna* las cuales se dividen en 5 zonas como se muestra en la figura siguiente:

Gráfica 2: Representación por zona de la estrategia *Cuna*.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

La estrategia se compone por cinco zonas. La **zona A** y **E**, representan las ganancias, la **zona c** la máxima pérdida y las **zonas B** y **D** las pérdidas intermedias, por lo cual con la estrategia *Cuna* la expectativa del inversionista es de alta volatilidad, es decir, se espera que el valor del activo subyacente tenga una alta variación para que se pueda obtener ganancias con esta estrategia.

En las siguientes tablas se observan los resultados obtenidos mediante la estrategia *Cuna* a plazos de 45 y 90 días.

Cuadro 12: Distribución de las 20 estrategias *Cuna* con plazo a 45 días

Componente	**Zona A**	**Zona B**	**Zona C**	**Zona D**	**Zona E**
ALFAA	2	0	2	0	0
AMXL	0	1	2	1	0
BIMBOA	0	0	1	2	1
KIMBERA	0	0	2	2	0
SUMA	**2**	**1**	**7**	**5**	**1**
IPC	0	2	2	0	0

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

En la tabla anterior se observa que en la distribución de los componentes del IPC se obtuvieron de las dieciséis estrategias *Cuna* sólo tres en la zona de ganancias. Y en el análisis del principal indicador de acciones del mercado mexicano (IPC) de las cuatro estrategias elaboradas, en ninguna se obtuvieron ganancias.

Cuadro 13: Distribución de las 20 estrategias *Cuna* con plazo a 90 días

Componente	**Zona A**	**Zona B**	**Zona C**	**Zona D**	**Zona E**
ALFAA	0	0	1	1	2
AMXL	0	2	2	0	0
BIMBOA	0	3	1	0	0
KIMBERA	0	0	3	1	0
suma	**0**	**5**	**7**	**2**	**2**
IPC	4	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

En la tabla anterior se observa que en la distribución de los componentes del IPC se obtuvieron de las dieciséis estrategias *Cuna* sólo dos en la zona de ganancias. Al analizar el principal indicador de acciones del mercado mexicano (IPC) Se observa que de las cuatro estrategias elaboradas, las cuatro cayeron en zona de ganancias.

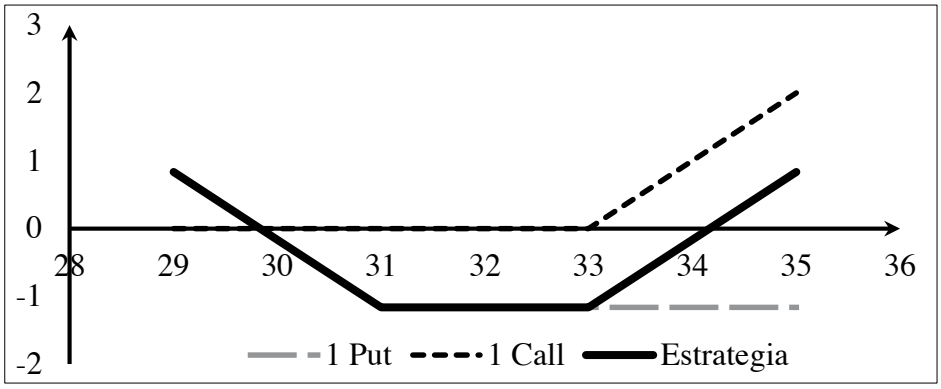
En el análisis realizado a 45 días se observa que en el IPC y en sus componentes AMXL y KIMBERA no se obtuvieron ganancias mediante la estrategia empleada, mientras que a 90 días sólo se pudo obtener ganancias con el IPC y en su componente ALFAA. Por lo anterior la estrategia *Cuna* es una estrategia viable para el IPC a 90 días pero no lo es a 45 días. Lo anterior se observa en las tablas y figuras siguientes:

Cuadro 14: Estrategia *Cuna* para el componente ALFAA a 45 días

X	**Ganancia put comprado con L=31**	**Ganancia call comprado con L=33**	**Ganancia con la estrategia Cuna**
29	0.83490	-0.00001	0.83489
30	-0.16510	-0.00001	-0.16511
31	-1.16510	-0.00001	-1.16511
32	-1.16510	-0.00001	-1.16511
33	-1.16510	-0.00001	-1.16511
34	-1.16510	0.99999	-0.16511
29.11	**0.72490**	**-0.00001**	**0.72489**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 3: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente ALFAA a 45 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

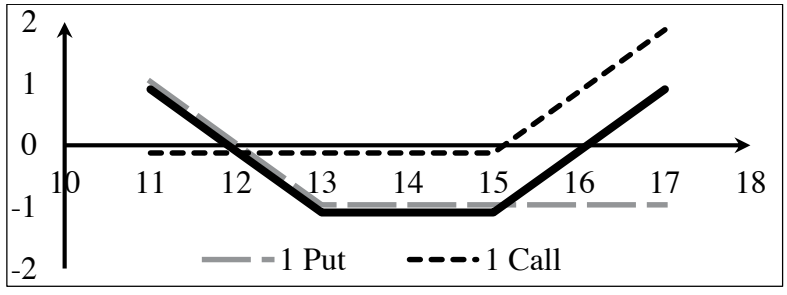
Para el componente (AMXL) a 45 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 15: Estrategia *Cuna* para el componente AMXL a 45 días.

X	**Ganancia put comprado con L=13**	**Ganancia call comprado con L=15**	**Ganancia con la estrategia Cuna**
11	1.0329	-0.1255	0.9074
12	0.0329	-0.1255	-0.0926
13	-0.9671	-0.1255	-1.0926
14	-0.9671	-0.1255	-1.0926
15	-0.9671	-0.1255	-1.0926
16	-0.9671	0.8745	-0.0926
13.06	**-0.9671**	**-0.1255**	**-1.0926**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 4: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente AMXL a 45 días.



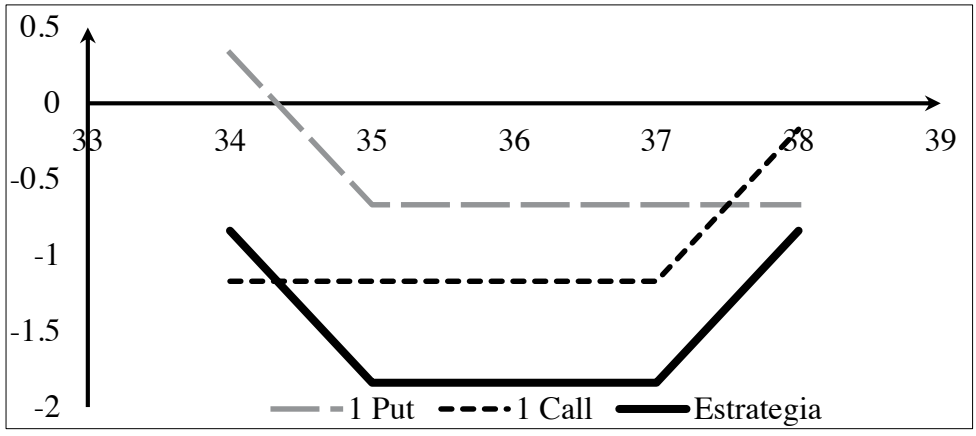
Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Cuadro 16: Estrategia *Cuna* para el componente BIMBOA a 45 días

X	**Ganancia put comprado con L=35**	**Ganancia call comprado con L=37**	**Ganancia con la estrategia Cuna**
35	-0.6682	-1.1706	-1.8388
36	-0.6682	-1.1706	-1.8388
37	-0.6682	-1.1706	-1.8388
38	-0.6682	-0.1706	-0.8388
39.44	**-0.6682**	**1.2694**	**0.6012**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 5: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente BIMBOA a 45 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

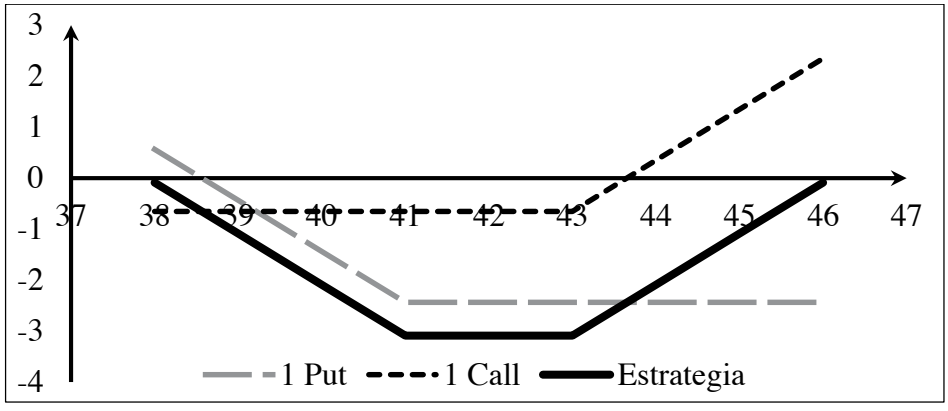
Para el componente (KIMBERA) a 45 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 17: Estrategia *Cuna* para el componente KIMBERA a 45 días.

X	Ganancia put comprado con L=41	Ganancia call comprado con L=43	Ganancia con la estrategia Cuna
38	0.5646	-0.6527	-0.0881
39	-0.4354	-0.6527	-1.0881
40	-1.4354	-0.6527	-2.0881
41	-2.4354	-0.6527	-3.0881
42	-2.4354	-0.6527	-3.0881
43	-2.4354	-0.6527	-3.0881
41.29	**-2.4354**	**-0.6527**	**-3.0881**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 6: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente KIMBERA a 45 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

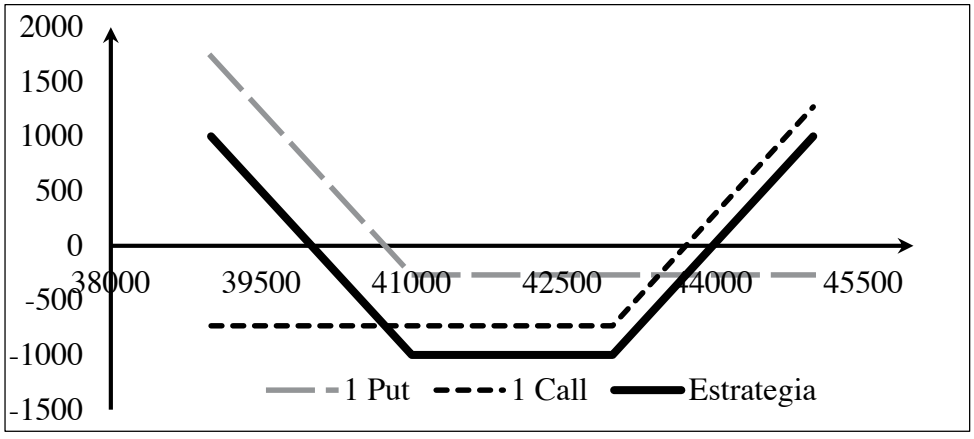
Para el mercado mexicano (IPC) a 45 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 18: Estrategia *Cuna* para el IPC a 45 días.

X	Ganancia put comprado con L=41000	Ganancia call comprado con L=43000	Ganancia con la estrategia Cuna
39000	1,732.4755	-731.702	1,000.7732
40000	732.4755	-731.702	0.7732
41000	-267.5245	-731.702	-999.2268
42000	-267.5245	-731.702	-999.2268
43000	-267.5245	-731.702	-999.2268
44000	-267.5245	268.2977	0.7732
42406.67	**-267.5245**	**-731.702**	**-999.2268**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 7: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el IPC a 45 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

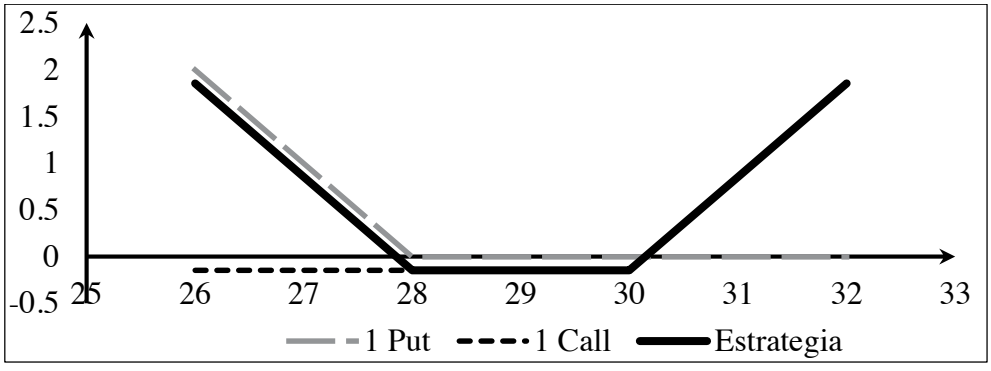
Los resultados de la estrategia *Cuna* a 90 días se muestran a continuación:

Cuadro 19: Estrategia *Cuna* para el componente ALFAA a 90 días.

X	**Ganancia put comprado con L=28**	**Ganancia call comprado con L=30**	**Ganancia con la estrategia Cuna**
26	1.9987	-0.1451	1.8536
27	0.9987	-0.1451	0.8536
28	-0.0013	-0.1451	-0.1464
29	-0.0013	-0.1451	-0.1464
30	-0.0013	-0.1451	-0.1464
31	-0.0013	0.8549	0.8536
32.15	**-0.0013**	**2.0049**	**2.0036**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 8: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente ALFAA a 90 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

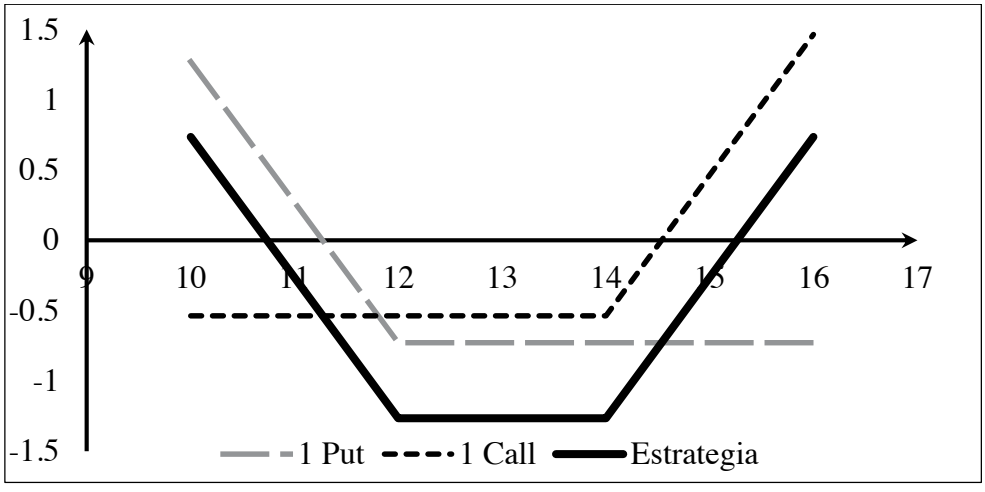
Para el componente (AMXL) a 90 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 20: Estrategia *Cuna* para el componente AMXL a 90 días.

X	Ganancia put comprado con L=12	Ganancia call comprado con L=14	Ganancia con la estrategia Cuna
10	1.2717	-0.5361	0.7356
11	0.2717	-0.5361	-0.2644
12	-0.7283	-0.5361	-1.2644
13	-0.7283	-0.5361	-1.2644
14	-0.7283	-0.5361	-1.2644
15	-0.7283	0.4639	-0.2644
12.6	**-0.7283**	**-0.5361**	**-1.2644**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 9: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente AMXL a 90 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

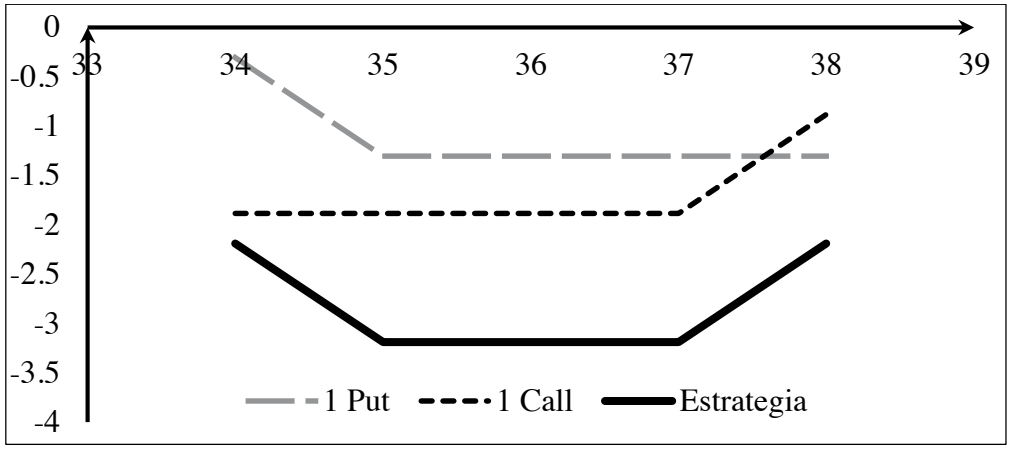
Para el componente (BIMBOA) a 90 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 21: Estrategia *Cuna* para el componente BIMBOA a 90 días.

X	Ganancia put comprado con L=35	Ganancia call comprado con L=37	Ganancia con la estrategia Mariposa
35	-1.3054	-1.8835	-3.1889
36	-1.3054	-1.8835	-3.1889
37	-1.3054	-1.8835	-3.1889
38	-1.3054	-0.8835	-2.1889
35.57	**-1.3054**	**-1.8835**	**-3.1889**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Gráfica 10: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente BIMBOA a 90 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

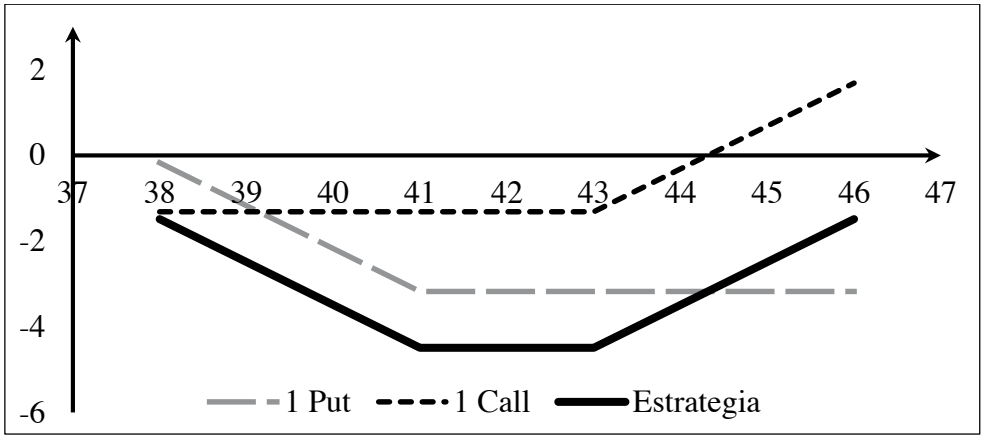
Para el componente (KIMBERA) a 90 días la estrategia *Cuna* analizada que representó la mayor pérdida fue la siguiente:

Cuadro 22: Estrategia *Cuna* para el componente KIMBERA a 90 días.

X	**Ganancia put comprado con L=41**	**Ganancia call comprado con L=43**	**Ganancia con la estrategia Cuna**
38	-0.1747	-1.313	-1.4877
39	-1.1747	-1.313	-2.4877
40	-2.1747	-1.313	-3.4877
41	-3.1747	-1.313	-4.4877
42	-3.1747	-1.313	-4.4877
43	-3.1747	-1.313	-4.4877
41.64	**-3.1747**	**-1.313**	**-4.4877**

Fuente: Elaboración propia utilizando Excel

Gráfica 11: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el componente KIMBERA a 90 días.



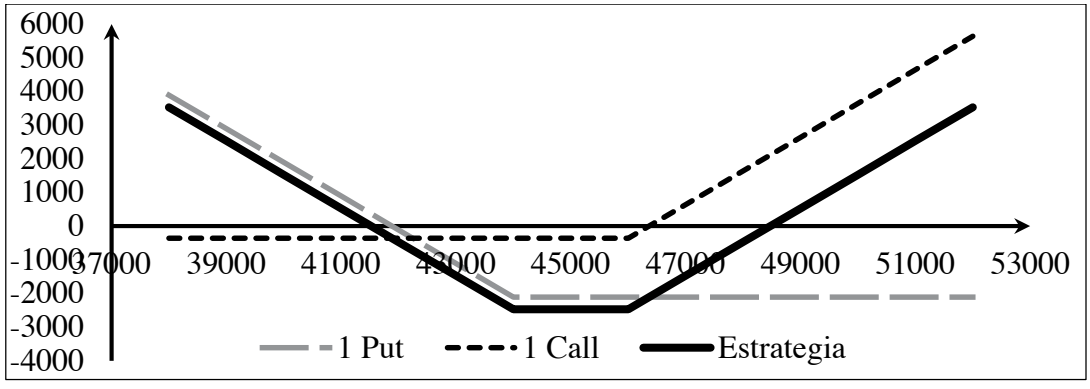
Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

Para el mercado mexicano (IPC) a 90 días la estrategia *Cuna analizada* que representó la mayor ganancia fue la siguiente:

Cuadro 23: Estrategia *Cuna* para el IPC a 90 días.

X	Ganancia put comprado con L=44000	Ganancia call comprado con L=46000	Ganancia con la estrategia Cuna
42000	-111.5000	-365.283	-476.7833
43000	-1,111.5000	-365.283	-1,476.7833
44000	-2,111.5000	-365.283	-2,476.7833
45000	-2,111.5000	-365.283	-2,476.7833
46000	-2,111.5000	-365.283	-2,476.7833
47000	-2,111.5000	634.7167	-1,476.7833
38036.46	**3,852.0400**	**-365.283**	**3,486.7567**

Gráfica 12: Gráfica de la estrategia *Cuna* para el IPC a 90 días.



Fuente: Elaboración propia utilizando Excel.

En la gráfica de la figura 12 se observa que al realizar la inversión en el IPC a 90 días se obtiene una ganancia de 3,486.7567 puntos base. Lo anterior debido a que el valor del IPC cayó drásticamente en el transcurso de los 90 días. Con un valor inicial de 42,686.68 puntos base al 22 de Marzo de 2013 y de 38,036.46 puntos base 90 días después.

5. Conclusiones

En este capítulo se ha tratado el problema de la generación de estrategias de cobertura de riesgos a través del mercado de derivados, en particular, se contempla una parte del proceso de toma de decisiones de un consumidor-inversionista racional que destina parte de su riqueza en un activo a saber: una opción. Para esto se considera que el consumidor-inversionista tiene un perfil de aversión al riesgo, para lo cual desarrolla e implementa operaciones de cobertura; por lo tanto, debe medir con cierta precisión el riesgo que está asumiendo al implementar medidas de prevención que en el mejor de los casos limitar las pérdidas potenciales que pudiera tener, esto es, examinando la mayor cantidad de posibles escenarios previos a su decisión de inversión.

La metodología propuesta para resolver el problema de cobertura está basada en conceptos econométricos, financieros y computacionales, de tal manera que proporcionen al consumidor-inversionista una herramienta robusta para la toma de decisiones en la conformación de un portafolio de inversión en un contexto de administración de riesgo mercado.

En esta investigación se ha presentado la valuación de opciones europeas de compra y venta sobre cuatro componentes del IPC y del mismo IPC, bajo el supuesto de que la volatilidad en los rendimientos del activo subyacente es conducida por un modelo GARCH-M(1,1) calibrado con datos históricos. Puesto que no se cuenta con una fórmula cerrada para el precio de la opción se utilizó un algoritmo de simulación Monte Carlo para obtener el precio de la opción financiera con los supuestos antes descritos. Con los precios obtenidos se generaron estrategias especulativas de volatilidad para cada componente considerado en el análisis. Una de las ventajas de la simulación Monte Carlo es que permite determinar el valor esperado de las primas de las opciones financieras, es decir, el sustento teórico que hay detrás del método Monte Carlo es la ley de los grandes números, la cual establece que a medida que el número de las simulaciones tiende a infinito, se tendrá una convergencia al valor esperado de la prima de la opción financiera, lo que constituye una metodología robusta al elaborar las estrategias de cobertura.

Mediante la estrategia *Cuna* se determinó que es posible obtener ganancias en los componentes del IPC analizados (ALFAA y BIMBOA) al realizar inversiones con temporalidades de 45 días. Sim embargo esta estrategia no es adecuada en inversiones a 45 días en el IPC, pero sí lo fue en inversiones a 90 días producto de la gran caída que sufrió el principal índice del mercado mexicano, es decir, la estrategia *Cuna* es adecuada para cubrir eventos extremos en el comportamiento de los precios de los activos subyacentes. Debido que se observó que la estrategia *Cuna* genera resultados aceptables al invertir en el IPC a 90 días, ya que, en todas las estrategias analizadas se acertó a la zona de ganancias.

El presente trabajo ha sido apoyado por el proyecto de investigación clave SIP-20141175 de la Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. De la misma manera, los autores agradecemos al dictaminador sus valiosas observaciones y recomendaciones.

Bibliografía

Angelidis, T., A. Benos, y S. Degiannakis (2004). "The use of GARCH models in VaR estimation*", Statistical Methodology*, vol. 1, no. 2, pp. 105-128.

Black, F. y M. Scholes (1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637-654.

Bollerslev, T. (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" *Journal of Econometrics*, vol. 31, no. 3, pp. 307-327.

Bollerslev, T. (2008). Glossary to ARCH (GARCH). In T. Bollerslev, J.R. Russell and M. Watson (editores), Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle. Oxford: Oxford University Press.

Cohen, G. (2005). The bible of options strategies, the definitive guide for practical trading strategies (1a. ed.), Upper Saddle River, New Jersey, USA, Financial Times Prentice Hall.

Cont, R., 2001. "Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues", *Quantitative Finance*, vol. 1, pp. 223-236.

Cox, J. (1975). "Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions", Working Paper, Stanford University.

Christoffersen, P., R. Elkamhi, B. Feunou, y K. Jacobs (2010). "Option Valuation with Conditional Heteroskedasticity and Non-Normality", *Review of Financial Studies*, vol. 23, no. 5, pp. 2139-2183.

Duan, J. (1995). "The GARCH Option Pricing Model", *Mathematical Finance*, vol. 5, no. 1, pp. 13-32.

Enders, W. (2009). Applied Econometrics Time Series, Third edition, John-Wiley & Sons.

Engle, R. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflations", *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987-1008.

Engle, R. F., Lilien, D. M. y Robins, R. P. (1987). "Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The Arch-M Model", *Econometrica*, vol. 55, no. 2, pp. 391- 407.

Hao, Jinji y Zhang, Jin E. (2013). "GARCH Option Pricing Models, the CBOE VIX, and Variance Risk Premium", *Journal of Financial Econometrics*, vol. 11, no. 3, pp. 556-580.

McMillan, Lawrence G. (2002). Options as a Strategic Investment (4a. ed.). Prentice Hall.

Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. "*The Journal of Business*", vol. 36, no. 4, pp. 394-419.

Merton, C. R. (1973). Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science. vol. 4, no. 1, pp. 141-183.

CAPÍTULO XXVII

Una medida clásica de *performance* para los fondos de renta variable en México, frente a diferentes representaciones del mercado de capitales.

Laura G. Zúñiga Feria

Universidad Anáhuac Norte.

Begoña Torre Olmo

Universidad de Cantabria.

Resumen

El objetivo del presente trabajo es analizar si los índices bursátiles elaborados por la Bolsa Mexicana de Valores constituyen representaciones eficientes del mercado mexicano de capitales cuando se cuantifica el *performance* de los fondos de inversión. Con base en la hipótesis de mercados eficientes y en el Modelo de Valoración de Activos de Capital (*CAPM*), se emplea una muestra libre de sesgo de supervivencia del mercado mexicano de sociedades de inversión de renta variable. Los resultados apoyan la hipótesis de bajo poder explicativo del Índice de Precios y Cotizaciones, mientras que el índice IRT CompMx resulta una mejor aproximación del mercado.

Palabras clave: fondos de inversión, modelo de valoración de activos de capital (CAPM), *performance* del portafolio. Clasificación JEL: G14

1 Introducción.

Con base en la hipótesis de mercados eficientes, a lo largo de los últimos 60 años se han propuesto numerosas representaciones estadísticas para el mercado internacional de fondos mutuos. Estos modelos de mercado establecen el análisis del *performance* de los fondos tomando como base su retorno histórico (*return-based*). La metodología se fundamenta en el Modelo de Valoración de Activos de Capital propuesto por Sharpe-Lintner-Mossin (1964-1966), en el que el elemento primordial es una cartera de referencia para el mercado de activos con riesgo.

Esta metodología se ha utilizado en diferentes países para el análisis del *performance* del total de la industria de fondos mutuos, o de grandes subconjuntos de ellos[1]. Además de ser la metodología de uso común entre los profesionales de la industria y los investigadores del área[2], posibilita la construcción de modelos de mercado que caracterizen las diferentes clases de fondos de inversión.

Bajo esta perspectiva, para evaluar el *performance* de las sociedades de inversión de renta variable (SIRV) en México, es importante especificar el modelo generador de retornos de este tipo de vehículos de inversión a partir de una cartera de referencia del mercado mexicano de capitales. En el presente trabajo, se utiliza una muestra libre de sesgo de supervivencia del mercado mexicano de SIRV, como simulación del universo de portafolios de inversión de los inversionistas racionales, para ubicar cuál de los índices bursátiles existentes sirve como mejor aproximación del mercado. La intención es evaluar, a través del Modelo de Valoración de Activos de Capital, si estos índices constituyen representaciones eficientes de la cartera de mercado.

Se utilizan cinco índices, de los cuales tres son elaborados por la Bolsa Mexicana de Valores (BMV): el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), el Índice de Rentabilidad Total (IRT) y el Índice Compuesto de Rentabilidad Total (IRT CompMX). Los dos restantes son de elaboración propia, integrando en cada uno al universo de activos en el mercado, y contruidos a través de promedios simples y ponderados por el valor de capitalización.

En las siguientes secciones se realiza una breve revisión bibliográfica de la teoría sobre *performance* de los fondos y la representatividad de los diferentes índices bursátiles. Asímismo, se presenta la descripción de la muestra de fondos de inversión utilizada, puntualizando los aspectos relevantes en el manejo de esta información y la descripción de las variables a incluir en el modelo.

Posteriormente, se presentan los resultados de la estimación del modelo utilizando los diferentes índices bursátiles propuestos como carteras de mercado. Para esto, se estima la sensibilidad (β) que presentan los fondos con respecto al mercado de capitales, para después hacer lo propio con

[1] Esta metodología no se recomienda utilizar para medir el *performance* de fondos individuales o de pequeños grupos de fondos en especial cuando existe información histórica limitada, Wermers (2006).

[2] Elton Gruber y Blake (2011) o más recientemente la revisión hecha por Angelidis, T. *et al* (2013).

el modelo de valoración a través de la metodología estadística de datos de panel. También se desarrolla un análisis condicional, por clase de fondo de inversión y por periodo, para corroborar si el nivel de representatividad de la cartera de mercado seleccionada se altera. Por último se exponen las conclusiones del análisis empírico realizado y se proponen posibles líneas de investigación futura.

2 Modelo de valoración de activos de capital.

El análisis del *performance* de los fondos de inversión en función de sus retornos históricos, se realiza a través de un modelo estadístico que describe el proceso generador de retornos, sustentado en el supuesto de eficiencia del mercado.

Fama (1991) señala que la eficiencia del mercado no puede demostrarse por sí misma, y que requiere de una prueba conjunta con un modelo de valoración de activos en equilibrio. Con el modelo se define lo que se considera como la "manera acertada" en la que se generan los retornos de los activos, para comprobar si la información se refleja adecuadamente en los precios. Por tal motivo, de encontrar evidencia empírica de la existencia de anomalías en el comportamiento de los retornos de los activos, no se puede discriminar claramente si son a consecuencia de la ineficiencia de mercado o de una mala especificación del modelo de equilibrio utilizado. En opinión de Fama, los problemas con respecto al flujo de información y a la existencia de costos de transacción, no representan un obstáculo para inferir de manera empírica la eficiencia de mercado. El problema real es la hipótesis conjunta sobre esta eficiencia y la especificación del modelo con el que se representa el proceso generador de retornos en un mercado en equilibrio.

Las pruebas empíricas de la hipótesis de mercados eficientes, en su forma fuerte, hacen énfasis en conocer si algunos inversionistas (o grupos de ellos) poseen acceso monopólico a la información relevante para el proceso de formación de precios. En este contexto, los trabajos empíricos analizan con mayor detalle a los gestores de los fondos de pensiones y de los fondos mutuos porque ellos son los inversionistas que más podrían beneficiarse con el posible uso de información privilegiada, práctica ilegal en la mayoría de los países.

Evaluar el acceso de los gestores a la información privada involucra la medición de retornos anormales en periodos largos de tiempo, por lo que estas pruebas presentan el problema de la hipótesis conjunta: los retornos anormales puede resultar de ineficiencias del mercado, de un mal modelo de equilibrio de mercado, o de problemas en la manera de implementar el modelo.

A la luz de los resultados obtenidos por diversos autores en este tipo de análisis empírico, Fama concluye que los métodos de evaluación multifactorial del *performance* son más confiables ante los problemas que presenta esta hipótesis conjunta. Sin embargo, al ser la cartera del mercado de capitales uno de los factores de riesgo incluidos en estos modelos, es relevante determinar de inicio cual es la mejor representación de dicha cartera.

De acuerdo al Modelo de Valoración de Activos de Capital (*CAPM*) de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), el retorno esperado de un activo o portafolio de inversión está en función de la tasa de un activo libre de riesgo y del premio al riesgo. La cartera de mercado utilizada para calcular este último debe ser exhaustiva[3], ya que de ella depende la precisión en la estimación del modelo.

Jensen (1968) utiliza el *CAPM* para analizar el *performance* del mercado de fondos mutuos en Estados Unidos. Precisa que, si el mercado es el único portafolio eficiente que contiene a la totalidad de activos con riesgo, el "premio por valoración" debería ser cero, por lo que emplea entonces como medida de *performance* la ordenada al origen en el modelo de un índice, o Alfa de Jensen. Con ella, evalúa la habilidad que tiene el gestor del fondo para seleccionar activos (*stock selection*), generando de esta manera un retorno por arriba del esperado en función del nivel de riesgo del portafolio.

El retorno diferencial o prima por riesgo del portafolio, a través de valores expost, se puede expresar como:

$$\left(R_{it} - R_{ft}\right) = \beta_i\left(R_{mt} - R_{ft}\right) + e_{it} \qquad (1)$$

R_i = Retorno del i-ésimo fondo de inversión.

R_f = Retorno del activo libre de riesgo.

β_i = riesgo sistemático o sensibilidad del retorno del fondo de inversion ante el retorno del mercado.

ε_i = error aleatorio.

En un portafolio con gestión activa, en el que el gestor es un buen pronosticador, el modelo tenderá a arrojar valores positivos para el residual e_{it}, por lo que el portafolio de inversión ganará más que el retorno diferencial típico $(R_{it} - R_{ft})$ para ese nivel de riesgo. Para cuantificar entonces esta habilidad del gestor, no se permite que la ecuación (1) pase por el origen, obteniendo el siguiente modelo:

[3] Fama (1968).

$$\left(R_{it} - R_{ft}\right) = \alpha_i + \beta_i\left(R_{mt} - R_{ft}\right) + u_{it} \quad (2)$$

en donde la ordenada al origen (α_i) toma valores mayores a cero, el valor esperado de los residuales ($E(u_{it})$) es de cero, y los residuales (u_{it}) son serialmente independientes.

Por lo tanto, el Alfa de Jensen representa el "retorno anormal", o tasa incremental promedio del retorno del fondo por unidad de tiempo, que se obtiene a consecuencia de la habilidad del gestor. Por lo tanto, sería de esperarse que cuando existe una política de selección aleatoria de compra y tenencia de activos en el portafolio, α_i será igual a cero. Si el gestor hace una selección peor que la aleatoria, α_i será negativa, situación que pudiera ocurrir cuando los gastos generados por los continuos intentos de predicción sean muy altos y/o culminen con pronósticos fallidos.

Jensen plantea que, si el nivel de riesgo del portafolio se mantiene estacionario, el factor de mercado no tendrá efecto sobre la medida de *performance*, y por lo tanto α_i podría compararse entre fondos con diferente nivel de riesgo y/o en diferentes periodos. Sin embargo, el gestor puede cambiar la composición del portafolio con activos más (o menos) riesgosos, o cambiar la distribución de los activos que lo conforman (bonos, acciones, efectivo, etc.) al tratar de anticipar los movimientos del mercado. Recordemos que la habilidad predictiva del gestor puede ser: para pronosticar los movimientos del precio de los activos (*stock selection*) y/o para anticipar el comportamiento general del mercado (*market timing*).

Roll (1978) expone la ambigüedad del criterio utilizado para clasificar como ganador o perdedor al *performance* de un gestor, a través de la estimación del Alfa de Jensen ya que este método no es robusto, y que es probable que lleve a diferentes resultados, inclusive contradictorios. De esta manera, propone que:

- Si el índice seleccionado es eficiente en media-varianza, entonces las betas de todos los activos están relacionadas a sus retornos promedio a través de la misma función lineal.
- Si para un índice I seleccionado, las betas de todos los activos están relacionadas a sus retornos promedio a través de la misma función lineal, entonces ese índice es eficiente en media-varianza.
- Las betas de todos los portafolios eficientes en media-varianza están relacionadas a sus retornos promedio por la misma función lineal, aun cuando el índice utilizado para calcular las betas no sea eficiente en media-varianza.

- Si se utiliza un portafolio eficiente como índice, todos los activos y portafolios estarán situados sobre la LMC. En caso contrario, al utilizar un índice ineficiente, el portafolio a evaluar se desplazará fuera de la LMC.

Además, plantea la posibilidad de que la relación lineal sea falsa y que más de un solo factor de riesgo afecte al retorno del activo (o portafolio), abriendo de esta manera la posibilidad para evaluar el *performance* empleando la Teoría de Valoración por Arbitraje o *Arbitrage Pricing Theory* (*APT*) de Ross (1976).

3 Descripción de las variables utilizadas en el modelo.

En este trabajo se estima el modelo de Jensen para el mercado mexicano de SIRV, utilizando como variable independiente (I_{mt}) el retorno en exceso de la cartera del mercado de capitales con respecto al instrumento libre de riesgo ($R_{mt} - R_{ft}$), y como dependiente (r_{it}) el retorno en exceso de la i-ésima serie accionaria de SIRV con respecto al instrumento libre de riesgo ($R_{it} - R_{ft}$). A continuación se describe la muestra de SIRV analizada, que es libre de sesgo de supervivencia, así como con las diferentes representaciones de cartera de mercado propuestas.

3.1 Composición y características de la muestra de sociedades de inversión de renta variable.

Para la prueba empírica se utilizó la información de las SIRV que componen el mercado mexicano y que proveen por ley a la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV), quien funge como organismo supervisor. Dicha información ha sido obtenida de la Base de Datos Economática.

Durante el periodo de estudio, que comprende de enero de 1993 a junio de 2012, un total de 301 SIRV operaron en México. Hay que subrayar que no todas se mantuvieron activas durante la totalidad del periodo, ya que muchas de ellas iniciaron operaciones en fecha posterior a enero de 1993, así como también algunas se cancelaron o fusionaron con otra en fecha anterior a junio de 2012.

Se cuenta con el precio de las acciones representativas del capital social de estas SIRV. Su periodicidad es mensual, lo que implícitamente supone a este como plazo de inversión de sus gestores, en el que toman sus decisiones de asignación de recursos en los diferentes activos objeto de inversión. Aunque Goetzmann et al. (2000) y Bollen y Busse (2001) ofrecen evidencia empírica que apoya el uso de datos diarios, con el argumento de que las decisiones de los

gestores pueden tomarse con mayor frecuencia, en el presente trabajo se utilizan datos mensuales porque el objetivo primordial es el nivel de caracterización de diferentes índices bursátiles mexicanos, además de encontrar aquel que describa de manera más acertada el comportamiento del mercado de capitales, y el proceso de generación de retornos de los fondos de inversión. Por otro lado, desde el punto de vista estadístico, las observaciones con periodicidad diaria dificultan en mayor medida la normalidad en la distribución de los datos, lo que trae consigo problemas en lo referente a los supuestos sobre los que descansan los métodos utilizados para la prueba empírica en este trabajo, sobre todo porque se utilizan los coeficientes de determinación ajustados para comparar los resultados de las estimaciones realizadas.

Cada SIRV posee una o varias series accionarias, dirigidas a distintos perfiles de clientes: persona física, persona moral, fondo de fondos, y no contribuyentes. Dentro de la muestra utilizada se encuentran en total 1226 series accionarias diferentes. A cada una de las series accionarias le corresponden diferentes montos mínimos de inversión y comisiones que cobran al cliente, lo que repercute en diferentes valores liquidativos para cada serie, de aquí la importancia de estudiar cada una por separado.

Esta muestra es libre de sesgo de supervivencia porque abarca el universo de fondos existentes en cada uno de los meses en el periodo de análisis. Sin embargo, en beneficio del modelo a estimar, se requiere al menos un año de retornos mensuales para cada serie accionaria, por lo que se eliminan 162 series accionarias de la muestra, ejecutando el análisis con las restantes 1064 que representan el 86.8% de la muestra original. Por lo tanto, las series analizadas poseen un mínimo de 13 observaciones y un máximo de 234 (en promedio 71 por mes por serie); en el corte transversal, cada mes contempla desde 31 hasta 924 observaciones que representan a diferentes series accionarias.

Las SIRV que componen la muestra están clasificadas, en su mayoría, en alguna de las categorías establecidas en la Ley de Sociedades de Inversión[4] (Tabla 1), a excepción de las 64 series accionarias que ya no se encuentran activas en la fecha de publicación de esta ley por estar canceladas o fusionadas con otra. En estos casos, se les otorgó una clasificación de "no disponible" y se trataron como un grupo homogéneo.

La gran mayoría (513) son "especializadas en acciones". Dentro de esta categoría están incluidas las SIRV indizadas, que son: 50 indizadas al IPC, 4 al IRT, 2 al Dow Jones Industrial Average, 2

[4] En la 6ª Resolución que modifica la CUSI, publicada en el DOF del 15 de diciembre de 2010.

al *NASDAQ*, 7 al *S&P500* y 9 al índice de sociedades de inversión. Por otro lado, las SIRV clasificadas como "mayoritariamente en valores de deuda" y las "especializadas en valores de deuda" tienen aproximadamente el mismo número, 112 y 104 respectivamente, mientras que la clase que cuenta con menos series (15) es la "mayoritariamente en acciones".

Estos cuatro tipos de SIRV acumulan el 70% de las series accionarias. Las restantes 256 corresponden a la clasificación "discrecional", en donde la estrategia de inversión se basa en un límite de exposición al riesgo o a un objetivo de retorno, en lugar de una composición preponderante de su portafolio. En esta categoría, las más numerosas son las "discrecionales de renta variable" con 245 series.

Tabla 1: Número de series accionarias de acuerdo a su clasificación, por activos objeto de inversión que conforman su portafolio (diciembre de 2012).

Clasificación	**Núm. de series accionarias**	**Estrategia de inversión**
Especializada en acciones	513	Mínimo 80% en acciones*
Mayoritariamente en acciones	15	Máximo 80% y mínimo 50% en acciones*
Mayoritariamente en valores de deuda	112	Máximo 80% y mínimo 50% en instrumentos de deuda
Especializadas en valores de deuda	104	Mínimo 80% en instrumentos de deuda
Subtotal	744	
Discrecional de renta variable	245	Con límite de exposición al riesgo o un objetivo de retorno en instrumentos de renta variable
Discrecional en índices	4	Con límite de exposición al riesgo o un objetivo de retorno en índices
Discrecional en instrumentos de deuda	7	Con límite de exposición al riesgo o un objetivo de retorno en instrumentos de deuda
Subtotal Discrecionales	256	
Clasificación no disponible	64	Series accionarias canceladas o fusionadas con otras
Total	1064	

Fuente: Elaboración propia a partir de información de Economatica y de la CNBV.

* Comprenden acciones y demás valores o contratos que las representen o se encuentren referidos a éstas.

Además de la clasificación anterior, las SIRV están tipificadas en función de las características específicas de sus activos objeto de inversión en su portafolio. La variedad es amplia ya que se encuentran fondos especializados en acciones de diferentes regiones como de Europa, Asia, Latinoamérica, o del BRIC; de países específicos como Brasil, México, y E.U.A.; de un índice

bursátil, o de algún fondo cotizado (*ETF*) o *tracker*[5], etc. También existen SIRV cuyo portafolio está compuesto por acciones de otras sociedades de inversión, ya sea de instrumentos de deuda o de renta variable. Los tipos de SIRV más numerosos son: las "discrecionales de renta variable" (245), las "especializadas en acciones" (197), las "mayoritariamente en valores de deuda" (101), las "especializadas en acciones de los mercados internacionales" (80), y las "especializada en acciones indizada al Índice de Precios y Cotizaciones" (50).

La diversidad de estilos de inversión que generan estas SIRV es tan amplia que se pueden ajustar a las necesidades de una gran variedad de inversionistas diferentes. Hay plazos de liquidez disponibles desde 1 hasta 180 días, con plazo mínimo de permanencia desde el mismo día hasta un año. En cuanto a los montos necesarios para la inversión inicial, van desde un peso hasta los doscientos cincuenta millones de pesos. Los plazos y montos cambian dependiendo de la clasificación a la que pertenece la SIRV, y a la serie accionaria de la que se trate. En general, el plazo de liquidez es de tres días en promedio para cualquier SIRV que sea "especializada en acciones" o "mayoritariamente en acciones", este plazo aumenta a un promedio de 13 días para las "mayoritariamente en valores de deuda" y encuentra su máximo con 90 días en promedio para las "especializada en valores de deuda", mientras que las SIRV "discrecionales" pueden tener un plazo de liquidez desde uno hasta 91 días. Con respecto al plazo mínimo de permanencia, tiene en promedio entre 0 y 3 días para la gran mayoría de las SIRV, sin importar su clasificación, excepto las EA del mercado norteamericano que tienen un plazo mínimo promedio de dos meses, las "especializada en valores de deuda" con plazo promedio de 22 días, y las "discrecionales" que en promedio tienen un plazo mínimo de 5 días.

En cuanto a los montos de la inversión inicial, prácticamente no existen para las SIRV "especializada en acciones", con algunas excepciones como las de acciones del mercado de Brasil y de México, las de los mercados emergentes, las internacionales y las latinoamericanas, las de *trackers* internacionales, las indizadas al IPC, al *S&P500* y a los índices de sociedades de inversión. Estos montos mínimos de inversión inicial son comunes en las "mayoritariamente en acciones", "mayoritariamente en valores de deuda" y para las "especializada en valores de deuda". Por último, prácticamente todas las SIRV "discrecionales" tienen algún monto de inversión inicial.

[5] Instrumento de inversión que replica el comportamiento de un índice bursátil.

Con respecto a las comisiones, se cuenta con la información de las que cobran al cliente por la entrada y salida a la SIRV, además de la comisión de administración, de operación y de distribución. En la muestra, la mayor comisión de entrada es del 1.8%, que se le cobra al cliente cada vez que adquiere las acciones representativas del capital social de la sociedad de inversión, mientras que en la enajenación de las mismas se le cobra al cliente la comisión de salida cuyo mayor valor es de 1.7%. Aunque las sociedades de inversión tienen una comisión total de administración que cobran a sus clientes, la regulación vigente en diciembre de 2012 establece que debe especificarse cada una de sus tres componentes: comisión por administración, distribución y operación[6]. La comisión de administración es en promedio del 0.8261%, con un máximo de 5%, la comisión por operación es de 0.0023% en promedio con 0.654% como máximo, mientras que la comisión por distribución es de 0.3142% en promedio, con un máximo de 3.5%. Estas tasas son anuales, mientras que el pago que realiza el cliente de la SIRV por estos conceptos es mensual.

Al analizar esta información por tipo de SIRV, se pudo apreciar que son pocos los tipos de fondos que cobran comisiones. En concreto, la comisión de entrada y salida solo se aplica en algunos de los fondos "especializada en acciones", con una cuota promedio de 0.0128% para la entrada y de 0.0482% para la salida del fondo. Las SIRV indizadas al IPC solo cobran la comisión de salida, que es en promedio de 0.07%, y las "discrecionales" solo cobran la comisión de entrada, del 0.0223% promedio. La comisión por administración la cobran todos los tipos de SIRV, siendo las más caras las especializadas indizadas y especializadas en *trackers* con una comisión promedio por arriba del 1%, seguidas por las de mercados emergentes y el mexicano. También presentan una alta comisión por administración las "mayoritariamente en acciones". En cuanto a la comisión por operación, solo hay tres tipos de SIRV que la cobran: las "especializada en acciones", en acciones del Sistema Internacional de Cotizaciones (SIC), y las "mayoritariamente en valores de deuda".

Los valores liquidativos o precios de las acciones representativas del capital social de las SIRV, por serie accionaria, los calculan las empresas proveedoras de precios autorizadas, y tienen descontadas las comisiones por administración, distribución y operación cobradas al cliente, así como los impuestos retenidos. Es decir, los precios con los que se trabaja en este análisis son

[6] La comisión por operación incluye todos los otros gastos relacionados como: pago de comisiones a la BMV, pago al proveedor de precios, pago por la custodia y administración de valores al INDEVAL, pago de la auditoría externa, y otros gastos varios.

netos de comisiones e impuestos, además de que se encuentran ajustados por derechos[7]. Para este trabajo, no se dedujo de estos precios la comisión de entrada-salida porque se desconoce el momento en que cada inversionista realiza la compra o enajenación de sus acciones, además de que son solo pocos los fondos que las cobran.

Tabla 2: Retorno promedio mensual de las SIRV. (enero de 1993 a junio de 2012)

	Longitudinal		Corte transversal	
	N	Retorno Promedio	n	Retorno Promedio
Mínimo	12	-0.0588	31	-0.1780
Máximo	234	2.0539	908	1.6075
Mediana	50	0.0048	187	0.0111
Promedio	68	0.0100	308	0.0260
Desviación Estándar		0.0904		0.1660

Fuente: Elaboración propia a partir de información de Economatica.

A partir de estos precios, se calcularon los retornos mensuales (Tabla 2), los que longitudinalmente muestran valores promedio que van desde un -5.9% hasta el 205.4%. Una SIRV promedio otorga un retorno mensual de 1% con una alta volatilidad, ya que su coeficiente de variación es de 902%. En general, la mitad de las SIRV han ofrecido históricamente un retorno inferior al mediano que es de 0.5% mensual. En el corte transversal, los retornos mensuales promedio van desde -17.8% hasta 160.8%, con valor promedio de 2.60% para cualquier mes dado, y menor volatilidad relativa ya que su coeficiente de variación es de 637%.

El comportamiento del retorno mensual cambia dependiendo de la clasificación a la que pertenece cada SIRV. Por tipo, las que ofrecen mayor retorno promedio son las "especializada en acciones" con el 2.22% y coeficiente de variación (CV) del 638%, las especializadas indizadas al IPC con 1.49% y CV de 245%, y las "discrecionales" que ofrecen 1.44% con CV del 913%. En cuarto lugar se encuentran las especializadas indizadas al IRT con retorno promedio de 1.22% y CV del 24%, por lo que considero son las que presentan la mejor combinación de riesgo-retorno. En todos los casos, las SIRV que presentan la menor dispersión relativa otorgan retornos promedio muy cercanos a cero.

[7] Existen sucesos rodeando a la empresa que provocan discontinuidad en el valor de sus acciones. Es necesario que los precios anteriores a un derecho sean ajustados para que sean comparables con los precios post-derecho, reflejando solo valorizaciones y desvalorizaciones genuinas. El factor de ajuste es un número por el cual son multiplicadas todas las cotizaciones anteriores al derecho para lograr esta comparabilidad. Fuente: Economatica.

A partir de esta información, y en congruencia con los trabajos de Jensen (1968), Friend y Blume (1970), y Black (1972), se usó el logrendimiento[8] para las estimación del modelo, garantizando así el supuesto de capitalización continua.

3.2 El activo libre de riesgo.

Los modelos de valoración de activos presentan dos posibles formulaciones: una en función de la tasa del activo libre de riesgo y otra utilizando un portafolio *cero-beta de mínima varianza*. Sabemos por Lehmann y Modest (1987) que la formulación que toma en cuenta a la tasa libre de riesgo es apropiada cuando es posible conformar un portafolio de activos en los que el riesgo, cuantificado por la varianza del retorno, se acerca a cero conforme el número de activos aumenta. La formulación que incluye al portafolio *cero-beta de mínima varianza* surge cuando no es posible conformar un portafolio de activos con riesgo que tenga un nivel de riesgo limitado. De estos dos tipos de modelo, en muchos de los trabajos empíricos más importantes publicados durante los últimos 60 años, el modelo utilizado para representar al mercado de fondos mutuos en diferentes países es aquel cuya formulación incluye a la tasa libre de riesgo, modelo que se utiliza en el presente trabajo.

En los análisis seminales, como en Tobin (1958) y Markowitz (1952), así como en el trabajo de Grossman (1975 y 1976), se propone como activo libre de riesgo al dinero en efectivo. Posteriormente, se utiliza como activo libre de riesgo a un bono gubernamental, aunque hay discrepancia acerca del plazo del mismo, de manera que Sharpe (1966) utiliza al *T-bond* con plazo de diez años en el análisis empírico que realiza a una muestra de fondos con periodicidad anual durante un intervalo de diez años, mientras que Jensen (1968) usa el *T-bond* con plazo de un año para una muestra de fondos mutuos con periodicidad anual para un intervalo de diez años. En la literatura de las últimas tres décadas[9], lo más frecuente es encontrar como activo libre de riesgo al *T-bill* de un mes[10] para análisis empíricos de muestras de fondos con retornos

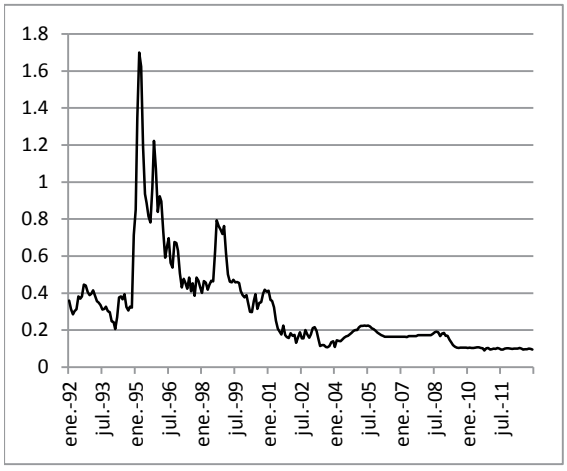
[8] Para los retornos de los fondos y de los índices utilizados en este trabajo de investigación, se supuso capitalización continua con base en lo establecido por Lintner (1969) y Black (1972), acerca de la longitud del periodo en que aplica el modelo de un índice, y que solo hace sentido cuando el periodo es infinitesimal. Por lo tanto se utilizó: $R_i = Ln\left(1 + R_{i,mes}\right)$

[9] Como por ejemplo en los trabajos de Henriksson (1984), Grinblatt y Titman (1989a), Jegadeesh (1990), Hendricks, Patel y Zeckhauser (1993), Elton, Gruber y Black (1996a, 1996b), Fama y French (1993), Ferson y Schadt (1996), Carhart (1997), Elton, Gruber y Blake (2011, 2012).

[10] Aunque Busse (1999) utiliza el *T-bill* de 3 meses, con una muestra de retornos diarios de los fondos.

generalmente de periodicidad mensual y periodos de análisis de diez años o más. En esta misma literatura queda explícita la recomendación de utilizar como activo libre de riesgo a un título de deuda emitido por el gobierno del país cuyos fondos de inversión se estén analizando, y que tenga el mismo plazo que la inversión de dichos fondos; es decir, para retornos mensuales de los fondos, lo más conveniente es utilizar bonos gubernamentales con plazo de un mes.

Figura 1: Tasa libre de riesgo R_f (1992-2012)



Fuente: Elaboración propia a partir de información de Economatica.

En consecuencia, ya que en este trabajo la muestra está constituida por los retornos mensuales de las SIRV, se utiliza al Certificado de la Tesorería de la Federación (Cete) con plazo de 28 días[11] como el activo libre de riesgo. La tasa libre de riesgo empleada en la estimación de los modelos estadísticos (R_f) se calculó a partir de la tasa equivalente mensual (30 días), para asegurar su congruencia con la tasa de retorno de las SIRV y de la cartera de mercado, en logrendimiento. A lo largo del periodo de estudio, se observa un comportamiento a la baja de esta tasa (Figura 1), comportamiento que se considera resultante de una política monetaria restrictiva por parte del Banco de México, a partir de su autonomía en 1995.

3.3 La cartera del mercado de capitales.

En los trabajos empíricos que utilizan como modelo al *CAPM*, lo usual es emplear al índice bursátil más representativo del mercado de capitales como aproximación de la cartera de mercado. En México, ese papel lo tiene el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) elaborado por la Bolsa Mexicana de Valores (BMV)[12].

[11] Se realizaron pruebas con el CETE con plazo de 91 días, sin obtener impacto relevante sobre los resultados de las estimaciones, en comparación a los obtenidos con el CETE a 28 días.

[12] "El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) es el principal indicador de Mercado Mexicano de Valores; expresa el rendimiento del mercado accionario en función de las variaciones de precios de una muestra balanceada, ponderada y representativa del conjunto de Emisoras cotizadas en la Bolsa, basado en las mejores prácticas internacionales. El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), con base octubre de 1978, tiene como principal objetivo, constituirse como un indicador

La muestra del IPC está constituida por 35 series accionarias, que representan aproximadamente el 25% del total cotizado en la BMV. En agosto de cada año se revisan sus componentes, de manera que la nueva muestra entra en vigor el primer día hábil de septiembre. Estas series accionarias se seleccionan con base en el mayor factor de rotación y en el mayor valor de capitalización flotado. No se consideran las series accionarias con menos de tres meses de operación continua, ni aquellas que pudieran ser suspendidas o retiradas del mercado[13].

Hicks (1962) pone de manifiesto que la liquidez de un activo es una característica importante, y que no todos los activos tienen la misma facilidad para ser negociados, además de que la expectativa sobre el precio futuro y su certeza son atributos importantes que el mercado toma en consideración al tomar sus decisiones de inversión. Sin embargo, Roll (1978) expone los problemas que trae consigo el utilizar un índice de mercado como punto de referencia en la evaluación del *performance* de un gestor de inversiones, y sobre todo la falta de robustez del *CAPM* cuando dicho índice no representa a la totalidad de los activos con riesgo que cotizan en el mercado. Recordemos que Roll cuestiona el significado del Alfa de Jensen cuando no se conoce la verdadera cartera de mercado.

Bajo los supuestos del *CAPM*, los portafolios óptimos siempre son una combinación del activo libre de riesgo y de la cartera de mercado. Según Fama (1968), esta visión de equilibrio significa que la cartera de mercado es el único portafolio eficiente constituido por todos los activos con riesgo. Por esta razón, el índice utilizado en los modelos de valoración de activos como aproximación a la cartera de mercado debe contener al universo de activos (ponderados) que operan en el mercado de capitales. Si los supuestos del *CAPM* se cumplen, el Alfa de Jensen debería tomar un valor de cero ya que, en caso contrario, cualquier medición de *performance* anormal sería a consecuencia de la ineficiencia de la cartera utilizada como referencia.

Para evaluar el *performance* de las SIRV en México, aplicando la metodología con base en sus retornos históricos, primero se debe encontrar el modelo que mejor represente al proceso generador de retornos del mercado mexicano de sociedades de inversión de renta variable. Para conseguir esto es lógico que se tome como cartera de referencia del mercado de capitales a

---

representativo del Mercado Mexicano para servir como referencia y subyacente de productos financieros." Fuente: www.bmv.com.mx

[13] La muestra es ponderada en función del porcentaje de acciones flotantes y de su valor de mercado ajustado por acciones flotantes, recalculando estas ponderaciones en la revisión del mes de agosto. Fuente: Nota metodológica del IPC en www.bmv.com.mx

aquella que incluya al menos a las series accionarias contenidas en la tenencia de los portafolios de los fondos, o a una muestra representativa de estas.

En un análisis realizado para la tenencia en los portafolios de las SIRV del mes de diciembre de 2012[14], se encontró que en su mayoría contienen una mezcla de instrumentos de deuda y de capital, y que estos últimos corresponden a diferentes niveles de bursatilidad por lo que no todas estas acciones se encuentran incluidas en la muestra del IPC. De hecho, la muestra del IPC no contiene al total de acciones clasificadas como de alta bursatilidad en el mercado mexicano de capitales. En el mismo análisis se calculó que, de la tenencia accionaria de las SIRV en acciones del mercado mexicano, el 74% del valor total se encuentra en acciones de alta bursatilidad que no coinciden necesariamente con las series contempladas en la muestra del IPC. Esto significa que el restante 26% está invertido en acciones con otro grado de bursatilidad, no incluidas en el IPC.

Intuitivamente parece necesario entonces buscar otra cartera de referencia para el mercado mexicano de capitales. Para esto, de primera instancia se buscó utilizar otros índices accionarios elaborados por la BMV, y posteriormente se optó por elaborar índices propios. A continuación se explican las alternativas de índices empleados en este análisis.

El Índice de Rentabilidad Total (IRT), lo elabora la BMV a partir de la misma muestra y metodología que el IPC, pero utilizando el precio accionario ajustado por derechos. Este índice tiene también base 1978, sin embargo, se creó como tal en julio de 2002 ya que antes de esta fecha comparte sus valores históricos con el IPC, que desde ese momento dejó de ajustarse por dividendos. Esto lleva a sospechar que, por el cambio de metodología, el IPC puede carecer de consistencia en su serie histórica o al menos cambiar su nivel de representatividad del mercado de capitales.

La BMV también publica índices bursátiles compuestos, que son indicadores que reflejan el comportamiento de las series accionarias más líquidas y de mayor valor de capitalización, y cuya información histórica está disponible a partir de diciembre de 2004. El IPC CompMx y el IRT CompMX utilizan como ponderador el valor de capitalización de las emisoras, ajustado por acciones flotantes[15]. Cada uno de estos índices maneja a las 60 series accionarias de mayor tamaño, lo cual representa el 43% de los activos cotizados en el mercado de capitales, que es una

[14] Estos resultados fueron presentados por Laura G. Zúñiga F. en el IV Congreso de Investigación Financiera IMEF 2014, realizado en la UDLAP, en Cholula, Puebla, el 28 y 29 de agosto. http://www.imef-eventos.org.mx/2014/fundacion/congreso/programa_general.php

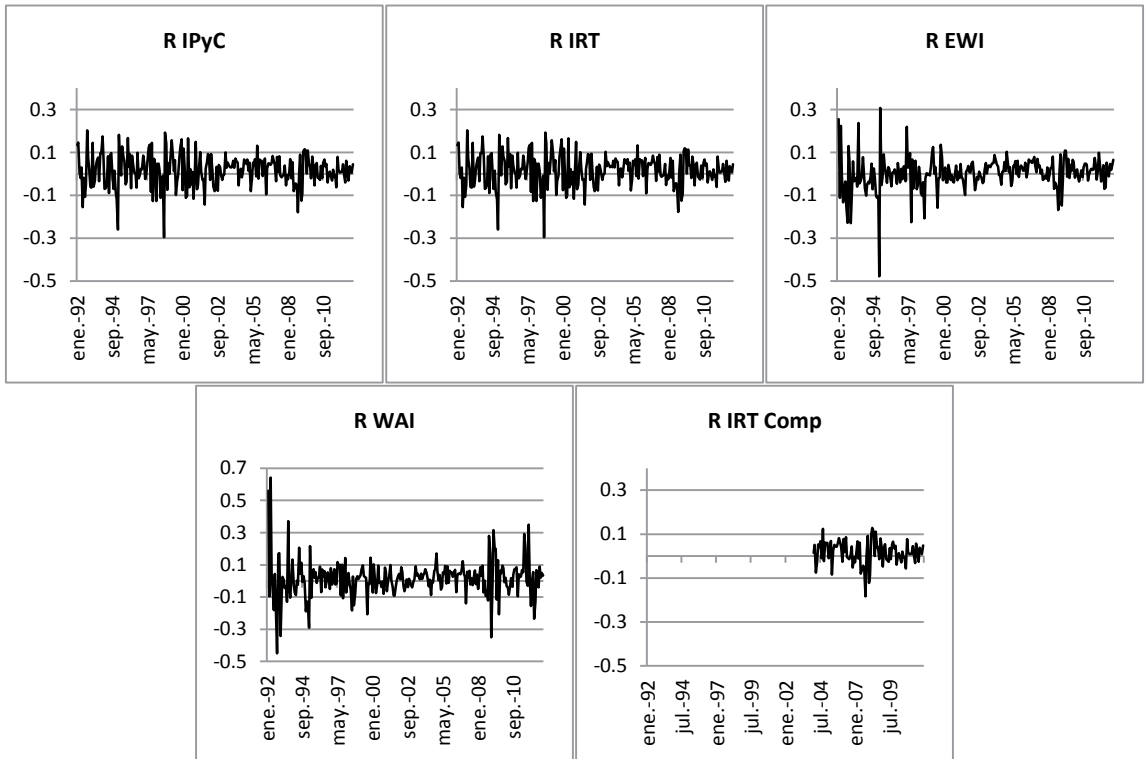
[15] Fuente: www.bmv.com.mx

proporción mayor a la que consideran el IPC e IRT. Sin embargo, estos índices compuestos tienen el inconveniente de que su serie histórica arranca en diciembre de 2004, por lo que no abarca al total del periodo de estudio en este trabajo.

Buscando otras alternativas para representar a la cartera del mercado de capitales, y con base en los trabajos de Fama y MacBeth (1973), Henriksson (1984), y Grinblatt y Titman (1989a) que utilizan como cartera de mercado a un índice promedio simple de los retornos de todas las acciones listadas en el mercado norteamericano de capitales, se elaboró un índice promedio sin ponderar o *Equally Weigthted Index* (*EWI*) a partir del promedio simple del precio de cierre, ajustado por derechos, del universo de series accionarias cotizadas cada mes en la BMV.

Otra posible manera de representar a la cartera de referencia es con un índice promedio ponderado. Los trabajos de De Bondt y Thaler (1989) y de Fama (1991), afirman que los índices sin ponderar son ineficientes en media-varianza, con respecto a las estrategias pasivas como aquellas basadas en el tamaño de la empresa y en el retorno por dividendos, además de que los promedios ponderados son preferibles. También, Fama (1968) establece que la cartera de mercado debe contener a todos los activos riesgosos que operan en dicho mercado, ponderados a través de su valor de capitalización. Por lo tanto, se elaboró un índice promedio ponderado o *Weigthted Average Index* (*WAI*) del precio de cierre, ajustado por derechos, del total de series accionarias cotizadas en cada mes en la BMV, ponderando con su valor de capitalización en cada periodo.

Figura 2: Retorno (R_{mt}) de las carteras de referencia del mercado de capitales.



Se puede observar (Figura 2) que los índices de elaboración propia presentan mayor volatilidad que los elaborados por la BMV, mientras que el comportamiento gráfico del IRT CompMX es bastante similar al del IRT y al del IPC. La dispersión es mayor para el *WAI*, sin embargo, en términos de dispersión relativa, ésta es muy superior para el *EWI*, seguida del *WAI*, y siendo muy similar para el IPC y el IRT. El IRT CompMX es el menos disperso y el más estable.

Tabla 3: Estadísticas descriptivas de las carteras de referencia
(enero de 93 a junio de 12)

	R IPyC	R IRT	R EWI	R WAI	R IRT CompMX
Promedio	0.0165	0.0173	0.0030	0.0144	0.0159
Mediana	0.0194	0.0209	0.0068	0.0183	0.0153
Desviación Estándar	0.0744	0.0745	0.0752	0.1133	0.0536
Coeficiente de Variación	4.5192	4.3173	25.3461	7.8723	3.3630

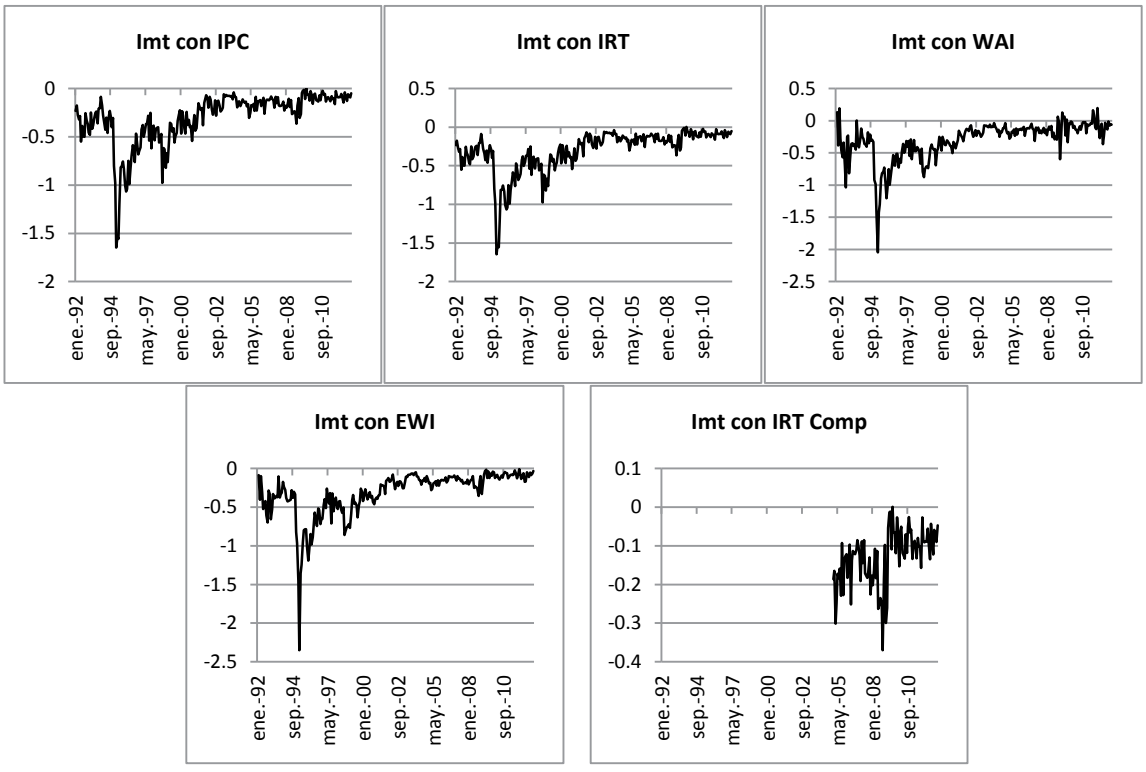
Fuente: elaboración propia a partir de información proporcionada por Economatica.

El análisis descriptivo del retorno de estos índices (Tabla 3) muestra que tanto el IPC, IRT e IRT CompMX tienen retorno promedio aritmético superior al de los índices de elaboración propia, siendo el *EWI* el de retorno promedio más bajo. Este comportamiento de sobre/sub valoración se observa también con el retorno mediano. Sin embargo, analizando la relación entre el retorno promedio y el mediano, se puede inferir que el comportamiento del IRT CompMX presenta un menor grado de asimetría.

Para la estimación del modelo de Jensen descrito en (2) se utilizó la metodología estadística de panel de datos, con 234 meses (enero de 1993 a junio de 2012) y 1064 series accionarias de SIRV. La variable dependiente en el panel, está constituida por 72,051 observaciones correspondientes al retorno adicional (r_{it}) de las SIRV, que presenta gran dispersión ya que toma valores desde -5.0094 hasta 4.3629, con promedio de -0.1935 y desviación estándar de 0.1930. La variable independiente en el modelo, el retorno adicional (I_{mt}) del índice accionario utilizado como cartera de mercado, posee 234 observaciones mensuales para el IPC, IPC, IRT, *WAI* y *EWI*, y 90 para el IRT CompMX.

Los primeros cuatro índices muestran una dispersión muy similar, replicando de manera inversa los movimientos de la tasa del Cete a 28 días, con coeficientes de variación de -90.4% y -90.7% para el IPC y IRT respectivamente, -92.7% para el *EWI*, y siendo el de mayor dispersión el WAI con -95.3%. Llama la atención que para el IPC y el *EWI*, el retorno con respecto a la tasa del Cete28 es siempre negativo (Figura 3), mientras que para el IRT muestra algunos valores positivos, con un máximo del 0.26% y de 0.08% para el IRT CompMX, y siendo éstos muy superiores para el *WAI* que alcanza un valor máximo del 19.69%. Por estas diferencias entre el *WAI* y el resto de los índices bursátiles, se espera que la estimación resultante del modelo de valoración de activos sea diferente al utilizar este índice como representación de la cartera de mercado. En cuanto a la prima por riesgo, en apariencia es ligeramente mayor y menos disperso para el IPC, en comparación con el IRT, lo que es posible que sea a consecuencia de que el IPC no incluye dividendos.

Figura 3: Retorno en exceso para las carteras del mercado (I_{mt})



Fuente: Elaboración propia a partir de información de Economatica.

4 Resultados.

4.1 Estimación del riesgo sistemático de las SIRV.

Henriksson (1984) considera el uso del *CAPM* como modelo generador de retornos siempre y cuando la cartera de referencia del mercado esté altamente correlacionada con la verdadera cartera de mercado. Con este sustento, se estimaron regresiones lineales simples para cada una de las 1064 series accionarias que constituyen la muestra de SIRV utilizando el retorno neto de comisiones e impuestos de cada SIRV[16] como variable dependiente (R_i), y el retorno de la cartera de mercado como variable independiente (R_m). Para poder realizar un análisis comparativo, se realizaron las estimarociones con el IPC, IPC, IRT, *WAI* y *EWI* para el periodo 1992-2012, y posteriormente para los cinco índices usando la información del periodo 2005-2012[17]. El resultado esperado para los coeficientes estimados es que, al ser apropiado el índice bursátil utilizado como representación de la cartera de mercado, el intercepto (α) sea igual a cero y la

[16] Se utilizó en todos los casos el logrendimiento: Ln(1+R $_{mensual}$).
[17] Esto por la disponibilidad de la información para el índice IRT CompMx.

pendiente (β) o riesgo sistemático sea diferente de cero, además de que se produzcan valores "altos" para el coeficiente de determinación.

En los resultados de las estimaciones[18] para el periodo 1992-2012, se encontró que la mayoría de las SIRV (aproximadamente el 60%) muestran una relación directa con el retorno de la cartera de mercado utilizada como referencia. El índice que muestra una β positiva para el 84% de las SIRV es el *EWI*. Sin embargo, esta relación es inversa con mayor frecuencia al utilizar los índices elaborados por la BMV (IPC e IRT) como cartera de mercado. También se encontró muy baja sensibilidad de los retornos diferenciales de las SIRV con respecto a los índices bursátiles más populares, únicamente el 14% de los fondos tienen β estadísticamente diferente de cero[19] al utilizar el IPC y el IRT, con valor promedio de 0.0226 y 0.0179 respectivamente. El 62% presentan α estadísticamente igual a cero, con valor promedio de 0.0043. La bondad de ajuste de estas estimaciones resulta mínima, rondando el 4.6% de coeficiente de determinación, lo que significa que estos dos índices prácticamente no explican la variación del retorno de las SIRV a lo largo del tiempo.

Los índices de elaboración propia presentan mejores resultados, con el *WAI* y *EWI* la bondad de ajuste es de 9.19% y 21.33% respectivamente, lo que representa hasta 360% mayor nivel de explicación sobre la varianza del retorno de las SIRV, en comparación con los índices bursátiles tradicionales de la BMV. Los valores estimados para la ordena al origen son estadísticamente iguales a cero en un 65% y 72% de las SIRV al utilizar el *WAI* y el *EWI*, con valores promedio de 0.0036 y 0.0019. En lo que toca a los estimados para la β, esta aumenta su valor promedio a 0.0836 y 0.2813 respectivamente, siendo estadísticamente diferente de cero para el 40% y 54% de las SIRV.

Para el periodo 2005-2012, las estimaciones no difieren mucho de las anteriores: un ajuste muy similar, ligeramente superior para el IPC (5.05%) y el IRT (5.08%) y menor para el *WAI* (8.71%) y el *EWI* (23.32%). Las ordenadas al origen son más cercanas a cero y las pendientes un poco mayores para todas las representaciones de la cartera de mercado, excepto para la estimación a través del *WAI* con la que tiene un valor promedio de 0.0659. En general se presenta una mayor proporción de resultados estadísticamente significativos. Con el IRT CompMX, el coeficiente de

[18] Estos resultados fueron presentados Laura G. Zúñiga F. en el IV Congreso de Investigación Financiera IMEF 2014, realizado en la UDLAP, en Cholula, Puebla, el 28 y 29 de agosto. http://www.imef-eventos.org.mx/2014/fundacion/congreso/programa_general.php

[19] Al 95% de nivel de confianza.

determinación resulta mucho mayor (45.6%) a los obtenidos con los otros índices, lo que se puede interpretar diciendo que este índice bursátil explica cerca de la mitad de la variación del retorno de las SIRV a lo largo del tiempo. El α es en promedio cero (-0.0005), y estadísticamente igual a cero para el 75% de las SIRV, lo que lleva a pensar que este índice parece ser una cartera más eficiente en comparación con los otros índices utilizados. Por lo que respecta a la β, en el 81% de las SIRV muestra un valor estadísticamente diferente de cero, con promedio de 0.4355, que representa la sensibilidad que tiene este tipo de fondos a los movimientos del mercado de capitales.

La evidencia empírica indica que el índice compuesto (IRT CompMX) representa de mejor manera la actividad del mercado de capitales en México. Los índices tradicionalmente utilizados como cartera del mercado (IPC e IRT) no constituyen una adecuada cartera de referencia al analizar el *performance* de las SIRV. Esto podría ser resultado de varios factores: primero, de que la metodología utilizada en la elaboración del IPC se modificó a partir de julio del 2002. Segundo, porque la muestra del IPC sea poco representativa de la actividad del mercado mexicano de capitales. Tercero, que a consecuencia de la tenencia accionaria en los portafolios de las SIRV, en los que se incluyen acciones con diversos niveles de bursatilidad y acciones del mercado global. También recordemos que este tipo de fondos pueden incluir en sus portafolios otras clases de instrumentos objeto de inversión como: títulos de deuda nacional e internacional con emisor gubernamental y corporativo, así como fondos cotizados (*ETF´*s) y otros instrumentos.

4.2 Estimación del modelo de un factor: el Alfa de Jensen.

Se estiman el modelo de Jensen expresado en (2) con cada uno de los cuatro índices bursátiles seleccionados, para el periodo de enero de 1993 a junio de 2012, utilizando la metodología estadística de panel de datos a través de: una regresión agrupada (*pool regresión*) estimada por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), un panel de efectos aleatorios (PEA) y un panel de efectos fijos (PEF).

Para cualquiera de las carteras de referencia, las tres metodologías estiman coeficientes con valores similares[20] (Tabla 4). El coeficiente β presenta signo positivo y es cercano a la unidad,

[20] Estadísticamente diferentes de cero al 99% de nivel de confianza.

mientras que el α presenta signo negativo y es cercano a cero. Esto reaviva la preocupación acerca de la idoneidad de la cartera de mercado utilizada como referencia.

Los coeficientes de determinación muestran valores medios-altos, desde 63.2% hasta 78.4%, lo que indica que es bastante la proporción de la varianza del retorno diferencial (r_{it}) de las SIRV que queda explicada por la varianza de estas carteras de referencia. En los cuatro modelos estimados con PEA, es claro que las carteras de referencia utilizadas explican de mejor manera la variación que existe entre las SIRV (98.4% en promedio) que aquella variación existente a lo largo del tiempo (67.6% en promedio). Con base en estos resultados, se considera como mejor modelo al PEA que utiliza al IPC como cartera de referencia ya que presenta la mayor R^2 (78.4%), con el valor de β más grande (0.9365) y una α más cercana a cero (-0.0180), además de que explica el 98.5% de la variación entre SIRV y el 72.8% de la variación a lo largo del tiempo.

Tabla 4: Resultados de la estimación del modelo de Jensen $\mathbf{r_{it} = \alpha_i + \beta_{im} I_{mt} + \varepsilon_{it}}$ utilizando como cartera de mercado al IPC, IRT, WAI y EWI.

Cartera de mercado	**Método de estimación**			**Cartera de mercado**	**Método de estimación**		
IPC	**AGRUPADA**	**PEA**	**PEF***	***WAI***	**AGRUPADA**	**PEA**	**PEF⁺**
α	-0.0180*	-0.0180*	-0.0218*	α	-0.0592*	-0.0592*	-0.0689*
β_{Imt}	0.9366*	0.9365*	0.9163*	β_{Imt}	0.7340*	0.7340*	0.6806*
rho^{+++}		0.0000	0.0168	rho^{+++}		0.0000	0.0168
R^2 dentro		72.8%	72.8%	R^2 dentro		54.7%	54.7%
R^2 entre		98.5%	98.5%	R^2 entre		98.1%	98.1%
R^2 total	78.4% (ajust.)	78.4%	78.4%	R^2 total	63.2% (ajust.)	63.2%	63.2%
IRT	**AGRUPADA**	**PEA**	**PEF⁺**	***EWI***	**AGRUPADA**	**PEA**	**PEF⁺**
α	-0.0196*	-0.0196*	-0.0233*	α	-0.0254*	-0.0254*	-0.0287*
β_{Imt}	0.9340*	0.9341*	0.9142*	β_{Imt}	0.8817*	0.8817*	0.8642*
rho^{+++}		0.0000	0.0168	rho^{+++}		0.0000	0.0168
R^2 dentro		72.7%	72.7%	R^2 dentro		70.3%	70.3%
R^2 entre		98.5%	98.5%	R^2 entre		98.6%	98.6%
R^2 total	78.4% (ajust.)	78.4%	78.4%	R^2 total	76.5% (ajust.)	76.5%	76.5%

$^{+++}$ Proporción de la varianza a consecuencia de los efectos fijos u_i. El P-valor corresponde a la prueba F para la hipótesis nula Ho: $u_i = 0$

* Significativo al 99% de nivel de confianza.

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos con el programa Stata.

Para este modelo se realiza la prueba de Breusch y Pagan[21] en la que se obtiene un P-valor igual a uno, por lo que aparentemente es preferible usar el método de regresión agrupada. Sin embargo, como nos interesa probar la existencia de un efecto común a todas las SIRV, se estima el PEF con el IPC en donde cambian ligeramente los valores de los coeficientes estimados, de tal manera que la β disminuye a 0.9163 y el α a -0.0218, ambos con el mismo signo que en el PEA y que en la regresión agrupada, y significativos al 99% de confianza. En esta estimación de PEF, la prueba F[22] para la significancia del efecto fijo resulta en un P-valor de 1, por lo que se concluye que no hay efectos fijos, como ya se podía anticipar a partir de la prueba de Breusch y Pagan. Para confirmar esto, se realiza la prueba de Hausman, que concluye que el estimador de efectos fijos es más eficiente que el de efectos aleatorios (P-valor = 0.000), esto a consecuencia del panel desbalanceado. Por ser los resultados contradictorios, se selecciona como mejor modelo el de la regresión agrupada.

Al aplicar la prueba de Shapiro-Wilk para la normalidad de los residuales de la estimación, ésta se rechaza (P-valor = 0.000) con cualquiera de los tres métodos de estimación utilizados, lo que lleva a pensar que pueden existir variables omitidas en el modelo. Además, al no cumplirse el supuesto de normalidad de los residuales, es necesario recalcular el error estándar con el que se analiza la significancia de los coeficientes estimados. Para esto se estimó primero el PEA con la técnica de *bootstrap* y posteriormente estimadores robustos. En ambos casos los coeficientes β y α mantienen su significancia estadística al 99% de nivel de confianza. Es importante añadir que los residuales muestran un comportamiento leptocúrtico en el que la gran mayoría se encuentra alrededor de cero, con una distribución de colas muy largas y poco pesadas; por lo tanto, la falta de normalidad es probablemente resultado de la gran acumulación de residuales cercanos a cero, y no porque exista un gran número de residuales con valores extremos.

Hay que subrayar que en todos los modelos estimados, el valor del α es negativo y significativo, lo que estaría indicando una "mala" habilidad por parte de los gestores de las SIRV, ya que su gestión ayuda a reducir el retorno en exceso (r_{it}) que ofrece el fondo al inversionista. Sin embargo, esta conclusión es aventurada ya que primero se debe explorar la posibilidad de incluir

[21] La Prueba del Multiplicador de Lagrange para Efectos Aleatorios de Breusch y Pagan tiene como hipótesis nula que la varianza de los *efectos fijos* es cero ($H_0: \sigma_u^2 = 0$). Si la prueba se rechaza, entonces es preferible usar el método de efectos aleatorios porque no se cumple que $\alpha_i = \alpha + u_i$.

[22] Esta prueba F tiene como hipótesis nula el que no hay efectos fijos ($H_0: u_i = 0$)

en el modelo de valoración de activos factores de riesgo adicionales que expliquen de mejor manera el proceso de generación de retornos de las SIRV.

4.3 Estimación del Alfa de Jensen por periodo y por tipo de SIRV.

Como se explicó anteriormente, en julio de 2002 la BMV cambia la metodología de elaboración para el IPC, omitiendo el ajuste por dividendos, y creando así el IRT que toma su lugar. Esta modificación podría provocar inconsistencias en la serie histórica del IPC, y traer por consecuencia fallas en la bondad de ajuste de los modelos de mercado que lo utilizan como cartera de referencia. Para analizar esta situación, se estima el modelo de Jensen a través de una regresión agrupada y con el IPC como cartera de mercado[23], particionando en un periodo anterior a julio de 2002 (Periodo 1) y otro que inicia a partir de julio de 2002 (Periodo 2). De ser relevante el cambio de metodología en el cálculo del IPC, se esperan diferencias significativas en los coeficientes de determinación al comparar los resultados de ambos periodos. Posteriormente se realizan el mismo ejercicio utilizando el IRT como cartera de referencia, en donde se espera mayor consistencia en los valores de la R^2 para los dos periodos empleados.

Los resultados de las estimaciones realizadas con el IPC demuestran que, al utilizar la muestra completa de SIRV (Tabla 5.A), el valor de la R^2 decrece casi 34 puntos porcentuales en el segundo periodo, de 71.3% a 36.5%. Un coeficiente de determinación de 36.5% representa una bondad de ajuste muy pobre para un índice bursátil tan importante como el IPC. Los coeficientes estimados mantienen su significancia aunque también disminuyen sus valores: la β de 0.9508 a 0.6589, alejándose más de la unidad, y el α de -0.0259 a -0.0491, alejándose más de cero. Los resultados de la estimación hacen pensar que el IPC disminuye su nivel de representatividad del mercado de capitales en el Periodo 2, es decir, es una inadecuada cartera de referencia.

En un análisis por clasificación de las SIRV (Tabla 5.B), se aprecia que para las clasificadas como "discrecional en índices" la reducción del coeficiente de determinación es la menor, de 77.4% a 74.7%, lo que es consistente con su estilo de inversión, aunque se esperarían valores más altos de la R^2 al ser el IPC el indicador líder del mercado accionario. Aunque el intercepto se acerca más a cero en el segundo periodo, de -0.0731 a -0.0374, la pendiente disminuye de 0.8467 a 0.7387.

[23] Se utiliza una regresión agrupada, con el IPC, porque éste resultó ser el mejor modelo en términos de bondad de ajuste y significancia de sus coeficientes.

Tabla 5.A: Resultados de la estimación del modelo de Jensen por periodo utilizando como cartera de mercado al IPC.

Clasificación de la SIRV	**Periodo utilizado para la estimación**		
Toda la muestra	**Total (ene/1993 a jun/2012)**	**Periodo 1 (ene/1993 a jul/2002)**	**Periodo 2 (jul/2002 a jun/2012)**
α	-0.0180*	-0.0259*	-0.0491*
β_{Imt}	0.9366*	0.9508*	0.6589*
R^2 (ajustada)	78.4%	71.3%	36.5%

Tabla 5.B: Resultados de la estimación del modelo de Jensen por periodo y por clasificación de la SIRV, utilizando como cartera de mercado al IPC.

1. Especializada en Acciones	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**5. Discrecionales en Renta Variable**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0149*	-0.0221*	-0.0348*	α	-0.0215*	-0.0252*	-0.0612*
β_{Imt}	0.9507*	0.9572*	0.7721*	β_{Imt}	0.9144*	0.9491*	0.5526*
R^2 (ajustada)	74.2%	62.4%	42.8%	R^2 (ajustada)	72.0%	68.9%	20.9%
2. Mayoritaria en Acciones	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**6. Discrecionales en Índices**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0195*	-0.0333*	-0.0515*	α	-0.0227*	-0.0731*	-0.0374*
β_{Imt}	0.9425*	0.9334*	0.6451*	β_{Imt}	0.9223*	0.8467*	0.7387*
R^2 (ajustada)	94.9%	93.6%	62.1%	R^2 (ajustada)	89.1%	77.4%	74.7%
3. Mayoritaria en Deuda	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**7. Discrecionales en Deuda**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0371*	-0.0264*	-0.0690*	α	-0.0167*	-0.0172*	-0.0386*
β_{Imt}	0.7718*	0.9388*	0.4887*	β_{Imt}	0.9613*	0.9668*	0.7691*
R^2 (ajustada)	76.0%	92.9%	45.9%	R^2 (ajustada)	96.0%	96.2 %	59.9%
4. Especializada en Deuda	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**8. No disponible**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0306*	-0.0302*	-0.0801*	α	-0.0252*	-0.0351*	-0.0636*
β_{Imt}	0.8323*	0.9324*	0.3836*	β_{Imt}	0.9519*	0.9437*	0.6434*
R^2 (ajustada)	85.9%	93.9%	47.4%	R^2 (ajustada)	94.8%	93.7%	56.6%

* Significativo al 99% de nivel de confianza.

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos con el programa Stata.

Las SIRV clasificadas como "especializada en acciones", constituyen su portafolio con un mínimo de 80% en acciones[24], y su R^2 cae de 62.4% en el primer periodo a 42.8% en el segundo.

[24] Estos activos objeto de inversión pueden ser acciones o valores y contratos que las representen o se encuentren referidos a éstas.

Por la composición de su portafolio, se esperaría que estas SIRV mantuvieran su bondad de ajuste, sin embargo esto no sucede así e inclusive los valores de la R^2 pueden considerarse pobres. En cuanto a los coeficientes, la beta disminuye de 0.9572 a 0.7721, mientras que el alfa mantiene su signo negativo y se aleja más de cero, de -0.0221 a -0.0348. La clasificación "discrecional de renta variable" muestra un coeficiente de determinación medio de 68.9% en el primer periodo, que se transforma en mínimo (20.9%) en el segundo periodo. Dado que la estrategia de inversión de este tipo de SIRV está determinada por un límite de exposición al riesgo o por un objetivo de retorno en instrumentos de renta variable, habría que realizar un análisis detallado de la estrategia definida para cada una de las 245 SIRV en esta clasificación y así encontrar la razón por la cual la bondad de ajuste es tan baja. Sus coeficientes β y α son significativamente diferentes de cero, siguiendo con la tendencia a alejarse de cero y de uno respectivamente al estimarlos durante el segundo periodo en estudio.

Para el resto de las clasificaciones de SIRV, los coeficientes de determinación resultantes en el primer periodo presentan valores alrededor del 93%, e inclusive por arriba del 95% para las "discrecional en instrumentos de deuda"; mientras que para el segundo periodo, los valores de este coeficiente presentan una disminución que va desde 31.5 puntos hasta 47 puntos. La R^2 en el segundo periodo toma un valor mínimo de 45.9% para la clasificación "mayoritariamente en valores de deuda", y máximo de 62.1% para la "mayoritariamente en acciones".

Tabla 6.A: Resultados de la estimación del modelo de Jensen por periodo utilizando como cartera de mercado al IRT.

Clasificación de la SIRV	**Periodo utilizado para la estimación**		
Toda la muestra	**Total (ene/1993 a jun/2012)**	**Periodo 1 (ene/1993 a jul/2002)**	**Periodo 2 (jul/2002 a jun/2012)**
α	-0.0186*	-0.0259*	-0.0504*
β_{Imt}	0.9341*	0.9507*	0.6567*
R^2 (ajustada)	78.4%	71.3%	36.4%

Tabla 6.B: Resultados de la estimación del modelo de Jensen por periodo y por clasificación de la SIRV, utilizando como cartera de mercado al IRT.

1. Especializada en Acciones	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**5. Discrecionales en Renta Variable**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0166*	-0.0222*	-0.0363*	α	-0.0230*	-0.0252*	-0.0624*
β_{Imt}	0.9481*	0.9572*	0.7701*	β_{Imt}	0.9120*	0.9491*	0.5501*
R^2 (ajustada)	74.2%	62.4%	42.7%	R^2 (ajustada)	72.0%	68.9%	20.8%
2. Mayoritaria en Acciones	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**6. Discrecionales en Índices**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0210*	-0.0333*	-0.0527*	α	-0.0242*	-0.0731*	-0.0387*
β_{Imt}	0.9403*	0.9333*	0.6439*	β_{Imt}	0.9200*	0.8467*	0.7377*
R^2 (ajustada)	94.9%	93.6%	62.1%	R^2 (ajustada)	89.1%	77.3%	74.8%
3. Mayoritaria en Deuda	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**7. Discrecionales en Deuda**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0385*	-0.0264*	-0.0700*	α	-0.0181*	-0.0172*	-0.0400*
β_{Imt}	0.7694*	0.9387*	0.4867*	β_{Imt}	0.9592*	0.9667*	0.7671*
R^2 (ajustada)	76.0%	92.9%	45.7%	R^2 (ajustada)	96.0%	96.2 %	59.7%
4. Especializada en Deuda	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**	**8. No disponible**	**Total**	**Periodo 1**	**Periodo 2**
α	-0.0321*	-0.0302*	-0.0809*	α	-0.0265*	-0.0351*	-0.0651*
β_{Imt}	0.8301*	0.9323*	0.3816*	β_{Imt}	0.9499*	0.9437*	0.6404*
R^2 (ajustada)	85.9%	93.9%	47.1%	R^2 (ajustada)	94.8%	93.7%	56.5%

* Significativo al 99% de nivel de confianza.

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos con el programa Stata.

En lo que se refiere al IRT (Tabla 6), todos los modelos estimados presentan un comportamiento similar al del IPC (Tabla 5). En todos los casos, excepto para las SIRV clasificadas como "discrecional en índices", la magnitud en la que disminuyen los coeficientes de determinación para el segundo periodo es aún mayor que la observada con el IPC. Esto contradice al argumento que supone que el cambio en la metodología de elaboración para el IPC lo hace menos representativo como cartera de mercado que al IRT. Lo más probable es que el cambio de metodología haya afectado a ambos índices, no solo por considerar o no el ajuste por dividendos, además de que es factible la falta de representatividad de la muestra accionaria que utilizan ambos índices.

Por último se tomó al IRT CompMx como cartera de referencia (Tabla 7), esperando un mayor nivel de representatividad con base en los resultados obtenidos al estimar el riesgo sistemático con este índice. Para el periodo de enero de 2005 a diciembre de 2012, se observa muy poca diferencia al comparar con los resultados obtenidos para el IRT en el periodo de julio de 2002 a diciembre de 2012. Esto nos lleva a pensar que la proporción de instrumentos de deuda que se encuentra en la tenencia de las SIRV, junto con otros tipos de instrumentos objeto de inversión, deben tomarse en cuenta al definir la cartera de mercado en el modelo que intenta explicar la generación de retornos de las SIRV mexicanas.

Tabla 7: Resultados de la estimación del modelo de Jensen, por por periodo y por clasificación de la SIRV, utilizando como cartera de mercado al IRT CompMx. (enero/2005 a junio/2012).

Clasificación de la SIRV		**Clasificación de la SIRV**		**Clasificación de la SIRV**	
Toda la muestra		**3. Mayoritario en Deuda**		**6. Discrecional en Índices**	
α	-0.0485*	α	-0.0684*	α	-0.0410*
β_{Imt}	0.6635*	β_{Imt}	0.4939*	β_{Imt}	0.7199*
R^2 (ajustada)	44.3%	R^2 (ajustada)	47.1%	R^2 (ajustada)	72.5%
1. Especializada en Acciones		**4. Especializada en Deuda**		**7. Discrec. en Insts. de Deuda**	
α	-0.0338*	α	-0.0803*	α	-0.0399*
β_{Imt}	0.7831*	β_{Imt}	0.3804*	β_{Imt}	0.7676*
R^2 (ajustada)	55.0%	R^2 (ajustada)	48.1%	R^2 (ajustada)	61.6%
2. Mayoritariamente en Acciones		**5. Discrec. en Renta Variable**		**8. No disponible**	
α	-0.0518*	α	-0.0608*	α	-0.0623*
β_{Imt}	0.6411*	β_{Imt}	0.5552*	β_{Imt}	0.6558*
R^2 (ajustada)	60.3%	R^2 (ajustada)	24.6%	R^2 (ajustada)	54.9%

* Significativo al 99% de nivel de confianza.

Fuente: Elaboración propia a partir de los resultados obtenidos con el programa Stata.

5 Conclusiones.

En este trabajo, se analiza de manera empírica una muestra del mercado mexicano de SIRV, libre de sesgo de supervivencia, a través de un modelo de mercado que utiliza sus valores históricos, para el periodo de enero de 1993 a junio de 2012. Se busca evaluar cuál de los índices propuestos constituye una representación eficiente de la cartera de mercado de capitales. Se utilizan cinco índices: Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), Índice de Rentabilidad Total (IRT), Índice

Compuesto de Rentabilidad Total (IRT CompMX), Índice Promedio Simple (*EWI*) y Índice Promedio Ponderado por valor de capitalización (*WAI*). Los últimos dos índices son de elaboración propia, y utilizan el universo de series accionarias cotizadas en la BMV.

De la estimación del riesgo sistemático para las 1064 SIRV, a través de la pendiente de un modelo de regresión lineal simple, se desprende que el IRT CompMX es el índice con mayor poder de explicación de la varianza del retorno de las SIRV. Los índices tradicionalmente utilizados como cartera del mercado de capitales (IPC e IRT) no constituyen una adecuada cartera de referencia cuando el objetivo es analizar el *performance* de las SIRV del mercado mexicano.

Se estimó el Alfa de Jensen a través de la metodología de panel de datos, utilizando los Cetes con plazo de 28 días como activo libre de riesgo. De las metodologías de estimación aplicadas, la que resulta con mejores resultados estadísticos es la regresión agrupada, además de que se comprueba que no existen efectos fijos que diferencien estadísticamente la gestión de cada SIRV.

Los resultados encuentran que cualquiera de los índices bursátiles propuestos explica en la misma proporción (alrededor del 98%) la variación en el corte transversal de las SIRV, pero que el IPC y el IRT son los índices que explican en mayor proporción (72.8%) su variación longitudinal. Este mayor nivel de explicación resulta marginal ya que el coeficiente de determinación es solo 2.5% mayor que de nivel explicativo que se obtiene con el índice promedio simple (*EWI*) de elaboración propia.

Llama la atención que la variable independiente (la prima por riesgo del mercado mexicano de capitales) es negativa para los cinco índices bursátiles utilizados, prácticamente durante la totalidad del periodo en estudio. Es importante destacar el hecho de que los valores estimados para el retorno anormal, o Alfa de Jensen, presentan valores negativos y estadísticamente diferentes de cero en todos los casos, lo que puede constituir evidencia de una gestión no óptima de las SIRV, o presentarse a consecuencia del uso de una cartera de mercado ineficiente en el modelo.

Se proponen diferentes hipótesis para explicar esta pobre bondad de ajuste: primero, que es a consecuencia del cambio en la metodología de cálculo del IPC en julio del 2002; segundo, que se debe a la escasa representatividad de la muestra del IPC, en cuanto a la proporción de activos con riesgo que incluye; tercero, que la mayor diversidad de activos objeto de inversión en la tenencia

de los portafolios de las SIRV es la que provoca la poca representatividad de estos índices bursátiles como cartera de mercado.

En los resultados del análisis por periodos, antes y después del cambio metodológico del IPC, se percibe un cambio en el nivel de explicación de la varianza del retorno de las SIRV, que difiere en función del tipo de SIRV analizada. Esta disminución del poder explicativo del modelo llega a ser hasta del 50% para el periodo posterior a julio del 2002. Al realizar estas mismas estimaciones con el IRT, el poder explicativo del modelo también disminuye de manera similar. Este hecho no apoya la hipótesis del cambio de metodología, sino a la hipótesis de la falta de representatividad de la muestra de series accionarias utilizadas para estos índices bursátiles, con respecto a la tenencia en los portafolios de las SIRV. Esta hipótesis se acentúa para prácticamente todas las categorías de SIRV, al obtener una mayor bondad de ajuste con el IRT CompMX cuya muestra accionaria es mayor.

Este trabajo ofrece evidencia de la poca representatividad que tienen los índices bursátiles tradicionales (IPC e IRT) para el mercado de SIRV, además de que resalta la importancia que conlleva el uso de los índices compuestos de la BMV como una mejor representación de la cartera de mercado.

Se propone continuar la investigación con la construcción de una cartera de mercado que incluya una gama más amplia de instrumentos de inversión, y comprobar estadísticamente si esto aumenta el poder explicativo del modelo para el retorno de las SIRV.

Bibliografia.

Angelidis, T., Giamouridis, D. y Tessaromatis, N. (2013). Revisiting mutual fund performance evaluation. *Journal of Banking and Finance*, 37 (5), 1759-1776.

Black, F. (1972). Capital market equilibrium with restricted borrowing. *The Journal of Business*, *45*(3), 444-455.

Black, F., Jensen, M. C., y Scholes, M. (1972). The capital asset pricing model: Some empirical tests. In M. Jensen (Ed.), *Studies in the theory of capital markets*. Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=908569

Blume, M. E., y Friend, I. (1973). A new look at the capital asset pricing model. *The Journal of Finance*, *28*(1), 19-33.

Bollen, N. P., y Busse, J. A. (2001). On the timing ability of mutual fund managers. *The Journal of Finance*, *56*(3), 1075-1094.

De Bondt, W. F. M. y Thaler, R. (1989). Anomalies: A mean-reverting walk down Wall Street. *Journal of Economic Perspectives*, *3*(1), 189-202.

Fama, E. F. (1968). Risk, return and equilibrium: Some clarifying comments. *The Journal of Finance*, *23*(1), 29-40.

Fama, E. F. (1991). Efficient capital markets: II. *The Journal of Finance, 46*(5), 1575-1617.

Fama, E. F. y MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *The Journal of Political Economy, 81*(3), 607-636.

Friend, I., y Blume, M. E. (1970). Measurement of portfolio performance under uncertainty. *American Economic Review, 60*(4), 561-575.

Goetzmann, W., Ingersoll, J., y Ivkovic, Z. (2000). Monthly measurement of daily timers *Journal of Financial and Quantitative Analysis, 35*(3), 257-290.

Grinblatt, M., y Titman, S. (1989a). Mutual fund performance: An analysis of quarterly portfolio holdings. *Journal of Business, 62*(3), 393-416.

Grossman, S. (1975). The existence of futures markets, noisy rational expectations and informational externalities. Unpublished Ph.D. dissertation: Department of Economics, University of Chicago.

Grossman, S. (1976). On the efficiency of competitive stock markets where trades have diverse information. *The Journal of Finance, 31*(2), 573-585.

Henriksson, R.D. (1984). Market timing and mutual fund performance: An empirical investigation. *The Journal of Business, 57*(1), 73-96.

Jensen, M. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945-1964. *The Journal of Finance*, *23*(2), 389–416.

Lehmann, B. N., y Modest, D. M. (1987). Mutual fund performance evaluation: A comparison of benchmarks and benchmark comparisons. *The Journal of Finance*, *42*(2), 233-265.

Lintner, J. (1965a). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, *47*(1), 13-37.

Lintner, J. (1965b). Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, *20*(4), 587-615.

Lintner, J. (1969). The aggregation of investor' diverse judgments and preferences in perfectly competitive security markets. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, *4 (December 1969)*, 347-400. Retrieved from http://pages.stern.nyu.edu/~lpederse/courses/LAP/papers/ShortSales/Lintner69.pdf

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, *7*(1), 77-91.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, *34*(4), 768-783.

Roll, R. (1978). Ambiguity when performance is measured by the securities market line. *The Journal of Finance, 33(4)*, 1051-1069.

Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory, 13*, 341-360.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, *19*(3), 425-442.

Sharpe, W. F. (1965). Risk aversion in the stock market: Some empirical evidence. *The Journal of Finance*, *20*(3), 416-422.

Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of Business*, *39*(1), 119-138.

Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, *25*(2), 65-86.

Treynor, J. L. (1965). How to rate management of investment funds. *Harvard Business Review*, *43*(1), 63-75.

Treynor, J. L., y Black, F. (1973). How to use security analysis to improve portfolio selection. *Journal of Business, 46*(1), 66-86.

CAPÍTULO XXVIII

Effects of the Great Recession on the Subsequent Early Recovery: Evidence from the Mexican States Output.

Pablo Mejía-Reyes

Universidad Autónoma del Estado de México

Virginia N. Del Campo-Sánchez

Universidad Autónoma del Estado de México

Abstract

On the basis of the framework proposed by Balke and Wynne (1994, 1995), extended to include the role of external and fiscal shocks, this paper estimates the effects of the characteristics of prior recessions on subsequent early recoveries of the Mexican states output during the recession of 2008-2009. Our results suggest that depth and steepness have negative and statistically significant effects on the subsequent growth recoveries. Duration seems to have no effects. In turn, fiscal and external demand shocks did not play any significant role as initial impulse. Therefore, early recoveries may be seen as an endogenous reaction of the system to low economic activity.

Key words: Regional business cycles, Recessions, Recoveries.

JEL Classification: E24, E32, R11, E39

1. Introduction

The dynamics of the business cycle regimes has attracted the attention of researchers for long time, but due to their negative effects on economic activity and welfare, recessions have been analyzed more frequently.[1] However, the uncertainty and weakness of the current expansion has

[1] See, for example, the extensive analysis of Reinhart and Rogoff (2009).

been object of concern to international institutions and academic scholars.[2] Moreover, according to the ideas of Moore (1965) and Friedman (1969, 1993) one branch of the literature has focused on the dynamics of the early stages of recoveries. In their view, the average growth rates over the first time periods of a recovery can be stronger than the rest of the expansion phase, and its intensity may be negatively associated to the severity of the prior recession. Furthermore, Friedman argues that this process can be seen as an endogenous response of the system to low economic activity before the existence of capacity excess. Notwithstanding, the role of other shocks should be taken into account to give account of the effects of other forces pulling the economy out of the recession.

Conventionally, this phenomenon has been called the "bounce-back" effect, and it received some attention during the nineties. Particularly, Balke and Wynne (1994) study whether early stages of an expansion are different from its later stages, while Wynne and Balke (1992, 1993) and Balke and Wynne (1995) examine the hypothesis that the severity of a recession favorably affects the growth rate of output during the period immediately after that recession. In general, these authors report evidence that supports the hypothesis of a "bounce-back" effect in the cases of the US and the G-7 countries. Interestingly, afterwards, this subject has been scarcely addressed in the literature despite its intuitive attractiveness.

In the case of Mexico, as far as we know, the interaction between business cycle regimes has been scarcely studied. There are some studies addressing the characteristics and synchronization of the business cycle regimes by using the classical business cycles approach introduced by Mitchell (1927) and Burns and Mitchell (1946). In particular, Erquizio (2008, 2011) builds composite indexes to represent the business cycle of several Mexican states as well as to measure de recessions of 1995, 2001-2003 and 2008-2009. In turn, Mejía (2007) and Mejía and Erquizio (2012) use the same approach to identify state expansions and recessions and to measure regime asymmetries and synchronization.

[2] For example, Dominguez and Shapiro (2013) analyze the effects of the United States (US) domestic fiscal policies and financial mechanisms as well as the role of shocks emanating from Europe, whilst Bordo and Haubrich (2012) study the effects of residential investment. In turn, Elwell (2013) investigates the causes of the weakness of private spending and Abiad et al. (2009) focus on the role of impaired financial systems and external imbalances in several economies

On the other hand, Mejía and Vergara (2015) analyzed the effects of the falls in state employment over las last two Mexican recessions on their subsequent recoveries. Since the institutional regulations of the Mexican labor markets may imply different response in employment in comparison with the reaction of output, which, in principle, may enjoy greater adjustment flexibility, this paper extends that one by estimating the effects of duration (in months), depth (accumulated fall of output) and steepness (monthly average growth rate) of the 2008-2009 recessions on the growth rate of economic activity over the early stages of the subsequent recoveries in the Mexican states.[3]

The rest of this paper is organized as follows. Section 1 briefly presents the basic concepts and the mechanisms that link the characteristics of recessions to the growth rate of subsequent recoveries. Section 2 describes the methodology to identify the business cycle regimes and their characteristics as well as the econometric methodology to be used. Section 3 presents and discusses the results. Finally, some conclusions are presented.

2. Some Theoretical Considerations

The interaction between business cycle regimes requires their definition and identification, something that can be done on the basis of the classical approach introduced by Mitchell (1927) and Burns and Mitchell (1942). In contrast to the growth cycle approach of Lucas (1977),[4] this view emphasizes the identification and characterization of those regimes. Accordingly, Burns and Mitchell (1946: 3) state that that business cycle refers to fluctuations found in the aggregate economic activity consisting of the recurrent succession of expansions, recessions, contractions, and revivals occurring at about the same time in several economic activities. In this tradition, the increase of economic activity immediately after the end of a recession is named recovery (originally, a revival) while the rest of that increased is known as expansion.

On the other hand, Friedman (1969, 1993) and Moore (1965) called the attention to the possibility that deeper recessions could be followed by stronger recoveries. In particular, by

[3] As explained later, the model specification also includes the effects of other shocks that could have contributed the economy to overcome recessions.

[4] The growth cycles approach underlines the analysis of the co-movement between the deviations from a trend of multiple macroeconomic variables, without the explicit identification of the business cycle regimes (Lucas, 1977; Kydland and Prescott 1990).

focusing on the first months of a recovery, Moore (1965) argued that there exists a negative relationship between a contraction and the subsequent recovery, which depends on the magnitude of the former (e.g. deeper recessions yield stronger recoveries, and vice versa), a phenomenon that has come to be known as the "bounce-back" or "rubber-band" effect.

By using the analogy of "plucking the string of a guitar", Friedman (1969, 1993) argued that contractions can be seen as the result of negative random shocks in demand that deviate the economy temporarily from its long-run equilibrium, causing falls in economic activity and generating capacity excess. Since deeper contractions imply greater capacity excess, they will be followed by faster recoveries due to the inexistence of restrictions in the use of the productive factors. In his view, high growth rates during early recoveries are related to inventory replenishment implemented by firms to face the eventual expansion of demand, which implies that this process is a self-corrective response of the system to low economic activity.[5]

3. Empirical Methodology

The estimation of the effects of recessions on subsequent recoveries is based on extended versions of the models advanced by Wynne and Balke (1992) and Balke and Wynne (1995). Of course, the econometric estimation requires the business cycle regimes to be identified and characterized in terms of *depth*, *steepness* and *duration* (to be defined below), which is carried out by using the approach introduced by Artis et al. (1997); Appendix 1 describes it with more detailed and Appendix 2 shows the characteristics of state recessions and the average growth rates over the subsequent early recoveries.

The econometric models to explain the average growth rate of output over the first k time periods of the recovery, $r(k)$, incorporate two sets of explanatory variables. The first one consists of variables measuring the recession characteristics, as originally proposed by Wynne and Balke (1992), while the second set contains specific shocks that may generate initial impulses that pull

[5] The interaction between business cycle regimes has not been explicitly addressed in other approaches. However, some highlights can be drawn from the real business cycles theory and the creative destruction models (see Mejía and Vergara, 2015, for an overview).

the economy out of the recession. Then the models to explain early recoveries can be formulated as follows:[6]

Model A $$r_i(k) = \alpha + \beta(T_i - P_i) + \delta\left(y_{T_i} - y_{P_i}\right) + \varphi t_i + \omega g_i + u_i \quad (1)$$

Model B $$r_i(k) = \alpha' + \gamma s_i + \varphi' t_i + \omega' g_i + u_i \quad (2)$$

where i denotes the i-th state, y represents the natural logarithm of output, P is the date of the peak defining the beginning of the recession and T is the date of the trough denoting its end,[7] s is its average growth rate of output over the course of the prior recession, t and g denote initial external demand and fiscal policy shocks, while u is a disturbance term that follows a white noise process.

Then, according to Model A, expression (1), the intensity of the recovery of output during the first k quarters after the trough is related to the *duration* (in months) of the prior recession $(T_i - P_i)$ and its *depth*, as measured by the difference between output (in logs) at the peak and trough dates, $(y_{iT} - y_{iP})$, while in Model B, expression (2), the recovery depends on the *steepness*, s_i, as measured by the average growth rate over the prior recession.[8] Therefore, if more severe recessions are followed by stronger recoveries, it is expected $\beta > 0$ and $\delta, \gamma < 0$.

Additionally, even if rapid growth over early recoveries can be seen as a self-corrective response of the system to low economic activity, the recovery of output may be driven by external demand shocks affecting exports growth, which, in turn, may cause an increased in the growth rate of tradable goods production, t_i.[9] Actually, external demand shocks are measured by using the growth rate of exports or the growth rate of the tradable goods sector production.[10] On the other hand, the recovery of output may respond to countercyclical fiscal policies followed by the government in an attempt to mitigate the effects of the Great Recession, specifically through

[6] Mejía and Vergara (2015) use the same basic specifications.
[7] More specifically, for example, y_{iT} refers to the log of output at the date of the trough.
[8] Originally, Wynne and Balke (1992) and Balke and Wynne (1995) include these variables in a single equation despite the possibility of collinearity problems. Formally, these explanatory variables may be correlated, given the following definition: steepness = depth/duration. The specifications defined in Models A and B avoid this problem.
[9] This seems to be a sensible argument given the high integration of the Mexican economy and its states to the US economy, which has implied an increasing synchronization of their business cycles, as several studies have shown (see Kose et al., 2004, and Mejía and Campos, 2011).
[10] The tradable goods sector includes: agriculture, livestock, forestry, fishing, hunting, mining, manufacturing, temporary accommodation and preparation of food and beverage services.

greater growth rates of the government expenditure, g_i.[11] Therefore, the estimated models include both the growth rates of the net federal and state government expenditure as regressors.

The growth rates of these variables of the year when the recovery started are introduced in models A and B trying to capture the initial impulse of these shocks on output. It is expected external shocks to have positive effects on the production of tradable goods and, therefore, on the total output recovery ($\varphi, \varphi' > 0$). Whilst, the sign of the coefficient of g_i may be positive or negative depending on the actual effects of the fiscal policy across the Mexican states: if it was countercyclical over the recession period $\omega, \omega' > 0$, and vice versa.

On the other hand, output recoveries in one state are expected to be accompanied by similar patterns in neighboring states due to different factors, such as the occurrence of common or sectorial shocks or the transmission of shocks from one to other states. In general, it is reasonable to assume that recoveries spill over across states generating spatial autocorrelation, which would require model 3 to be extended to incorporate this possibility. Thus, the most popular spatial econometric models are considered to capture spatial autocorrelation (Anselin 1998, 2005).

The first one is the spatial lag model, which focuses in assessing the existence and strength of spatial interactions across states (substantive spatial dependence). In that sense, it directly incorporates the effects of recoveries of neighbors on the recovery of the unit under analysis by adding a regressor in the form of a spatially lagged dependent variable. To take spatial autocorrelation into account, let us reformulate model (1) as follows,

$$r_i(k) = \rho W r_i(k) + \alpha + \beta(T_i - P_i) + \delta\left(y_{T_i} - y_{P_i}\right) + \varphi t_i + \omega g_i + u_i \qquad (3)$$

where W is the spatial weight matrix with entries equal to 1 if two states share a border, and 0 otherwise. Therefore, $Wr_i(k)$ is the spatial lag of the endogenous variable and ρ is the spatial autoregressive coefficient which measures the intensity of the interdependencies between the sample observations.

[11] It has been argued that the federal government followed a countercyclical fiscal policy in the context of the Great Recession through different programs to promote the construction of infrastructure and support firms and families, which meant significant increases in the government expenditure (see Villagómez and Navarro, 2010).

On the other hand, spatial autocorrelation may also occur as nuisance resulting from misspecification or inadequate delineation of spatial units, which implies that the autocorrelation is restricted to the error terms. The corresponding model assumes the following form,

$$r_i(k) = \alpha + \beta(T_i - P_i) + \delta\left(y_{T_i} - y_{P_i}\right) + \varphi t_i + \omega g_i + u_i \qquad (4)$$

where $u = \lambda W u + e$ and e follows a Gaussian white noise. Analogous models would be defined for expression (2).

The choice between models (3) and (4) is based on a set of Lagrange Multiplier-type statistic tests obtained from the estimation of conventional linear regression models, like models (1) and (2). Specifically, the null hypotheses of no substantive or nuisance spatial autocorrelation are evaluated by using the LM-type statistics LM(lag) and LM(err), respectively (see Appendix 3, and Anselin, 2001, 2005, for further details).[12] There are several possibilities to choose the model to be estimated depending on the statistical significance and relative values of these statistics. First, if both of them are not significant, the null cannot be rejected and the conventional regression results are accepted. Second, if the test statistic LM(lag) turns out to be significant, but LM(error) is insignificant, spatial autocorrelation appears to be substantive and the spatial lag model is viewed as appropriate, and vice versa. Third, when both test statistics prove to be significant, the robust to misspecification versions of the LM test statistics, RLM(lag) and RLM(err), will guide the decision according to the criteria of the second case. But if both robust versions prove to be significant, the test with the higher significance (i.e. the lower *p*-value) will indicate the appropriate model to be estimated.

Finally, models are also extended to consider not only values of k = 3, 4 quarters, as in Wynne and Balke (1992) and Balke and Wynne (1995), but also k equates the number of time periods required to get the value of output at the date of the peak defining the onset of the prior recession. In fact, this case corresponds to what is properly named *recovery* in the classical business cycle approach.[13]

---

[12] Equivalently, the null hypotheses are $\rho = 0$ in model (3) and $\lambda = 0$ in model (4), respectively.

[13] Indeed, increases in output or employment are divided in two phases. The first one is named *recovery* and refers to the increase in output from the trough to the point at which the level of the prior peak is got. It is said that the economy is actually in *expansion* when it goes from that level to the new peak.

4. Empirical Evidence: The Great Recession Effects Of Subsequent Recoveries

Over the last three decades the Mexican economy has gone through deep transformations to become an open and market-oriented economy. Most restrictions to international trade and foreign investment were removed while the majority of public enterprises were reprivatized and markets were deregulated (see Cárdenas, 1995; Moreno-Brid and Ros, 2009). As a consequence, the international transactions grew at exponential rates, mainly those carried out with the US, provoking an increasing integration of these economies (Kose et al., 2004; Tornell et al., 2004). A major consequence of this process has been the synchronization of their aggregate business cycles, especially after the North American Free Trade Agreement (NAFTA) entered into force in 1994, such as several studies have documented (Gutiérrez et al., 2005; Ramírez and Castillo 2009; Mejía and Erquizio, 2012). Therefore, the quick and rather violent transmission of the Great Recession to the Mexican economy was not surprising at all.

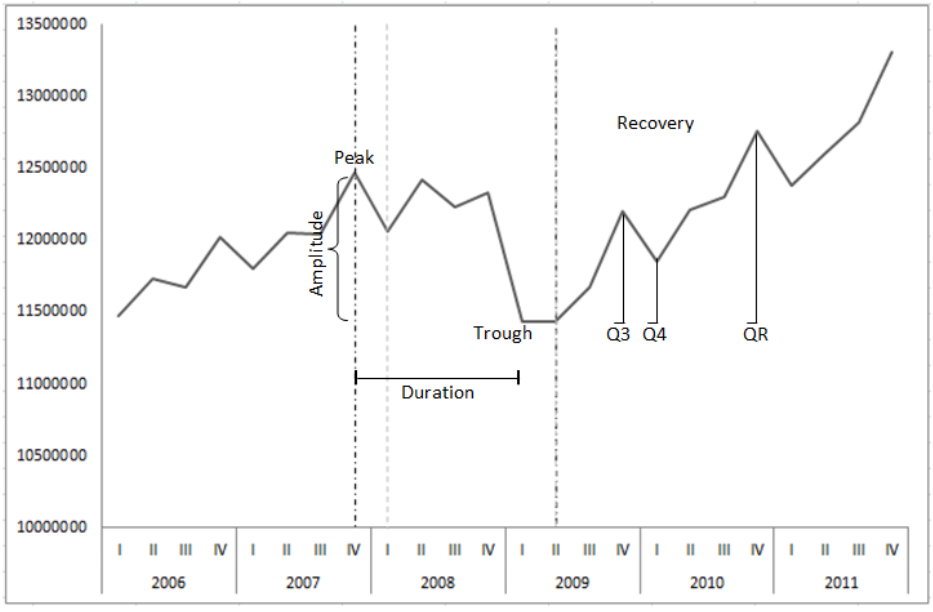
Graph 1 shows the evolution of the Mexican GDP and the main properties of the Great Recession, dated by using the AKO methodology and characterized in terms of its duration, depth and steepness.[14] This recession started after the fourth quarter of 2007, when GDP got its highest value or peak, and lasted for five quarters, which reflects a high synchronization with the US recession.[15] The measures of depth and steepness, in turn, show that the 2008 recession was really severe with an accumulated output fall of 8.3% and a quarterly average growth rate of -1.7%, respectively. In contrast, the US GDP fell by 2.3% and experience a quarterly average growth rate of -0.6% over the same recession. Thus, it is evident that even if this recession was originated in the US economy, its effects were magnified when transmitted to the Mexican economy. Graph 1 also presents the performance of output over the first three (EG3), four (EG4) and the number

[14] In Mexico there is not official business cycle turning point dates, but the National Institute of Statistics and Geography (INEGI) publishes a Coincident Index that tries to capture the performance of the unobserved business cycle. For the Great Recession it reports a peak in April 2008 and a trough in June 2009. These dates differ from those reported in Graph 1, but they are largely consistent with those obtained when disaggregated measures of output, like industrial or manufacturing production (Mejía and Erquizio, 2012), or employment (Mejía and Vergara, 2015) are used.

[15] Notice that some other studies consider that the Mexican recession ended during the second quarter of 2009, at the same time that in the US. However, the AKO methodology suggests that this happened a quarter earlier since the value of GDP of that period is slightly lower than that of the subsequent quarter. In general, this turning points are highly consistent with those reported in the literature (see Mejía and Erquizio, 2012, chapter 4).

of quarters required to get the value at the previous peak (EGR) after the trough indicating the end of the recession. As suggested by Friedman (1969, 1993), the growth rates decrease as time passes, from 2.2 to 1.6%, respectively, which may be explained in principle by the reduction in capacity excess.

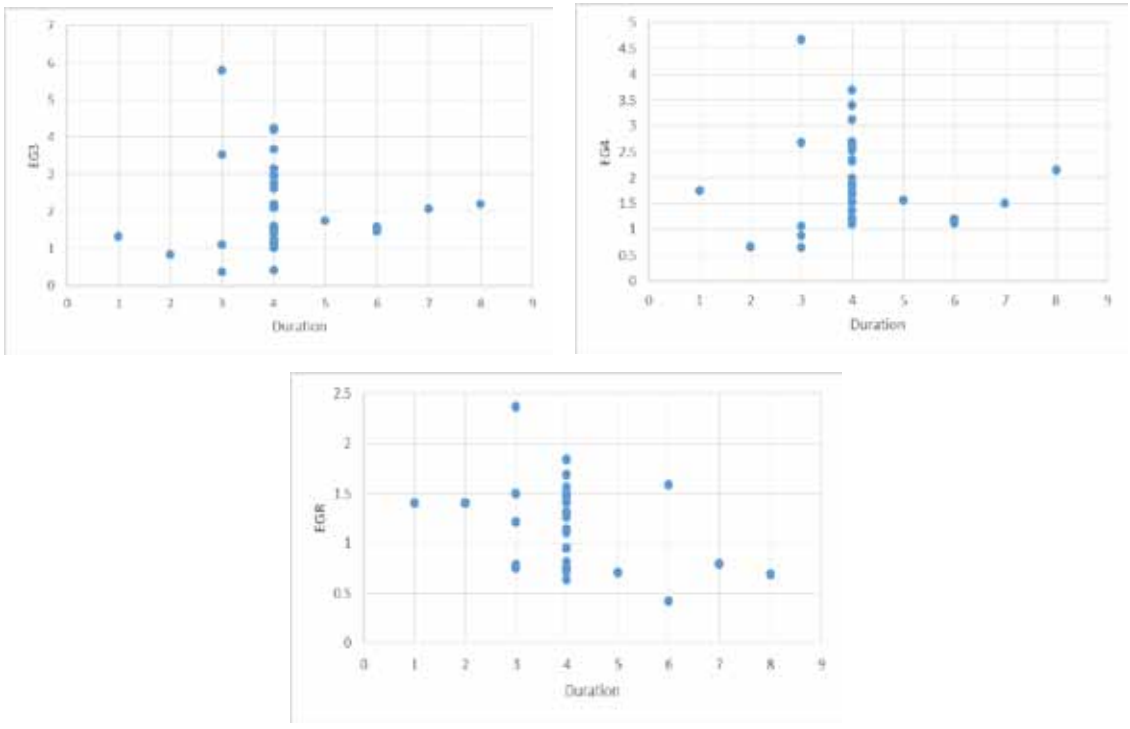
Graph 1. Recession and recovery characteristics of Mexican GDP around the Great Recession

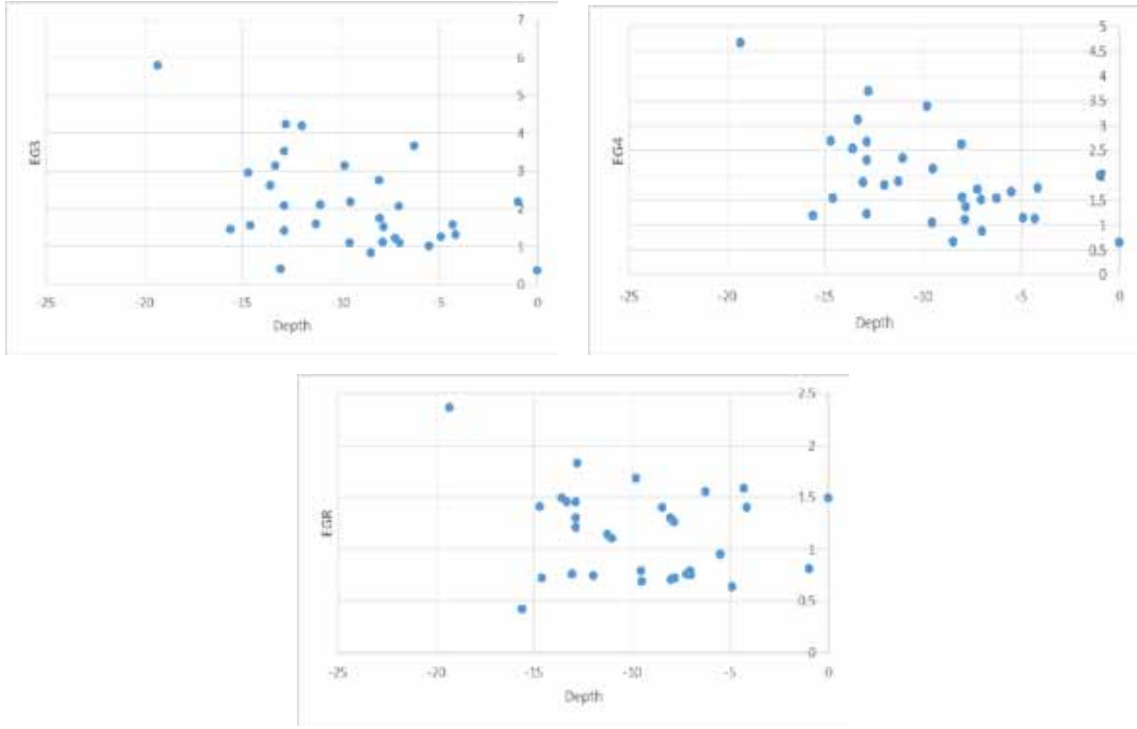


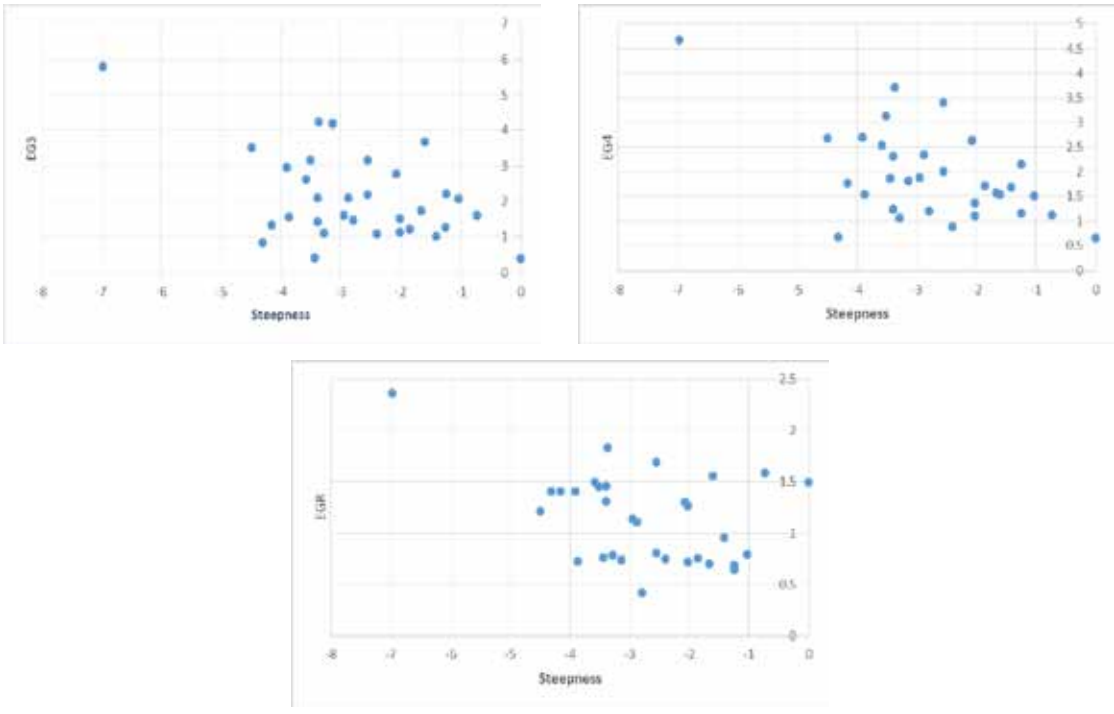
Now, at state level, the characteristics of the recession and the growth rates over the subsequent early recovery are measured on the basis of the Quarterly Indicator of State Economic Activity (QISEA) published by the National Institute of Statistics and Geography (INEGI).[16] Turning point, duration, depth and steepness as well as EG3, EG4 and EGR are presented in Appendix 1 for the 32 Mexican states. Like in the national GDP, growth rates are lower at longer time horizons in several states and regions. In turn, the panels of graph 2 show a negative relationship between depth and steepness with the growth rates of recoveries, suggesting that deeper and steeper recessions are accompanied by stronger recoveries. However, there seems to be no association between duration and recoveries growth.

[16] These time series (seasonally-adjusted) are available in the source (www.inegi.org.mx).

Graph 2. Relationship between the Great Recession characteristics and the growth rates of subsequent early recoveries in the Mexican states

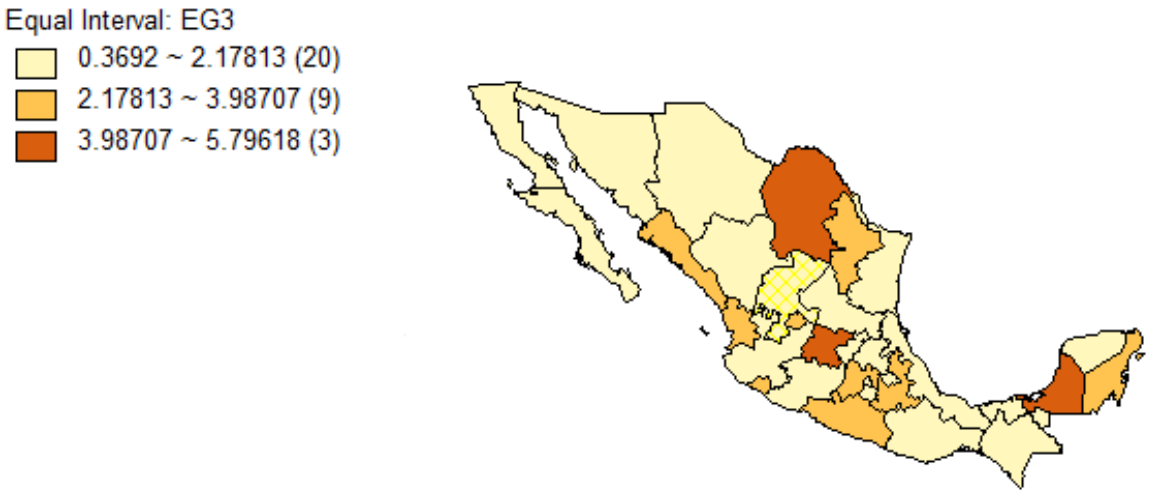




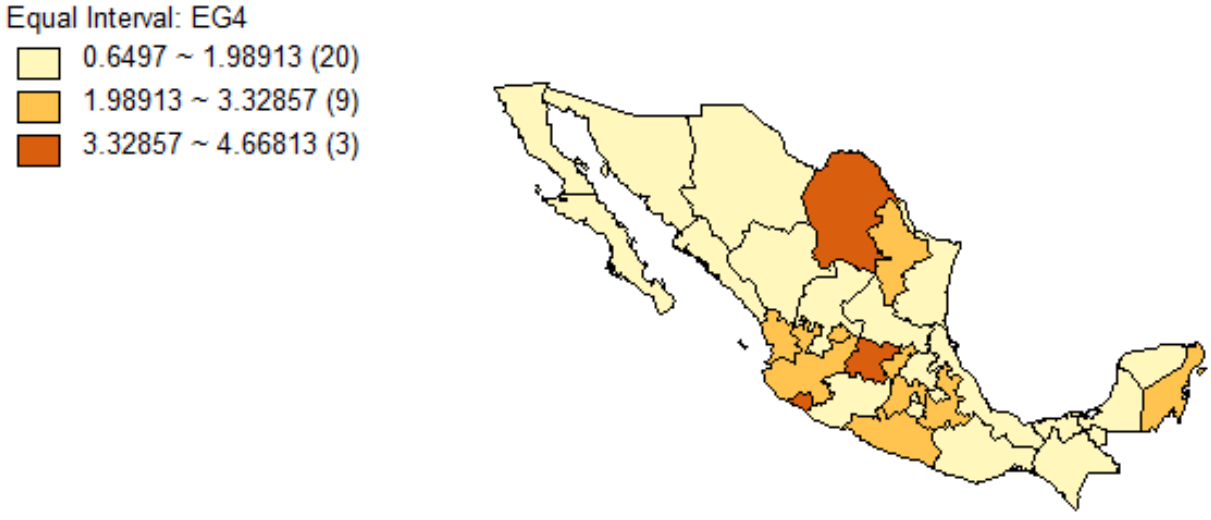


On the other hand, Maps 1 to 3 show the spatial distribution of EG3, EG4 and EGR, respectively. As it can be seen, there is not an evident spatial pattern in the distribution of the output growth rates across the Mexican states. In fact, the Moran's Index estimates (*p* values) are equal to -0.140 (0.185), 0.016 (0.328) and -0.122 (0.241), respectively, which suggests that the null of no spatial autocorrelation cannot be rejected in any case at conventional levels of significance

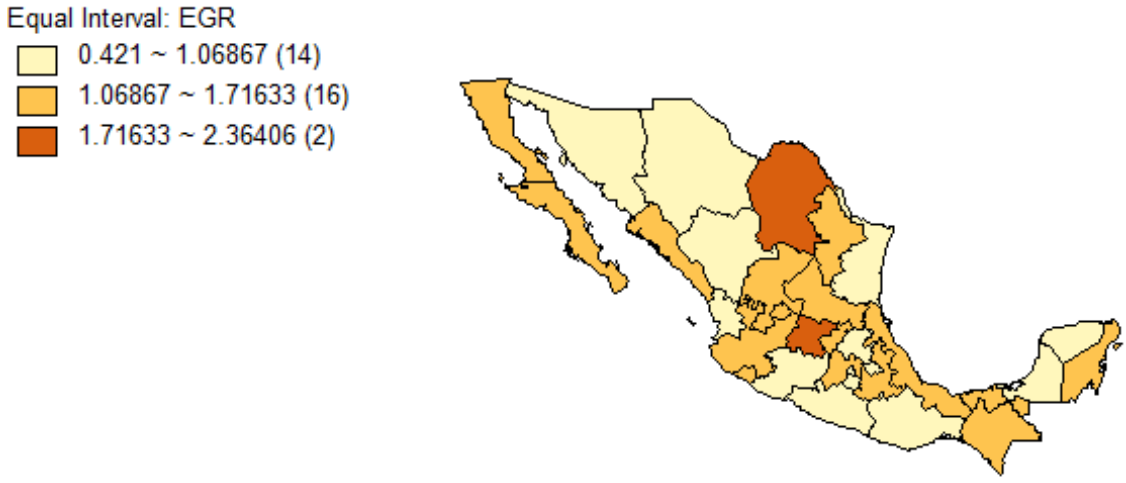
Map 1. Spatial distribution of average growth rates over the first three quarters of the recovery



Map 2. Spatial distribution of average growth rates over the first four quarters of the recovery



Map 3. Spatial distribution of average growth rates over the first four quarters of the recovery



A more formal evaluation of the presence of spatial dependence is based on the LM test discussed in section 2. Table 1 reports the corresponding *p*-values for the different specification models, whose denominations are structured as follows: M stands for model; A and B refer to models defined in expressions (1) and (2); 3, 4 and R refer to the period of the early recovery, and 1 or 2 indicates whether exports or tradable goods sector production enter in the model. Thus, for example MA42 denotes a specification based on Model A for the growth rate computed over the first 4 quarters of the recovery considering the growth rate of the tradable goods production to measure external demand shocks. To ease the identification, the list of variables entering each models are listed in the table. In general, the *p*-values of the LM test statistics suggest that the null of no spatial dependence cannot be rejected.[17] Therefore, conventional cross-section models were estimated.

[17] A couple of exceptions relate to the cases of MA42 and MB42, where there is some evidence at 10% of significance. The decision rules, however, state that if LM(lag) and LM(error) are not statistically significant there would not be evidence of spatial dependence and conventional models should be estimated. In these cases, spatial models were estimated and reported in Table 2 for MB42, but the autocorrelation coefficient was significant at 10% of significance. The results of cross-section models, however, were not significantly different. Also, it is interesting to observe that similar results are reported by Mejía and Díaz (2015) and Mejía and Vergara (2015) when analyzing the dynamics of state output over the Great Recession and state employment over early recoveries in Mexico, respectively.

Table 1. *p* values of LM tests for models including exports or tradable goods sector production as explanatory variables

Explained / Explanatory variables	EG3 DUR DEPTH NFE NSE X	EG3 STEEPNESS NFE NSE X	EG3 DUR DEPTH NFE NSE TGS	EG3 STEEPNESS NFE NSE TGS
Model	MA31	MB31	MA32	MB32
LM (Lag)	0.642	0.368	0.464	0.354
Robust LM(Lag)	0.193	0.366	0.438	0.928
LM (error)	0.877	0.187	0.679	0.302
Robust LM(error)	0.220	0.186	0.626	0.644
LM (SARMA)	0.423	0.278	0.679	0.585
Explained / Explanatory variables	EG4 DUR DEPTH NFE NSE X	EG4 STEEPNESS NFE NSE X	EG4 DUR DEPTH NFE NSE TGS	EG4 STEEPNESS NFE NSE TGS
Model	MA41	MB41	MA42	MB42
LM (Lag)	0.945	0.961	0.870	0.878
Robust LM(Lag)	0.200	0.231	0.107	0.181
LM (error)	0.501	0.490	0.324	0.263
Robust LM(error)	0.148	0.167	0.059	0.082
LM (SARMA)	0.351	0.384	0.168	0.218
Explained / Explanatory variables	EGR DUR DEPTH NFE NSE X	EGR STEEPNESS NFE NSE X	EGR DUR DEPTH NFE NSE TGS	EGR STEEPNESS NFE NSE TGS
Model	MAR1	MBR1	MAR2	MBR2
LM (Lag)	0.659	0.504	0.391	0.304
Robust LM(Lag)	0.298	0.968	0.766	0.972
LM (error)	0.936	0.475	0.419	0.263
Robust LM(error)	0.344	0.797	0.955	0.660
LM (SARMA)	0.580	0.774	0.691	0.535

The estimation results based on Models A and B are presented in Tables 2 and 3 and the final estimated models have been tested for an adequate specification: the *p*-values of the normality

(Jarque-Bera) and heteroskedasticity (Breusch-Pagan-Godfrey and Koenker-Bassett) statistic tests are reported in the same tables. In general, there is no evidence of specification problems, except in models MAR1 and MAR2 that show some evidence of heteroscedasticity.

Table 2. Estimates of the effects of the Great Recession characteristics on the subsequent recovery growth rates (External shocks are measured by the growth rate of exports)

	MA31	MB31	MA41	MB41	MAR1	MBR1
C	-0.317	0.801	0.370	0.887	1.072	0.924
	(0.648)	(0.141)	(0.444)	(0.021)	(0.0004)	(0.000)
Duration	0.262		0.093		-0.009	
	(0.099)		(0.390)		(0.880)	
Depth	-0.143		-0.136		-0.022	
	(0.008)		(0.000)		(0.261)	
Steepness		-0.443		-0.398		-0.111
		(0.011)		(0.001)		(0.045)
NFE	-0.035	-0.014	-0.039	-0.024	-0.026	-0.023
	(0.205)	(0.647)	(0.045)	(0.246)	(0.019)	(0.025)
NSE	0.012	0.024	0.002	0.012	0.005	0.006
	(0.513)	(0.186)	(0.796)	(0.322)	(0.426)	(0.284)
X	-0.009	-0.003	-0.001	0.002	-0.005	-0.004
	(0.266)	(0.754)	(0.803)	(0.679)	(0.095)	(0.127)
R^2	0.405	0.255	0.475	0.371	0.289	0.357
Jarque-Bera	0.969	0.521	0.892	0.715	0.567	0.544
Breush-Pagan	0.317	0.308	0.408	0.099	0.041	0.765
Koenker Bassett	0.290	0.130	0.274	0.202	0.052	0.675

p-values in parenthesis. The figures of the tests of Jarque-Bera, Breush-Pagan and Koenker-Bassett are also *p*-values. Source: own estimation.

Table 3. Estimates of the effects of the Great Recession characteristics on the subsequent recovery growth rates (External shocks are measured by the growth rate of the tradable goods sector production)

	MA32	MB32	MA42	MB42	MAR2	MBR2
C	0.338	0.582	0.712	0.621	1.212	0.873
	(0.677)	(0.208)	(0.207)	(0.013)	(0.001)	(0.000)
Duration	0.102	0.015	0.017		-0.0511	
	(0.561)	(0.277)	(0.882)		(0.479)	
Depth	-0.112		-0.114		-0.022	
	(0.066)		(0.008)		(0.367)	
Steepness		-0.353		-0.381		-0.126
		(0.017)		(0.000)		(0.032)
NFE	-0.018	-0.004	-0.033	-0.025	-0.019	-0.018
	(0.493)	0.855	(0.077)	(0.075)	(0.076)	(0.068)
NSE	0.006	0.015	0.003	0.012	0.001	0.002
	(0.706)	(0.280)	(0.774	(0.066)	(0.837)	0.671
TGS	-0.048	-0.082	-0.028	-0.054	-0.006	-0.003
	(0.225)	(0.004)	(0.288)	(0.086	(0.686)	0.778
λ				-0.352		
				(0.086)		
R^2	0.411	0.454	0.496	0.466	0.212	0.196
Jarque-Bera	0.524	0.591	0.838	0.821	0.187	0.374
Breush-Pagan	0.477	0.844	0.165	0.439	0.022	0.914
Koenker Bassett	0.463	0.849	0.124	0.564	0.041	0.856

p-values in parenthesis. The figures of the tests of Jarque-Bera, Breush-Pagan and Koenker-Bassett are also *p*-values. Source: own estimation.

As a general, fact, the explanatory power of the econometric models is rather high, with determination coefficients $\bar{R}^2$ greater than 0.5, when the growth rates of exports enter in the models (Table 1) and lower (below 0.5) when the tradable goods sector production growth rates do (Table 2) even if none of them has robust effects on growth recoveries. Interestingly, the growth rates of these variables of the year the state recoveries started have negative and not significant coefficients in several specifications, which suggests that external shocks did not have an important initial impulse in the recovery of state output, a result that differs from those of Mejía and Vergara (2015).[18] Actually, the sign of the coefficients would indicate that exports and tradable goods production were still falling when output started growing.[19]

Something similar happens with fiscal shocks. The growth rates of net state expenditure (NSE) have positive but not statistically significant effects in almost all specifications, while net federal government expenditure (NFE) has negative effects that are significant in most models including tradable goods production, but not in the others. Altogether this evidence suggest that fiscal shocks did not play either a significant role as initial impulse of the state recoveries and it can be seen as additional evidence of what is been called "too little and too late" (Villágomez and Navarro, 2010). These results are, in general, consistent with the findings of Mejía and Vergara (2015) for the case of state employment.

On the other hand, the results show that recession depth and steepness are significantly associated to the average growth rates of output over the early recovery in the Mexican states, as implied by the Friedman's "plucking model". Actually, the corresponding estimates have the correct sign in all specifications and are statistically significant in most cases. Specifically, depth has significant effects over the first three and four quarters of recoveries but not at the longer horizons required to get that value at the previous peak which in the average equates 11.2 quarters (see Appendix 1). Steepness, in turn, has always negative and statistically significant effects (at least at 5% of significance), as suggested by the theory, but also the magnitude of the estimated coefficients decreases at longer time horizons, which may indicate that capacity excess is decreasing and firms are facing restrictions to expand.

[18] These differences may be explained by the fact that peaks in employment were got earlier than in output and troughs were got later, which not only generates different characteristics of recessions but also different values of the measures of external and fiscal shocks.

[19] There may be some limitations in this interpretation since we have quarterly data of output, but the information of exports and tradable goods production is only available at an annual basis.

Finally, the duration of recessions are not statistically associated to output growth over the subsequent recoveries. Thus, although the estimated coefficients have the expected sign at short time horizons they are not statistically significant.

5. Conclusions

This paper has tested the "bounce-back" effect hypothesis of Friedman (1969, 1993) whose central argument is that deeper, steeper and/or longer recessions are followed by stronger recoveries due to a self-corrective response of the system to low economic activity. We have analyzed the effects of the Great Recession on the subsequent recovery of output in the Mexican states by using the model specification proposed by Wynne and Balke (1992) and Balke and Wynne (1995), extended to take into account the effects of external demand and fiscal shocks as initial impulses, according to the lines defined by Mejía and Vergara (2015).

Then, state recessions have been characterized in terms of their steepness, depth and duration, whilst growth rates of recoveries have been computed over three, four and the needed number of quarters to get the value at the prior peak. Two econometric model specifications have been estimated including depth and duration (Model A) and steepness (Models B) as explanatory variables. Our results suggest that the severity of recession output drops plays a relevant role in the explanation of growth over the subsequent recoveries. In general, steepness and depth are significantly associated to growth over early recoveries especially during the first three and four quarters: their coefficients were negative and statistically significant in most models. These results are consistent with those reported by Wynne and Balke (1992) and Balke and Wynne (1996). Duration, in turn, does not have any effect. On the other hand, regarding the effects of other shocks that may have pulled the economy out the recession, our results suggest that neither the fiscal policy followed by the federal and state governments nor the external demand have contributed to the recovery of output from the 2008 recession at state level in the Mexican economy.

Thus, in general, the evidence reported in this paper is consistent with the implications of the "bounce-back" effect and provides some support to the hypothesis that deeper or steeper recessions are followed by stronger recoveries in the Mexican states. Furthermore, given that fiscal and external demand shocks seem to play no role, recoveries of output may be seen as an

endogenous reaction of the system to lo economic activity as suggested by the "plucking models", although this last result may be flawed due to data limitations.

References

Abiad, A., R. Balakrishnan, P. Koeva, D. Leigh and I. Tytell (2009). "What's the damage? Medium-term output dynamics after banking crises". IMF Working Papers, 09/245.

Anselin, L. (1998). "Exploratory spatial data analysis in a geocomputational environment". In P. Longley, S. Brooks, B. Macmillan and R. McDonnell (Eds.), *GeoComputation, a Primer*. New York: Wiley.

Anselin, L. (2001). "Spatial econometrics". In B. H. Baltagi. *A Companion to theoretical econometrics*, New York: Blackwell.

Anselin, L. (2005). *Exploring spatial data with GeoDaTM: A workbook*. Urbana-Champing, IL: Spatial Analysis Laboratory, Department of Geography, University of Illinois.

Artis, M., Z. G. Kontolemis and D. R. Osborn (1997). "Business cycles for G7 and European countries". *The Journal of Business*, 70(2): 1-16.

Balke, N., and A. Wynne (1994). "The dynamics of recoveries". Federal Reserve Bank of Dallas, Working Paper, 94/06.

Balke, N., and A. Wynne (1995). "Recessions and recoveries in real business cycle models". *Economic Inquiry*, 33(4): 640-663.

Balke, N., and A. Wynne (1996). "Are deeper recessions followed by stronger recoveries? Results for the G-7 countries" *Applied Economics*, 28:889-897.

Boldin, M. D. (1994). "Dating turning points in the business cycle". *The Journal of Business*, 67(1): 97-131.

Bordo, M., and J. Haubrich (2012). "Deep recessions, fast recoveries, and financial crisis: evidence from the American record". Federal Reserve Bank of Cleveland, Working Paper 18194.

Burns, A. F., and W. C., Mitchell (1946). *Measuring Business Cycles*. Studies in Business Cycles, No. 2. New York: National Bureau of Economic Research.

Cárdenas, E. (1995). *La política económica en México, 1950-1994*. México: Fondo de Cultura Económica.

Dominguez, K. M., and M. D., Shapiro (2013). "Forecasting the recovery from the great recession: is this time different?". NBER, Working Paper, 18751.

Elwell, C. (2013). "Economic recovery: sustaining U.S. economic Growth in a Post-Crisis Economy." Congressional Research Service, April.

Erquizio, A. (2008). "Ciclos económicos del Estado de México en el contexto regional: 1980-2005". In P. Mejía, L. E. Del Moral and O. M. Rodríguez (coords.), *Actividad económica en el Estado de México: Desempeño productivo y sector externo*. Biblioteca del Bicentenario, Gobierno del Estado de México, Toluca.

Erquizio, A. (2011). "La gran recesión de Estados Unidos y de México 2008-2009 y sus efectos regionales". In P. Mejía and M. E. Morales (coords.). *Integración y recesión económica en el binomio México-Estados Unidos*. UAEMex, Toluca.

Friedman, M. (1969). *The optimum quantity of money and other essays*, Chicago: Aldine Publishing Company.

Friedman, M. (1993). "The "plucking model" of business fluctuations revisited". *Economic Inquiry,* XXXI: 171-177.

Gutiérrez, E.E, P. Mejía and B. Cruz (2005). "Ciclos económicos y sector externo en México. Evidencia de relaciones cambiantes en el tiempo." *Estudios Económicos de Desarrollo Internacional*, 5(1): 65-92.

Kose, M.A., G. M. Meredith and C.M. Towe (2004). "How Has NAFTA Affected the Mexican Economy? Review and Evidence" IMF Working Paper, WP/04/59.

Kydland, F. E., and E. C. Prescott (1990). "Business cycle: real facts and monetary myth". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 14(2): 3-18.

Lucas, R.E (1977). "Understanding business cycles". *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5: 7-29.

Mejía, P. (2007). "Expansions and recessions in the Mexican states: a classical business cycles approach". *Panorama Económico*, III(5): 7-38.

Mejía, P. y J. Campos (2011). “Are the Mexican states and the United States business cycles synchronized? Evidence from the manufacturing production”. *Economía Mexicana. Nueva Época*, XX(1): 7-112.

Mejía, P. and A. Erquizio (2012). *Expansiones y recesiones en los estados de México*. Hermosillo: UNISON-Pearson-UAEM.

Mejía, P. and M. A. Díaz (2015). "Effects of the Great Recession on state output in Mexico". *EconoQuantum*, 12 (2): 25-45.

Mejía, P. and R. Vergara (2015). “Are More Severe Recessions Followed by Stronger Recoveries? Evidence from the Mexican States Employment”. Manuscript, CICE-FE-UAEM.

Mitchell, W. (1927). *Business cycles: The problems and its setting*, New York: NBER.

Moore, G. H. (1965). "Tested knowledge of business cycles". In R. A .Gordon and L.R. Klein (eds.), *AEA Readings in Business Cycles*, Homewood: Richard D. Irwin.

Moore, G. H. and V. Zarnowitz (1986). “The development and role of the of the National Bureau of Economic Research’s business cycle chronologies”. In R. J. Gordon (ed.). *The American Business Cycles*. Chicago: Chicago University Press.

Moreno-Brid, J.C. and J. Ros (2009). *Development and Growth in the Mexican Economy*. New York: Oxford University Press.

Ramírez, R., and R. Castillo (2009). “Integración económica en América del Norte: lección de la experiencia de la Unión Europea para el TLCAN”. *Estudios Fronterizos,* 10(19):183-208.

Reinhart, C. and K. Rogoff (2009). *This time is different*. Princeton: Princeton University Press.

Tornell, A., F. Westermann and L. Martínez (2004). “NAFTA and Mexico’s Economic Performance”. CESifo Working Paper 1155.

Villagómez, A. and L. Navarro (2010). “Política fiscal contracíclica en México durante la crisis reciente: un análisis preliminar”. Centro de Investigación y Docencia Económicas, Documento de Trabajo, Núm. 475.

Wynne, M., and N. Balke (1992). “Are deep recessions followed by strong recoveries?”. *Economics Letters*, 39(2): 183-189.

Wynne, M. and N. Balke (1993). "Recessions and recoveries". *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Dallas, First Quarter: 1-18.

Appendix 1. Chronology of the classical business cycle in the Mexican states output (QISEA)

		Recession					Recovery			
Region	States	Peak	Trough	Duration	Depth	Steepness	EG3	EG4	EGR	Rec. (Quarters)
	National	2008-II	2009-I	3	-10.607	-3.669	2.215	0.949	1.612	7
North	BC	2008-II	2009-II	4	-12.886	-3.390	1.422	1.230	1.457	10
	SON	2008-II	2009-II	4	-7.203	-1.852	1.203	1.713	0.758	10
	CHIH	2008-II	2009-II	4	-14.604	-3.870	1.553	1.540	0.723	18
	COAH	2008-III	2009-II	3	-19.323	-6.970	5.796	4.668	2.364	10
	NL	2008-II	2009-II	4	-13.580	-3.583	2.613	2.533	1.494	10
	TAMPS	2008-I	2009-III	6	-15.617	-2.790	1.451	1.191	0.421	19
			Average	**4.2**	**-13.9**	**-3.7**	**2.3**	**2.1**	**1.2**	**12.8**
Center-North	BCS	2008-II	2009-I	3	0	0	0.3692	0.6497	1.4935	5
	SIN	2008-III	2009-III	4	-6.256	-1.602	3.6632	1.5362	1.5538	7
	DGO	2008-II	2009-I	3	-7.007	-2.392	1.0815	0.8797	0.7476	10

	ZAC	2008-IV	2009-I	1	-4.157	-4.157	1.3160	1.7543	1.4010	5
	SLP	2008-II	2009-II	4	-11.277	-2.947	1.6029	1.8758	1.1387	13
	Average			**3.00**	**-5.74**	**-2.22**	**1.61**	**1.34**	**1.27**	**8.00**
West	AGS	2008-II	2009-I	3	-12.875	-4.490	3.5160	2.6741	1.2082	12
	COL	2008-I	2009-I	4	-9.812	-2.549	3.1419	3.3999	1.6858	8
	GTO	2008-II	2009-II	4	-12.805	-3.368	4.2314	3.6970	1.8317	8
	JAL	2008-II	2009-II	4	-11.028	-2.879	2.0953	2.3451	1.1031	11
	MICH	2008-II	2009-I	3	-9.537	-3.286	1.0888	1.0593	0.7871	13
	NAY	2008-III	2009-III	4	-.9818	-2.55	2.1827	1.9938	0.8099	15
	QRO	2008-II	2009-II	4	-12.863	-3.384	2.0905	2.3059	1.3058	12
	Average			**3.7**	**-10.0**	**-3.2**	**2.6**	**2.5**	**1.2**	**11.3**
Center	DF	2008-II	2009-II	4	-7.829	-2.018	1.5098	1.3633	0.7196	13
	MÉX	2008-II	2009-II	4	-8.040	-2.074	2.7604	2.6241	1.3035	8
	HGO	2008-III	2009-III	4	-13.053	-3.436	0.3945	1.8650	0.7589	17
	MOR	2008-II	2009-I	7	-7.016	-1.034	2.0636	1.5045	0.7891	12
	PUE	2008-II	2009-II	4	-13.306	-3.507	3.1469	3.1199	1.4518	10

	TLAX	2008-I	2009-II	5	-8.020	-1.658	1.7391	1.5655	0.7021	14
	Average			**4.7**	**-9.5**	**-2.3**	**1.9**	**2.0**	**1.0**	**12.3**
South	GRO	2007-II	2009-II	8	-9.496	-1.239	2.1953	2.1457	0.6891	15
	OAX	2008-II	2009-II	4	-5.512	-1.408	1.0181	1.6734	0.9528	7
	CHIS	2008-II	2009-II	4	-7.840	-2.021	1.1144	1.1092	1.2641	9
	VER	2007-IV	2009-II	6	-4.285	-0.727	1.5839	1.1185	1.5839	9
	Average			**5.5**	**-6.8**	**-1.3**	**1.5**	**1.5**	**1.1**	**10.0**
Southeast	CAM	2008-IV	2009-IV	4	-11.983	-3.141	4.1880	1.8039	0.7414	16
	QROO	2008-II	2009-II	4	-14.724	-3.904	2.9523	2.6944	1.4057	13
	TAB	2008-IV	2009-II	2	-8.438	-4.312	0.8317	0.6621	1.4041	11
	YUC	2008-I	2009-I	4	-4.901	-1.249	1.2510	1.1499	0.6400	10
	Average			**3.5**	**-10.0**	**-3.2**	**2.3**	**1.6**	**1.0**	**12.5**
	National average			4.1	-9.6	-2.7	2.1	1.9	1.1	11.3

Source: own elaboration on the basis of information from INEGI.

Appendix 1. Identifying business cycle regimes

The recession and recovery regimes are identified and characterized by using the classical business cycles approach of Artis et al. (1997). The cycle regimes are identified after the *turning points* are dated. According to Boldin (1994), they are classified as *peaks* -the period immediately preceding a decline in real activity, or *recessions* -and *troughs* -the period immediately preceding an upturn, or *expansion*. Once the regimes are dated, their characteristics can be defined: the *duration* of a cycle regime can be measured by the time between a peak (trough) and a trough (peak) in the case of a recession (expansion); *depth* is the percentage accumulated change in economic activity, and *steepness* is the average growth rate over the regime.

The methodology of Artist et al. (1997) is used to date the turning points and the regimes of the specific state cycles.[20] In general, the methodology can be summarized in the following steps:[21]

1) Extreme values are identified and replaced in order to focus the attention on broad upward and downward movements.[22]
2) Original values are smoothed by using a centered moving average of three quarters to cancel out short-run erratic fluctuations. Turning points are tentatively defined in this series by identifying points higher (peaks) or lower (troughs) than four periods on either side, with peaks and troughs required to alternate.
3) Preliminar turning points are also dated in the (original) unsmoothed series by using similar rules, with the additional requirements that the amplitude of a phase to be at least as large as one standard error of the quarterly log changes and the duration of a cycle be at least five quarters.
4) The two sets of tentative turning points are compared: when there is a close correspondence between them (± 2 quarters), the existence of a turning point is confirmed and dated in the unsmoothed (original) series.

[20] The main advantage of this methodology is that it is based only on a univariate analysis and generates US business cycle regimes economy very close to those proposed by the National Bureau of Economic Research (NBER), a private institutions in charge of dating the corresponding turning points (see Moore and Zarnowitz 1986; Boldin 1994).
[21] See Artis et al. (1997) for further details. Mejía and Erquizio (2012) among others, use this approach to analyze the cycles of the Mexican states.
[22] An extreme value is defined as that whose (log) change is greater than 3 standard errors of that series; extreme values are replaced by the arithmetic average of the two corresponding adjacent observations of the original (seasonally-adjusted) series in levels.

Appendix 2. Moran´s *I* index and spatial autocorrelation LM tests

The Moran´s I index

It is a univariate test statistic that evaluates the null hypothesis of no autocorrelation. Conventionally, it is formulated as,

$$I = \frac{N}{S_0}\frac{\sum_{(2)} w_{ij}(y_i-\bar{y})(y_j-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2} \quad \text{(A1)}$$

where $S_0 = \sum_i \sum_j w_{ij} = \sum_{(2)} w_{ij}$, i.e., the sum of spatial weights; $\bar{y}$ is the mean or expected value of the variable *y* and *N* is the number of observations or sample size. Asymptotically, it follows a standard normal distribution, $N(0,1)$.

Spatial autocorrelation LM tests

Based on the principle of Lagrange multipliers, the *LM(error) test* test is expressed in its matrix form as:

$$LM(err) = \frac{\left[\frac{e'We}{s^2}\right]^2}{T_1} \quad \text{(A2)}$$

where W represents the spatial weight matrix, e is the OLS estimation residual vector, $s^2 = {e'e}/{N}$ and $T_1 = tr[W'W + W^2]$. This test has a null hypothesis of no spatial residual autocorrelation.

The RLM(error) test is an adjusted version, robust to local misspecification. Its formal expression would be the following:

$$RLM(err) = \frac{\left[\frac{e'We}{s^2} - T_1\left(R\tilde{J}_{\rho-\beta}\right)^{-1}\frac{e'Wy}{s^2}\right]^2}{T_1 - T_1^2\left(R\tilde{J}_{\rho-\beta}\right)} \quad \text{(A3)}$$

where $\left(R\tilde{J}_{\rho-\beta}\right)^{-1} = \left[T_1 + \frac{(WX\beta)'M(WX\beta)}{s^2}\right]^{-1}$, $WX\beta$ is a spatial lag of the predicted values from an OLS regression of the linear model, $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ is the familiar projection matrix.

On the other hand, the *LM(lag) test* is used to evaluate the null hypothesis of no autocorrelation in the endogenous variable. Its formal expression is:

$$LM(lag) = \frac{\left[\frac{e'Wy}{s^2}\right]^2}{R\tilde{J}_{\rho-\beta}} \quad \text{(A4)}$$

An alternative test, robust to the presence of local dependence of a spatial error, is the *RLM(lag) test*, which can be expressed as,

$$RLM(lag) = \frac{\left[\frac{e'W_1y}{s^2} - \frac{e'W_1e}{s^2}\right]^2}{R\tilde{J}_{\rho-\beta} - T_1} \quad \text{(A5)}$$

CAPITULO XXIX

Stochastic Discount Factor in a Two Country Currency Area.

Adrian Hernández-del-Valle

Instituto Politécnico Nacional

Claudia I. Martínez-García

Instituto Politécnico Nacional

Abstract

Rating agencies were incapable of pricing correctly risk when the Greek sovereign debt crisis began in 2009. We build a stochastic discount factor that is capable of generating more accurate time-varying risk premia in a two country currency area.

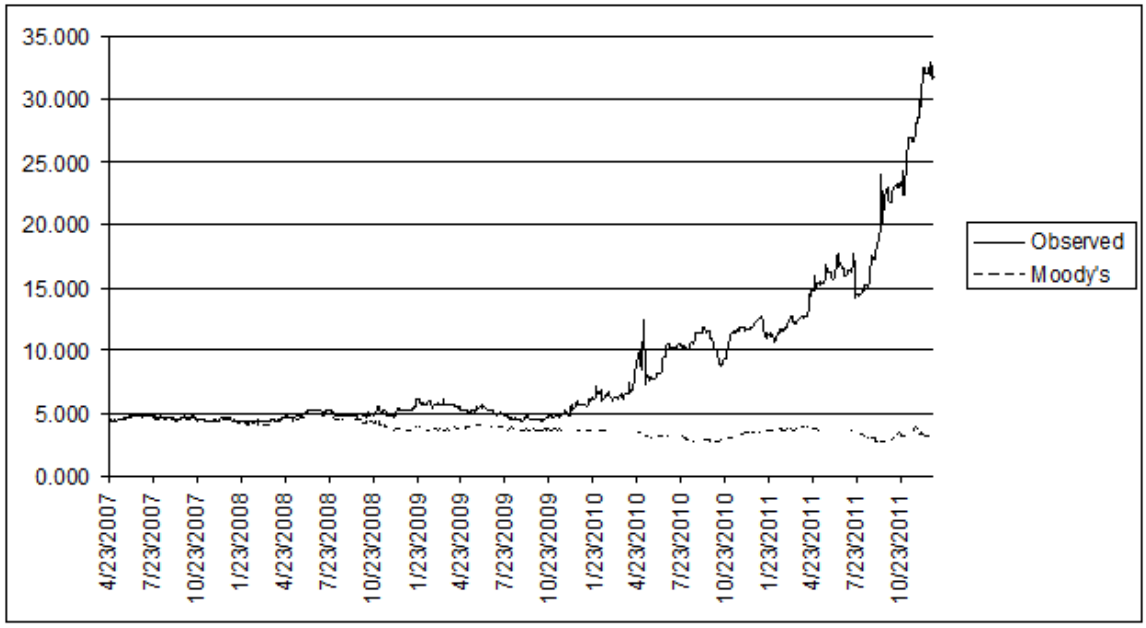
JEL: E43, E44, F31, F36, G1

Keywords: stochastic discount factor or pricing kernel; real exchange rate; currency area

1. Introduction

Rating agencies were incapable of pricing correctly risk when the Greek sovereign debt crisis began in 2009. Figure 1 compares the observed Greek spread (relative the French government bond) to the spread suggested by Moody's between April 2007 and October 2011. Moody's was wrong, incredibly wrong. Arghyrou and Kontonikas (2011, pg. 11) note that ``during that period [2009-2010] the increasingly deteriorating macroeconomic fundamentals of periphery EMU countries… were not penalised with higher interest rates on government bonds, as markets, endowed with ample global liquidity, continued to discount full real convergence of periphery EMU economies to the core ones".

Figure 1. Greek spread against the French bond



Source: Own estimation with Bloomberg data.

We contend that standard models produce interest rate movements that are much smaller than those observed in data because they lack time-varying risk: a *stochastic discount factor* SDF or *pricing kernel* [for a survey see Hansen and Renault (2009)]. We build a pricing kernel for a two country currency area that incorporates overvaluation of the real exchange rate. Arhyrou and Tsoukalas (2010) and Arghyrou and Kontonikas (2011) point to real exchange rate overvaluation without a national currency as the maind driver of the Greek sovereign debt crisis. Hernandez-del-Valle and Martinez-Garcia (2015) prove that real exchange rate overvaluation can induce default.

``We have to get used to the fact that most returns and price variations comes from variations in risk premia." (Cochrane 2001, p. 451). Cochrane's observation directs our attention to a critical counterfactual part of the standard general equilibrium monetary model: constant risk premia! But, is risk constant over time? Variation in risk over time is essential for understanding movements in asset prices yet the standard model does not generate time-varying risk premia.

Alvarez, Atkeson and Kehoe (2008) develop a model that accounts for time varying risk and apply it to interest and exchange rates. We develop a model that accounts for time-varying risk in a currency area---i.e. where exchange rates do not exist explicitly but do have an important impact on economic life.

Extremely important in fact, e.g. according to Arghyrou and Tsoukalas (2010) and Arghyrou and Kontonikas (2011), the Greek sovereign debt crisis that began in 2008 and is ongoing was the result of prolongued real exchange rate overvaluation.

Consider the risk, in nominal terms, faced by a European investor choosing between bonds denominated in either euros or dollars. Clearly, for this investor, the euro return on the dollar bond is risky because next period's exchange rate is not known today.

Interest rate parity is a no-arbitrage condition representing an equilibrium state under which investors will be indifferent to interest rates available on bank deposits in two countries. Investors then cannot earn arbitrage profits by borrowing in a country with a lower interest rate, exchanging for foreign currency, and investing in a foreign country with a higher interest rate, due to gains or losses from exchanging back to their domestic currency at maturity. However, Alvarez, Atkeson and Kehoe (2008) find that ``nearly the opposite seems to happen in the data: the expected change in the exchange rate is roughly constant and interest differentials move approximately one-for-one with risk premia." The observed variation in the interest rate differential is, thus, almost entirely accounted for by movement in the risk premium.

2. Real euro pricing kernel and time-varying risk premium

Consider a two-country, cash-in-advance economy with an infinite number of periods t = 0, 1, 2,.... Both countries form a currency area, CA. The CA has a government and a central bank. Call one of the countries i and the other country j. Each country has two agents: a government and a continuum of households of measure one. Households in country i use euros to purchase a single home good; households in j use euros to purchase a single good in j.

At time t=0, both countries renounced to their local currency and adopted the European union's currency, the euro, at a fixed exchange rate denoted

$$e^0_{i/€}.$$

For example, Spain substituted the peseta for the euro on January 1st, 2002, at a fixed rate of $e^0_{\text{Ptas}/€}$ =166.386 pesetas for 1 euro.

Let M^i_t denote country i's stock of currency in period t, and let □^i_t=M^i_t/M^i_{t-1} denote the growth rate of this stock---M^j_t denotes country j's stock of currency in period t and □^j denotes the growth rate of this stock---. Similarly, let □^*_t=M^*_t/M^*_{t-1} denote the growth rate of stock M^*_t of euros. As usual, M^i_t and M^j_t are controlled by country i's and j's central banks respectively, and M^*_t is controlled by the union's central bank.

Money supply in each central bank is linked to inflation by the equation of exchange:

$$M^i \cdot V^i = P_i \cdot Q_i, \qquad (2.1)$$

where M^i is money supply, V^i is velocity of money, P_i is price level and Q_i is quantity of assets, goods and services sold during the year. In equilibrium real money demand is simply Q_i/V^i.

Let $s_t = (\mu^i_t, \mu^j_t, \mu^*_t)$ be the aggregate event in period t, the state, while s^t=$(s_1, \ldots, s_t)$ denotes the history of aggregate events through period t. Let g(s_t) denote the density of the probability distribution over the histories of aggregate events. The real value of a euro at i at time t is given by the PPP rate

$$e^{t,PPP}_{i/€} = \frac{P_i(s_t)}{P_€(s_t)}.$$

The PPP rate is a function of the state, but, we shall omit the additional notation---$e^{t,PPP}_{i/€}(s_t)$---in order to simplify. Furthermore, we know that if country i is overvalued then country j will be undervalued, i.e.

$$e^{t,PPP}_{j/€} < e^{t,PPP}_{i/€},$$

Or simply,

$$P_j(s_t) < P_i(s_t),$$

that is, the cost of the market basket at i is higher than the price of the same basket at j given s_t. Hernandez-del-Valle and Martinez-Garcia (2015) find that in case of disequilibrium, prices are given by the following equation country i given s_t has the following quadratic form

$$P_i(s_t) = \frac{M^i(s_t) - 2\alpha^i\alpha^j P_j(s_t)y_t^i \pm \sqrt{-M^i(s_t)}\sqrt{-M^i(s_t) + 4\alpha^i\alpha^j P_j(s_t)y_t^i}}{2y_t^i(\alpha^i)^2}.$$

Household's objective is to maximize the utility of real euro consumption. That is, households in country i face the problem of maximizing expected utility over consumption, given a budget constraint and a market clearing condition,

$$\max \sum_t \beta^t \int U\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right) g(s_t)ds_t$$

Equivalently,

$$\max\ E_t\left\{\sum_t \beta^t U\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right)\right\}. \qquad (2.2)$$

If we simplify the problem to a single period from t to t+1, the problem is

$$\max_{c_t,\theta_t}\left[U\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right) + \beta E_t\left\{U\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t+1,PPP}\right)^{-1}\right)\right\}\right] \qquad (2.3)$$

where □_t is the holding of government i's bond claim by households at time t.

We assume that the period utility function takes the standard constant-relative risk-aversion, CRRA, form

$$U\left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right) = \frac{\left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right)^{1-\eta} - 1}{1-\eta}, \quad \text{with } \eta > 0, \eta \neq 1. \qquad (2.4)$$

The parameter □ measures the degree of relative risk aversion that is implicit in the utility function, a greater □ implies a greater risk aversion; □ =1 is risk-neutrality. The first two derivatives of the CRRA utility function with respect to c are

$$U'\left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right) = \left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right)^{-\eta}\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1} \qquad (2.5)$$

and

$$U''\left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right) = -\left(c\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-1}\right)^{-1-\eta}\eta\left(e_{i/€}^{PPP}\right)^{-2}. \qquad (2.6)$$

The real euro budget constraint of the economy is

$$c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} = n^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} + \left[x^i(s_t)+\gamma^i\right]\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} \qquad (2.7)$$

and the nominal value of the asset market constraint is

$$\theta_{t-1}B^i(s_{t-1},\gamma^i)\left(e^0_{i/€}\right)^{-1} = \int_{s_{t+1}} q^i(s_t,s_{t+1})\theta_t\left(e^0_{i/€}\right)^{-1} g(s_t)ds_{t+1} + P_i(s_t)\left[x^i(s_t)+\gamma^i\right]\left(e^0_{i/€}\right)^{-1}. \qquad (2.8)$$

We are studying the case of active households, thus in equations (2.7) and (2.8), households in i are assumed to make transfers from the asset market to the goods market: z^i(s_t,□^i)=1.

The left side of (2.8) is the return that households begin period t with---from investments in the previous t-1 stage---. The right side is split in two parts: on the one hand, households reinvest part of their earnings in government i's bonds at price q^i(.,.); on the other, they transfer the rest to the goods markets paying cost □^i.

We combine (2.7) and (2.8) to obtain the time t constraint

$$c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} = n^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} + \theta_{t-1}B^i(s_{t-1},\gamma^i)(P_i(s_t))^{-1} - E_t\left\{q^i(s_t,s_{t+1})\theta_t\right\}(P_i(s_t))^{-1} \qquad (2.9)$$

In order to simplify the constraint at time t+1 we make the additional assumption that households in i transfer all previous earnings to the goods market, i.e. reinvestment is zero. Thus, (2.8) becomes at t+1

$$\theta_t B^i(s_t,\gamma^i)\left(e^0_{i/€}\right)^{-1} = P_i(s_{t+1})\left[x^i(s_{t+1})+\gamma^i\right]\left(e^0_{i/€}\right)^{-1} \qquad (2.10)$$

and the constraint of the household at time t+1 is

$$c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1} = n^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1} + \theta_t B^i(s_t,\gamma^i)(P_i(s_{t+1}))^{-1} \qquad (2.11)$$

Forming a Lagrangian with equations (2.3), (2.9) and (2.11)

$$\mathcal{L} = U\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right) + \beta E_t\left\{U\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)\right\}$$
$$+ \lambda_t\left(n^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1} + \theta_{t-1}B^i(s_{t-1},\gamma^i)(P_i(s_t))^{-1} - E_t\left\{q^i(s_t,s_{t+1})\theta_t\right\}(P_i(s_t))^{-1}\right. \tag{2.12}$$
$$\left. - c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)$$
$$+ \lambda_{t+1}\left(n^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1} + \theta_t B^i(s_t,\gamma^i)(P_i(s_{t+1}))^{-1}\right.$$
$$\left. - c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right).$$

Taking first order conditions, we have

$$\lambda_t = U'\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)$$
$$\lambda_{t+1} = \beta U'\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)g(s_{t+1})$$
$$\lambda_{t+1}B^i(s_t,\gamma^i)(P_i(s_{t+1}))^{-1} = \lambda_t q^i(s_t,s_{t+1})g(s_t)(P_i(s_t))^{-1}.$$

Simplify to get

$$\left(\beta\frac{U'\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)g(s_{t+1})P_i(s_t)}{U'\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)g(s_t)P_i(s_{t+1})}\right)B^i(s_t,\gamma^i) = q^i(s_t,s_{t+1}). \tag{2.13}$$

Hence, the pricing kernel for country i's currency assets in real euros can also be written as

$$m^i_{t+1} = \beta\frac{U'\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e^{t+1,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)g(s_{t+1})P_i(s_t)}{U'\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e^{t,PPP}_{i/€}\right)^{-1}\right)g(s_t)P_i(s_{t+1})} \tag{2.14}$$

while the pricing kernel for country j's currency assets in real euros is

$$m^j_{t+1} = \beta\frac{U'\left(c^j(s_{t+1},\gamma^j)\left(e^{t+1,PPP}_{j/€}\right)^{-1}\right)g(s_{t+1})P_j(s_t)}{U'\left(c^j(s_t,\gamma^j)\left(e^{t,PPP}_{j/€}\right)^{-1}\right)g(s_t)P_j(s_{t+1})} \tag{2.15}$$

These kernels are the state-contingent real-euro prices for countries i and j currency normalized by the probabilities of the state. Note that both kernels are inversely related to prices P_i(.) and P_j(.), so higher prices at t+1 imply lower pricing kernels in t+1.

These pricing kernels can price any asset in i's or j's currency converted to real euros. In particular, the pricing kernels imply that any asset purchased in period t with an i's currency return of $R^i_{t+1} = B^i(s_t, \gamma^i)/q^i(s_t, s_{t+1})$ ---the payment on government i's bond at t+1 divided by the price of the bond at t---between periods t and t+1 satisfies the Euler equation

$$1 = E_t m^i_{t+1} R^i_{t+1} \qquad (2.16)$$

where, for simplicity we drop the s_t notation. The same can be done for every possible j currency asset with return R^j_{t+1}. Note that exp(r^i_t) is the i-currency return on an i-currency-denominated bond with interest rate r^i_t, and exp(r^j_t) is the expected return on a j-currency-denominated bond with interest rate r^j_t; the Euler equations imply that

$$r^i_t = -\log E_t m^i_{t+1} \quad \text{and} \quad r^j_t = -\log E_t m^j_{t+1}. \qquad (2.17)$$

The pricing kernels for i and j currencies have a natural relation in real terms

$$m^j_{t+1} = m^i_{t+1} \left(\frac{e^{t+1,PPP}_{i/j}}{e^{t,PPP}_{i/j}} \right).$$

Where $e^{t,PPP}_{i/j}$ is the real exchange rate between currencies i and j. Recall that the national currencies do not exist, both countries adopted the euro at time t=0, however the real relation between currencies can be characterized as

$$e^{t,PPP}_{i/j} = e^{t,PPP}_{i/€} \left(e^{t,PPP}_{j/€} \right)^{-1}.$$

The i-currency return on a j-government bond is

$$\exp(r^j_t) \left(\frac{e^{t+1,PPP}_{i/j}}{e^{t,PPP}_{i/j}} \right)$$

obtained by converting one unit of i's currency in period t to $\left(e_{i/j}^{t,PPP}\right)^{-1}$ of j's units; buying a bond paying interest rate exp(r^j_t); and then converting the resulting j's units back into i's in t+1 at the exchange rate $e_{i/j}^{t+1,PPP}$.

Equilibrium requires that

$$1 = E_t m_{t+1}^i R_{t+1}^i = E_t \left\{ \left[m_{t+1}^i \left(\frac{e_{i/j}^{t+1,PPP}}{e_{i/j}^{t,PPP}} \right) \right] R_{t+1}^j \right\} \qquad (2.18)$$

Since (2.18) holds for every j-currency return, $m_{t+1}^i \left(\frac{e_{i/j}^{t+1,PPP}}{e_{i/j}^{t,PPP}} \right)$ is an equilibrium pricing kernel for j-currency assets. Complete asset markets have only one j-currency pricing kernel, so

$$\log e_{i/j}^{t+1,PPP} - \log e_{i/j}^{t,PPP} = \log m_{t+1}^j - \log m_{t+1}^i. \qquad (2.19)$$

Alvarez, Atkeson and Kehoe (2008, p. 7, equation (1)) define country j's nominal *risk premium* p^j_t. We use their definition to define country j's *real risk premium* as

$$p_t^j = r_t^j + \left| E_t \left(\log e_{i/j}^{t+1,PPP} \right) \right| - \left| \log e_{i/j}^{t,PPP} \right| - r_t^i. \qquad (2.20)$$

That is, p^j_t is the difference between the expected log i-currency return on a j government bond, $r_t^j + \left| E_t \left(\log e_{i/j}^{t+1,PPP} \right) \right| - \left| \log e_{i/j}^{t,PPP} \right|$, and the log return on a i-government bond, r^i_t. Clearly, the i-currency return on a j-government bond is risky because the future exchange rate is unknown at t. Also, recall that an equilibrium condition in the monetary union is that prices must be equal in both countries, P^i_t=P^j_t. Overvaluation or undervaluation of any country w.r.t. PPP will increase j's risk premium, p^j_t. In fact, higher prices in j will lead to a faster increase of p^j than higher prices in i.

Substituting (2.17) and (2.19) into the risk premium (2.20) gives that

$$\begin{aligned} p_t^j = & \left| E_t \left(\log m_{t+1}^j \right) - E_t \left(\log m_{t+1}^i \right) + \log e_{i/j}^{t,PPP} \right| \\ & - \left(\log E_t m_{t+1}^j - \log E_t m_{t+1}^i + \left| \log e_{i/j}^{t,PPP} \right| \right), \end{aligned} \qquad (2.21)$$

which, in equilibrium reduces to Alvarez, Atekson and Kehoe's (2008, equation (28), pg. 17)

$$p_t^j = \left| E_t\left(\log m_{t+1}^j\right) - E_t\left(\log m_{t+1}^i\right)\right| - \left(\log E_t m_{t+1}^j - \log E_t m_{t+1}^i\right).$$

Hence, a currency's risk premium depends on the difference between the expected value of the log and the log of the expectation of the pricing kernel. Jensen's inequality---□ (E(X))≤E(□(X))---implies that fluctuations in the risk premium are driven by fluctuations in the conditional variability of the pricing kernel.

Recall that overvaluation of country i's currency implies that prices in country i are higher than prices in j. Also, remember that the pricing kernels are inversely related to prices, hence overvaluation in country i will lead it's pricing kernel to be lower than country j's. These facts together with Jensen's inequality imply that p^j_t is a growing function of overvaluation in country i. That is, risk in country j grows with overvaluation in country i. Conversely, undervaluation of country j's currency with respect to country i's reduces country i's risk premium. In this sense, country i and j share risk.

In order to apply the pricing kernel, substitute (2.5) in (2.13) to obtain

$$m_{t+1}^i = \left(\beta \frac{\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta} e_{i/€}^{t,PPP} g(s_{t+1}) P_i(s_t)}{\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t+1,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta} e_{i/€}^{t+1,PPP} g(s_t) P_i(s_{t+1})} \right).$$

or

$$m_{t+1}^i = \beta \left(\frac{\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta}}{\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t+1,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta}} \right) \left(\frac{e_{i/€}^{t,PPP}}{e_{i/€}^{t+1,PPP}} \right) \left(\frac{g(s_{t+1})}{g(s_t)} \right) \left(\frac{P_i(s_t)}{P_i(s_{t+1})} \right)$$

$$= \beta \left(\frac{\left(c^i(s_t,\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta}}{\left(c^i(s_{t+1},\gamma^i)\left(e_{i/€}^{t+1,PPP}\right)^{-1}\right)^{\eta}} \right) \nabla e_{i/€}^{t,PPP} \cdot \left(\nabla g(s_t)\right)^{-1} \cdot \pi_t^i$$

In Table 1 we estimate the stochastic pricing kernels of Greece and Germany. Greece is country i and Germany is country j. Table 1 presents three cases: a first case with □=0.5 which represents a relative risk loving coefficient; case two is estimated with □=3, a ``mild'' risk aversion; and in case three we use □=50, an ``extreme'' risk aversion.

Table 1

Case 1: Stochastic pricing kernels with $\eta = 0.5$

Dates	m^i_{t+1}	m^j_{t+1}	∇m^i_{t+1} (%)	∇m^j_{t+1} (%)
Q4-2013	1.018	1.030		
Q1-2014	1.051	1.024	3.2	−0.6
Q2-2014	1.013	1.027	−3.6	0.4
Q3-2014	1.043	1.019	3.0	−0.8

Case 2: Stochastic pricing kernels with $\eta = 3$

Dates	m^i_{t+1}	m^j_{t+1}	∇m^i_{t+1} (%)	∇m^j_{t+1} (%)
Q4-2013	0.990	1.030		
Q1-2014	1.058	1.006	6.8	−2.3
Q2-2014	1.020	1.017	−3.6	1.1
Q3-2014	0.980	0.994	−3.9	−2.3

Case 3: Stochastic pricing kernels with $\eta = 50$

Dates	m^i_{t+1}	m^j_{t+1}	∇m^i_{t+1} (%)	∇m^j_{t+1} (%)
Q4-2013	0.587	1.033		
Q1-2014	1.199	0.727	104.4	−29.6
Q2-2014	1.167	0.842	−2.6	15.9
Q3-2014	0.304	0.622	−73.9	−26.1

Source: Own estimation with selected data from http://stats.oecd.org

Where ∇m^i_{t+1} and ∇m^j_{t+1} are the stochastic pricing kernels' relative variations from one period to the next. Observe that the kernels are extremely sensitive to the relative risk aversion coefficient.

Finally, Table 2 shows Greece's real risk premium, p^i_t, relative to the German long-term interest rate compared with the difference between both countries' long term interest rates

Table 2

Greece's p^i_t relative to Germany.

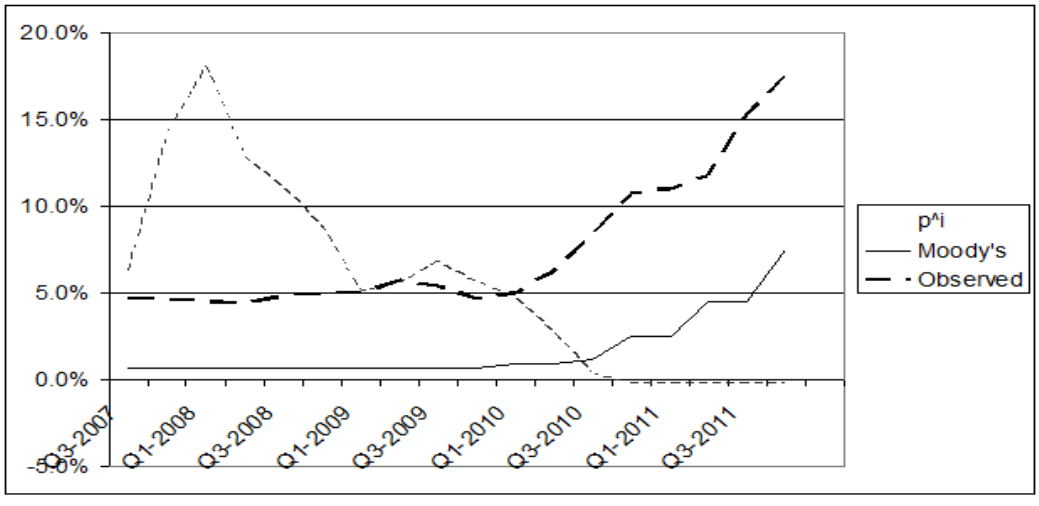
	$r_t^i - r_t^j(\%)$ nominal	$p_t^i(\%)$ eq. (2.20)	$p_t^i(\%)$ $\eta = 2.5$	$p_t^i(\%)$ $\eta = 0.5$	$p_t^i(\%)$ $\eta = 0.8$	$p_t^i(\%)$ $\eta = 0.92$
Q4-2013	6.9	6.9	6.8	6.0	6.0	6.0
Q1-2014	6.0	5.4	3.9	5.3	5.1	5.0
Q2-2014	4.8	5.1	3.9	5.4	5.1	5.0
Q3-2014	5.0	4.1	2.9	5.0	4.7	4.5

Source: Own estimation with selected data from http://stats.oecd.org

Where r^i_t-r^j_t is the nominal difference between the long term interest rates of Greece and Germany, the *nominal risk premium*. We assume g(s_t)=g(s_{t+1}) for all computations. The second column is the real market risk premium estimated using (2.20). The last four columns are calculated using (2.21). Table 2 suggests that our model is capable of replicating market behavior and that the relative risk aversion coefficient is time variant. Regard that the observed p^i_t estimated using (2.20) coincide with risk premiums estimated with different □'s. Table 2 also indicates that market risk premiums vary between risk-loving and ``mild'' risk aversion.

Finally, figure 2 compares the observed spread on the Greek bond, the spread suggested by Moody's and the spread generated by our SDF with □=3.3. Note that our spread and the observed spread coincide around 2009 at this □. However, our model suggested a much larger spread prior to 2009 and a smaller one after this year. Recall that our SDF is built to incorporate the risk of overvaluation.

Figure 2. Our SDF against observed and Moody's spreads



3. Conclusions

We build a SDF for a two country currency area that incorporates overvaluation of the real exchange rate. We build a SDF that is capable of generating more accurate time-varying risk premia in a two country currency area. The SDF is very sensitive to changes in the risk aversion coefficient □. Furthermore, □ appears to be time-varying.

References

[1] Alvarez, Fernando, Andrew Atkeson, and Patrick J. Kehoe. 2008. ``Time-Varying Risk, Interest Rates, and Exchange Rates in General Equilibrium." Federal Resesrve Bank of Minneapolis, *Research Department Staff Report* 371, August.

[2] Arghyrou, Michael G. and John D. Tsoukalas. 2010. ``The Greek Debt Crisis: Likely Causes, Mechanics and Outcomes." Cardiff Economics Working Papers, European Commission, April.

[3] Arghyrou, Michael G. and Alexandros Kontonikas. 2011. ``The EMU sovereign-debt crisis: Fundamentals, expectations and contagion." Economic Papers 436, February.

[4] Cochrane, John H. 2001. *Asset Pricing*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.

[5] Hansen, Lars P. and Eric Renault. 2009. ``Pricing Kernels and Stochastic Discount Factors." http://www.unc.edu/depts/econ/profs/renault/Hansen-Renault%20%28EQF-Wiley%29.pdf

CAPÍTULO XXX

Restricciones de crédito en un modelo de crecimiento económico endógeno

Humberto Ríos Bolívar

Instituto Politécnico Nacional

Daniel Cerecedo Hernández

Instituto Politécnico Nacional

Resumen

Se desarrolla un modelo endógeno de crecimiento económico en función de la probabilidad de innovación sobre los procesos productivos de los sectores intermedios de la economía. Los procesos de innovación están sujetos a los procesos de innovación financiera que evolucionan para lograr seleccionar los mejores proyectos de investigación y desarrollo que requieren fondos para su realización. Los resultados indican que cada proceso de selección por parte del sector financiero se vuelve más obsoleto conforme la tecnología avanza, lo que origina que la productividad y por consecuencia el crecimiento económico se detengan en ausencia tanto de innovación tecnológica como financiera.

Palabras clave: Innovación, Crecimiento económico, Finanzas.
Calcificación JEL: C73, D92, O33, O47.

1. Introducción

Desde los trabajos de Solow (1957) existe un conceso general donde los economistas han reconocido que la innovación tecnológica es un factor decisivo como determinante del crecimiento económico. Incluso se han desarrollaron diversos modelos de crecimiento donde se considera explícitamente el papel de la tecnología en el crecimiento económico y sus efectos sobre la competitividad de las empresas. Entonces la tasa de crecimiento de cualquier economía está determinada por su capacidad de innovar. Siendo la innovación una de las estrategias

fundamentales para los países más desarrollados y competitivos alrededor del mundo, debido a su efecto positivo en la productividad nacional (Sánchez y Ríos, 2011).

A pesar de la posibilidad de la transferencia de tecnologías a través de economías, muchos países no convergen a las tasas de crecimiento de los países líderes, aún si se tiene en cuenta la posibilidad de transferencia internacional de tecnología y la "ventaja del atraso" que confiere a los países rezagados tecnológicamente[1], esto debido a que las tecnologías desarrolladas en la frontera del conocimiento no son apropiadas para los distintos países o que la tecnología de transferencia puede ser bloqueada por intereses especiales como las diferentes políticas implementadas por los gobiernos para fomentar la innovación como se menciona en Acemoglu, Aghion y Zilibotti (2006).

Incluso para introducir nuevas tecnologías o nuevos procesos productivos se requiere mano de obra calificada generando un proceso costoso de normalización de la mano de obra no calificada, Acemoglu, Gancia y Zilibotti (2010), Toner, (2011), por lo que es necesario la existencia de mecanismos y canales de transmisión que a su vez depende en gran medida de su propia innovación, uno de estos canales es la financiación.

La posibilidad de que la estructura financiera determine las mejores decisiones operativas sobre producción, inversión y consumo es un campo de oportunidad que se genera derivado de las expectativas de dotar de un mayor número de herramientas que permitan detonar el financiamiento en infraestructura, vivienda, campo, pymes, etc., con lo cual, se lograrían mayores niveles de crecimiento económico (Lerner y Tufano, 2011).

Los modelos de crecimiento endógeno donde la investigación consiste en descubrir nuevas variedades de bienes intermedios que permiten producir bienes finales surgen a partir del modelo de Romer (1990). Otros modelos basados en I+D son los presentados en Borondo (2008), Aghion y Howitt (1992) y Grossman y Helpman (1991). Dentro de la literatura que refiere a la relaciona del sector financiero y el efecto tecnológico sobre el crecimiento económico están los trabajos de King y Levine (1993), Bencivenga y Smith (1991) y Greenwood, Sanchez y Wang (2010). Sin

[1] Gerschenkron (1952) explica que cuanto más un país cae por debajo del líder mundial en tecnología, más fácil es para que el país avance tecnológicamente, simplemente mediante la aplicación de nuevas tecnologías que han sido descubiertos en otros lugares.

embargo en estos trabajos los contratos financieros, los mercados y los intermediarios no surgen ni evolucionan de forma endógena con el cambio tecnológico.

El objetivo del documento es representar la innovación tanto tecnológica y financiera como reflejo de la de la decisión de maximizar beneficios de los individuos y explorar las implicaciones para el crecimiento económico. Se parte de la idea de que el sector financiero participa en una actividad innovadora que, si tiene éxito, les permite detectar a los mejores proyectos innovadores en tecnología. De esta forma el éxito de la innovación financiera maximiza los beneficios de los agentes financieros, así como la innovación tecnológica exitosa genera rentas para el emprendedor tecnológico. En otras palabras, el crecimiento económico está impulsado no sólo por la maximización de los beneficios de los empresarios que surgen para la comercialización de nuevas tecnologías que se ven reflejadas en la productividad, sino también por los agentes financieros que desarrollan nuevas caminos de detección de proyectos y técnicas de fondeo.

El trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el primer y segundo apartado se describe el modelo teórico de crecimiento económico endógeno. El modelo en una primera etapa explica al crecimiento económico como consecuencia de la mejora en la productividad que se genera como resultado de la innovación. Para el segundo apartado se hace participe al sector financieros dentro del modelo como parte del proceso costoso, arriesgado y potencialmente rentable de la innovación, esto mediante la invención de procesos más eficientes de detección de proyectos que generen innovación tecnológica. El modelo es propuesto en Aghion y Howitt (2009). Para el apartado tres se realizada el análisis numérico mediante un método de tipo evolutivo que mide la sinergia entre el proceso de innovación financiera y tecnológica que incrementa los parámetros de productividad, teniendo como consecuencia tasas positivas y constantes de crecimiento económico. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Estructura del modelo

Se desarrolla un modelo teórico de crecimiento económico donde se considera a las innovaciones como una dimensión importante de la competencia industrial, de tal forma que el crecimiento es generado por una secuencia aleatoria de innovaciones que conducen a nuevas tecnologías que a su vez incrementan la productividad de los sectores. Dentro del modelo de crecimiento se introduce una restricción financiera que permite explicar el proceso de financiamiento por parte

de los intermediarios que ofrecen un servicio de detección de proyectos dirigidos a la investigación y desarrollo.

El modelo de crecimiento que se desarrolla en este apartado es tomado de Aghion y Howitt (2009), bajo los siguientes supuestos: el modelo se desarrolla dentro de una secuencia de periodos discretos $t = 1,2, \ldots$ En cada periodo la población es constante representada por un número fijo de L individuos. La utilidad está en función del consumo bajo un comportamiento neutral al riesgo, por lo que el objetivo de los individuos es maximizar su consumo esperado.

Los individuos consumen un solo bien, llamado bien final, el cual es producido por empresas bajo competencia perfecta usando dos insumos, trabajo y un proceso continuo indexado sobre el intervalo $[0,1]$ conformado de múltiples sectores que producen bienes intermedios. La función de producción del bien final está dada por:

$$Y_t = L^{1-\alpha} \int_0^1 A_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha} di \qquad (1)$$

Donde: Y_t es la producción del bien final; cada x_{it} es el flujo del bien intermedio i utilizado en el tiempo t; A_{it} es el parámetro que refleja la productividad del proceso intermedio i en el periodo t. El coeficiente α toma valores entre cero y uno. La oferta de trabajo, L, es usada en su totalidad para la producción del bien final, mientras que $A_t L = \mathrm{H_t}$ representa la oferta de trabajo efectivo de la economía[2].

Se asume que cada bien intermedio es generado por un monopolio debido a que el parámetro de productividad de cada sector está asociado a la invención de nuevos productos y métodos de producción los cuales solo se permite su uso bajo licencia. La innovación supone una reducción del costo unitario de producir el bien intermedio (Tirole, 1988).

Cada monopolio utiliza parte del bien final como insumo para la producción del bien intermedio, de tal forma que para producir una unidad de bien intermedio el monopolista utiliza como insumo

[2] Se omiten los subíndices sobre L ya que se normaliza al considerar que es constante para todo t, además de que la oferta de trabajo se agota en su totalidad en la producción del bien final (demanda igual a la oferta).

una unidad del bien final. De acuerdo con la ecuación (1), el bien final producido por cada insumo intermedio está determinado por la siguiente función de producción:

$$Y_{it} = H_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha} \qquad (2)$$

Donde: Y_{it} es la producción del bien final producida por cada producto intermedio.

La producción del bien final que no es utilizada como insumo intermedio queda disponible para consumo final e inversión en investigación. La diferencia entre la producción del bien final menos el monto utilizado para la producción de cada bien intermedio representa el producto interno bruto de la economía (PIB), en otras palabras, el valor que se obtiene de sumar el valor agregado de cada uno de los sectores menos el consumo intermedio:

$$PIB_t = Y_t - \int_0^1 x_{it}\, di \qquad (3)$$

De la ecuación (3) se puede afirmar que el PIB se obtiene al sumar el valor de la producción del conjunto de sectores y restar sus consumos intermedios.

El costo de contratar una unidad adicional de un factor de producción es el precio del factor y el valor para la empresa de contratar una unidad más del factor de producción es el producto marginal del factor. De tal forma que utilizando la función de producción de la ecuación (2), el precio de cada bien intermedio con relación a la producción del bien final está dado por:

$$p_{it} = \frac{\partial Y_{it}}{\partial x_{it}} = \alpha {H_{it}}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha-1} \qquad (4)$$

Donde: p_{it} es el precio del factor o bien intermedio i.

Si p_{it} es el precio del factor de producción i, entonces p_{it} también será el precio al cual el monopolista vende el bien intermedio i. Por lo tanto el monopolista en el sector i elige la cantidad x_{it} que maximiza su beneficios, Π_{it}, los cuales medidos en unidades del bien final se expresan como:

$$\Pi_{it} = p_{it} x_{it} - x_{it} \qquad (5)$$

El término de la multiplicación del precio por la cantidad, $p_{it}x_{it}$, de la ecuación 5, representa el ingreso total, mientras que el costo total es igual a la cantidad de insumo del bien final que debe ser igual a la producción x_{it}, ya que como se mencionó el monopolista utiliza una unidad del bien final para producir una unidad del bien intermedio.

El valor de equilibrio de x_{it} que resuelva el problema de maximizar tanto para la producción del bien final como para los beneficios esperados de los monopolios resulta de sustituir la ecuación (4) en (5) y resolver el problema de maximización del monopolista:

$$Max\ \Pi_{\mathrm{it}} = \alpha H_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha} - x_{it} \qquad (6)$$

La condición de primer orden para el problema de maximización es:

$$\frac{\partial \Pi_{\mathrm{it}}}{\partial x_{it}} = \alpha^2 H_{it}^{1-\alpha} x_{it}^{\alpha-1} - 1 = 0 \qquad (7)$$

Despejando x_{it} de la ecuación (7) se obtiene la cantidad de equilibrio:

$$x_{it} = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_{it} \qquad (8)$$

Por lo tanto en el equilibrio los beneficios se obtienen al sustituir la ecuación (8) en (6):

$$\Pi_{it} = \alpha H_{it}^{1-\alpha} \left(\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_{it}\right)^{\alpha} - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_{it}$$

$$\Pi_{it} = \alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} H_{it} - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_{it}$$

$$\Pi_{it} = \pi \mathrm{H}_{it} \qquad (9)$$

Donde: $\pi = (1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$

Nótese que tanto la cantidad x_{it} como los beneficios Π_{it} son proporcionales al trabajo efectivo H_{it}. Lo cual llevaría a suponer que el comportamiento agregado de la economía es también proporcional al trabajo efectivo.

Para obtener el precio de equilibrio del monopolista en ausencia de un mercado competitivo se sustituye x_{it} de la ecuación (8) en la ecuación (4):

$$p_{it} = \alpha H_{it}^{1-\alpha}\left[\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_{it}\right]^{\alpha-1}$$

$$p_{it} = \frac{1}{\alpha} \qquad (10)$$

El análisis hasta el momento se hace asumiendo que el monopolista del sector intermedio puede cobrar cualquier precio a los productores del bien final sin temor de que entre un competidor potencial[3]. De no ser así y existiera un mercado competitivo de empresas capaces de producir un producto similar que sea perfectamente sustituible por el producto intermedio del monopolista pero con costos χ, donde $\chi > 1$ unidades del bien final que se produce[4]. Para este caso, el actual monopolista en el equilibrio no puede cobrar un precio mayor a χ, ya que si lo hiciera el mercado competitivo podría vender a un menor precio, por lo que el precio de los sectores intermedios tendría la siguiente restricción:

$$p_t \leq \chi$$

Para el caso donde $\chi > \frac{1}{\alpha}$, la restricción de límite de precio no se cumple ya que el monopolista en ausencia de competencia elige el precio de $\frac{1}{\alpha}$ como se demuestra en la ecuación (10).

Una vez calculado el precio de equilibrio, la cantidad óptima de la producción del bien final se obtiene sustituyendo cada x_{it} de la ecuación (8) en la función de producción representada por la ecuación (1):

$$Y_t = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_t \qquad (11)$$

Repitiendo el procedimiento anterior sobre la ecuación (3) para obtener el PIB de la economía:

[3] Dentro de la teoría de la organización industrial este supuesto representa el caso de una innovación drástica.

[4] Para valores de $\chi > 1$, entonces $p < \chi$ por lo que se trata de una innovación no drástica.

$$PIB = Y_t - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_t \qquad (12)$$

Sustituyendo 11) en 12):

$$PIB = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_t \; - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} H_t$$

$$PIB = \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} H_t (1 - \alpha^2) \qquad (13)$$

Dado que el coeficiente α y la oferta de trabajo L son constantes para todo periodo t, entonces de las ecuaciones (11) y (13) se observa que el comportamiento agregado tanto de la producción final como del PIB depende únicamente del parámetro de productividad agregado A_t, el cual se define como:

$$A_t = \int_0^1 A_{it} di \qquad (14)$$

El parámetro de productividad de la ecuación (14) es un promedio ponderado de todos los parámetros individuales de productividad de cada sector. En particular, la producción del bien final y el PIB en una economía multisectorial son las mismas para una economía de un solo sector, con la diferencia de que A_t sería solo el parámetro de productividad del único producto intermedio.

De acuerdo a la ecuación (13) es posible escribir la tasa de crecimiento por trabajador eficiente como:

$$g = \frac{\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_t (1-\alpha) - \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_{t-1} (1-\alpha)}{\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} A_{t-1} (1-\alpha)}$$

$$g = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} \qquad (15)$$

La ecuación (15) demuestra que la tasa de crecimiento económico por trabajador eficiente es proporcional a los incrementos del parámetro de productividad que a su vez mejora la calidad de

los productos intermedios, de tal forma que al lograr un impacto positivo en A_t es posible lograr crecimiento económico.

2.1 Investigación y probabilidad de innovación

La idea de que el comportamiento agregado tanto de la producción del bien final como del PIB son generados por el parámetro de productividad, implica que las tasas de crecimiento de la economía están sujetas a la capacidad de innovar y por consecuencia de crear una nueva versión de un producto intermedio para cada sector que sea más productivo que la versión anterior[5].

Como las patentes y los derechos de autor son válidos solo durante un tiempo limitado, en cada periodo un individuo para cada sector, al que se le llamará emprendedor, tendrá una oportunidad de realizar una innovación. Si la innovación sucede, entonces la productividad del bien intermedio en uso ira del periodo $t-1$ a t con valores de $A_{i,t-1}$ a $A_{i,t} = \gamma A_{i,t-1}$, donde $\gamma > 1$, y representa la magnitud del incremento en la productividad.

Ahora la ecuación (9) dado que se tuvo éxito en la innovación los beneficios se escriben como:

$$\Pi_{i,t}^{*} = \pi\gamma A_{i,t-1} \qquad (16)$$

Si el emprendedor falla en su intento por innovar, entonces el producto intermedio será el mismo para los periodos $t-1$ y t, es decir, $A_{i,t} = A_{i,t-1}$, manteniéndose los beneficio representados en la ecuación (9).

Para innovar el emprendedor debe realizar investigación, lo que implica desarrollar una actividad que tiene un costo que se cubre con parte del bien final. A pesar de que los resultados de la actividad de investigación son inciertos, en otras palabras, existe la posibilidad de que la investigación no genere ninguna innovación, la probabilidad de que ocurra una innovación en

[5] Esto es congruente con los resultados de los modelos teóricos de crecimiento como Romer (1990), Grossman y Helpman (1991) y Aghion y Howitt (1992). Sin embargo en los modelos citados el proceso de innovación o también llamado proceso tecnológico se explica de manera exógena.

algún periodo t depende positivamente del monto del bien final asignado a la investigación. Matemáticamente la función de innovación estaría dada por:

$$\mu_{i,t} = \emptyset\left(\frac{R_{i,t}}{A^*_{i,t}}\right) \qquad (17)$$

Donde: $\mu_{i,t}$ representa la probabilidad de que ocurra una innovación en el sector i; $A^*_{i,t} = \gamma A_{i,t-1}$, es la productividad del nuevo producto intermedio como resultado de una investigación exitosa; $R_{i,t}$, representa el monto del bien final que se gasta en investigación en el sector i.

Resaltar de la ecuación anterior que no es sólo el monto del gasto en investigación lo que genera el éxito para innovar, si no el gasto ajustado por la productividad $\frac{R_{i,t}}{A^*_{i,t}}$. De tal forma que la probabilidad de innovar es inversamente proporcional al valor de $A^*_{i,t}$, debido a que los avances tecnológicos son cada vez más complejos y por consecuencia más complicados de mejorar entonces cuanto más crece $A^*_{i,t}$ la probabilidad de una innovación es más remota. De tal forma que la función de innovación tiene un comportamiento de tipo Cobb-Douglas, escrita como:

$$\emptyset\left(n_{i,t}\right) = \lambda n^{\sigma}_{i,t} \qquad (18)$$

Donde: $n_{i,t} = \left(\frac{R_{i,t}}{A^*_{i,t}}\right)$ representa el gasto en investigación del sector i en relación al tope de productividad en el sector i; λ representa la productividad de la investigación del sector i; y σ la elasticidad con valores entre cero y uno. De tal forma que el producto marginal de investigación para generar innovaciones es positivo pero decreciente:

$$\emptyset'(n_{it}) = \sigma\lambda n^{(\sigma-1)}_{i,t} > 0 \quad \text{y} \quad \emptyset''(n) = \sigma(\sigma-1)\lambda n^{(\sigma-2)}_{i,t} < 0$$

Si el emprendedor para el sector i en el tiempo t innova con éxito, entonces este logrará ser el monopolista en dicho periodo ya que consigue un producto diferenciado en relación a cualquier otro. De lo contrario, si no logra innovar el monopolio pasa aleatoriamente a quien fue capaz de producir en el periodo anterior.

Dado que los beneficios de lograr una innovación son $\Pi_{i,t}^{*}$ y la probabilidad de éxito de la innovación es $\phi(n_{i,t})$, entonces la recompensa esperada es $\phi(n_{i,t})\Pi_{i,t}^{*}$. Sin embargo, el realizar investigación representa un costo, $R_{i,t}$, independientemente del éxito de la investigación. De tal forma que los beneficios netos esperados al realizar investigación son:

$$\phi(n_{i,t})\Pi_{i,t}^{*} - R_{i,t}$$

Donde el emprendedor debe elegir el gasto en investigación $R_{i,t}$ que maximiza su beneficio neto, el cual satisface la siguiente condición de primer orden:

$$\frac{\partial[\phi\left(\frac{R_{i,t}}{A_{i,t}^{*}}\right)\Pi_{i,t}^{*} - R_{i,t}]}{\partial R_{it}} = 0$$

$$\frac{\phi'\left(\frac{R_{i,t}}{A_{i,t}^{*}}\right)\Pi_{i,t}^{*}}{A_{i,t}^{*}} - 1 = 0 \qquad (19)$$

De la ecuación (16) se tiene que:

$$\frac{\Pi_{i,t}^{*}}{A_{i,t}^{*}} = \pi$$

Sustituyendo en la ecuación (19) se obtiene la ecuación de arbitraje por investigación:

$$\phi'(n_{i,t})\pi = 1 \qquad (20)$$

La parte izquierda de la ecuación (20) representa el beneficio marginal de investigación el cual es decreciente en n_{it} debido a que el producto marginal de la función de innovación ϕ es decreciente en n_{it}, por lo tanto un cambio en cualquiera de los parámetros que incremente el beneficio marginal o disminuya el costo marginal incrementará la magnitud de investigación n_{it}.

De la función de innovación tipo Cobb-Douglas representada por la ecuación (18) y la ecuación (20) se resuelve el nivel de productividad ajustada de investigación n_{it} y la probabilidad de innovación μ_{it}. De (20) se tiene:

$$\phi'(n_{i,t}) = \frac{1}{\pi}$$

Igualando con la primera derivada de la ecuación (18):

$$\sigma\lambda n_{i,t}^{(\sigma-1)} = \frac{1}{\pi} \quad \rightarrow \quad n_{i,t} = \left[\frac{1}{\sigma\lambda\pi}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

$$n_{i,t} = n = (\sigma\lambda\pi)^{\frac{1}{1-\sigma}} \qquad (21)$$

De las ecuaciones (17) y (18) se tiene que:

$$\mu_{i,t} = \phi(n_{it}) = \lambda n_{i,t}^{\sigma}$$

Sustituyendo la ecuación (21)

$$\mu_{i,t} = \lambda(\sigma\lambda\pi)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

$$\mu_{i,t} = \mu = \lambda^{\frac{1}{1-\sigma}}(\sigma\pi)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \qquad (22)$$

Nótese que en la ecuación (21) el nivel de productividad ajustada de investigación n_{it} es igual a la constante n, por lo tanto la probabilidad de innovación μ_{it} de la ecuación (22) será también una constante $\mu = \phi(n)$. Así la probabilidad de innovación μ es la misma para todos los sectores, sin importar el nivel en que se encuentre la productividad $A_{i,t}$. Este resultado parecería contradictorio ya que el beneficio esperado obtenido de una innovación exitosa se escribe como $\Pi_{i,t}^{*} = \pi A_{i,t}^{*}$, que indica que los beneficios serán mayores para aquellos sectores que se encuentren más avanzados en cuanto al parámetro de productividad. Sin embargo, esta ventaja de los sectores más desarrollados es compensada por el hecho de que el costo de la innovación es también correspondientemente más alto, esto debido a que lo relevante es el gasto en investigación relacionado con el nivel de productividad objetivo.

2.2 Crecimiento económico

En el primer apartado de este capítulo se obtuvo el resultado que la tasa de crecimiento económico es proporcional a la tasa de crecimiento del parámetro de productividad A_t como lo muestra la ecuación (15):

$$g = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}}$$

De tal forma que para generar crecimiento económico es necesario mejorar los procesos productivos lo cual se logra por medio de innovaciones que mejoren el parámetro de productividad. En el apartado dos se desarrolla el proceso de innovación donde para cada sector i se tiene un nivel de productividad:

$$A_{it} = \begin{cases} \gamma A_{i,t-1} & con\ probabilidad\ \ \mu \\ A_{i,t-1} & con\ probabilidad\ \ (1-\mu) \end{cases}$$

La fracción de sectores en la economía que logran innovar dependerá entonces de la distribución de probabilidad considerada para cada periodo. Para el caso de una distribución de probabilidad normal el número de sectores que innovan en cada periodo tendera a la media de la distribución. Por lo tanto, el valor esperado de A_t para toda la economía puede escribirse como:

$$A_t = \mu\gamma A_{t-1} + (1-\mu)A_{t-1} \qquad (23)$$

La ecuación (23) implica que la productividad de la economía está compuesta por la productividad de los sectores que realizaron una innovación exitosa que es γ veces el nivel de productividad de los sectores en el periodo anterior. Más aquellos sectores que no lograron innovar manteniendo el mismo parámetro de productividad del periodo anterior.

Si ningún sector logra una innovación exitosa, entonces la economía estaría en un estado estacionario ya que la tasa de crecimiento económico será cero:

$$g_t = \frac{A_{t-1} - A_{t-1}}{A_t}$$

$$g_t = 0$$

Si existe innovación, entonces sustituyendo la ecuación (23) en la ecuación (15) la tasa de crecimiento para cada periodo será la constante:

$$g_t = \frac{\mu\gamma A_{t-1} + (1-\mu)A_{t-1} - A_{t-1}}{A_t}$$

$$g = \mu(\gamma - 1) \qquad (24)$$

La ecuación (24) representa la tasa de crecimiento económico de la economía en el largo plazo. Nótese que μ no es solo la probabilidad de que ocurra una innovación sino que también es la frecuencia de largo plazo de las innovaciones, es decir, la fracción de periodos en los cuales se producirá una innovación.

Por lo que un resultado importante es que en el largo plazo la tasa de crecimiento de la economía es igual a la magnitud y la frecuencia con que ocurre una innovación.

Finalmente para obtener la tasa de crecimiento de la economía se sustituye μ de la ecuación (22) en (15) y se tiene que:

$$g = \lambda^{\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)}(\sigma\pi)^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}(\gamma - 1) \qquad (25)$$

Analizando la ecuación (25), el crecimiento económico incrementa con el parámetro de productividad de las innovaciones λ, de aquí que cobra importancia el nivel de educación, en particular educación superior y de posgrado como un mecanismo de mejora para lograr mayores tasas de crecimiento. Los países que invierten más en educación superior tienen dos beneficios, en primera instancia logran mayor productividad en investigación y en segundo lugar reducen su costo de oportunidad de investigación mediante el aumento de oferta agregada de mano de obra calificada.

También se genera crecimiento por medio del factor de mejora de la productividad γ, que relaciona el tamaño de la innovación que es independiente de la frecuencia con la que se genera una innovación μ, tal y como se demuestra en las ecuaciones (22) y (24). En su análisis de convergencia entre países Aghion, Howitt y Mayer (2005) hacen énfasis sobre este resultado, mencionando que los países que se encuentran más rezagados de la frontera tecnológica mundial

presentan una ventaja de rezago, esto significa que cuanto más rezagado esté un país, mayor será el impacto en la productividad si logra poner en práctica la tecnología de vanguardia cuando se innova, y por lo tanto mayor será su crecimiento.

Otra vía por la cual se lograría crecimiento es incrementando el grado de protección de los derechos de propiedad, el cual es posible medir mediante χ, al incrementa el costo de imitar la tecnología actual en los sectores intermedios, se da lugar a una investigación más intensa que elevaría las ganancias obtenidas derivado de una innovación exitosa, por lo que a su vez da lugar a un mayor crecimiento.

Por otro lado el crecimiento disminuye con el grado de competencia del mercado, es decir, valores menores de χ representa un aumento en la capacidad de otra empresas para competir contra el monopolista actual y el valor real de lograr una innovación disminuiría[6].

3. Procesos financieros

La teoría analizada hasta el momento nos dice que el crecimiento económico depende de la inversión en tecnología en forma de investigación que mejore los procesos de producción. Sin embargo, hasta ahora no se incluyen las dificultades que una empresa pudiera tener para la financiación de las inversiones que impulsen el crecimiento. La ausencia en la mayoría de los modelos de crecimiento económico del papel que los bancos y otros intermediarios financieros juegan sobre el crecimiento se basa en el supuesto de que los modelos se centran en los mecanismos fundamentales del proceso de crecimiento, mientras que la financiación solo mitiga y reduce las fricciones para que dichos proceso funcionen.

En su artículo sobre finanzas y crecimiento Levine (2004) resume que la mayoría de las investigaciones respecto al tema concuerdan en que los países con mejor desempeño del sector bursátil y bancario tienden a crecer en un menor tiempo, además de que el sistema financiero minimiza las restricciones financieras externas que impiden la expansión de las industrias.

Para este apartado se introduce una restricción financiera sobre el modelo de crecimiento descrito en la sección anterior, con la intención de explicar cómo los intermediarios proveen de

[6] Es el caso de una innovación no drástica, el cual se analizó en la ecuación (10).

financiamiento a los innovadores para canalizar ahorros y mitigar problemas de agencia que incremente el crecimiento.

Se realiza un ajuste al modelo considerando que los individuos viven dos periodos, en el primero los individuos trabajan en el sector de producción del bien final. Para el segundo periodo los individuos pueden lograr ser un emprendedor y un monopolista de algún sector intermedio, para lo cual los individuos usan el salario obtenido en el primer periodo para financiar la investigación.

Cada innovador al tiempo t recibe un salario w_{t-1}. Como se definió anteriormente R_t es la inversión en un proyecto de investigación y desarrollo. Por lo tanto si $w_{t-1} < R_t$, el emprendedor necesitaría un préstamo igual a:

$$\Sigma = R_t - w_{t-1} \qquad (26)$$

Donde: Σ es el monto del préstamo necesario para que el emprendedor realice el proyecto en investigación y desarrollo[7].

Al modelo también se agrega un costo por los préstamos asignados bajo el supuesto de que además de los emprendedores existen agentes dedicados a financiar proyectos que no son factibles bajo ninguna otra circunstancia. Los agentes financieros deben pagar un costo para detectar las solicitudes de préstamos, ya que un préstamo a un proyecto inviable no será redituable.

Sea θ la probabilidad de que un prestatario tenga un proyecto de investigación y desarrollo factible, mientras que $(1-\theta)$ es la probabilidad de que el proyecto del prestatario no pague ninguna recompensa.

El costo para una institución financiera de determinar si un proyecto es o no factible será igual a fR_t unidades del bien final. Sea P la recompensa proveniente de un proyecto factible, entonces los beneficios esperados por las instituciones financieras estará dado por:

[7] Σ es estrictamente positivo para las instituciones financieras que prestan dinero.

$$\varepsilon = \theta P - fR_t \qquad (27)$$

Donde: ε son los beneficios del agente financiero.

Los beneficios del agente financiero, ecuación (21), están dados por los ingresos esperados dados por la probabilidad θ de que el proyecto sea factible por el pago P del proyecto; menos los costos que son con certeza fR_t. Si el agente financiero maximiza sus beneficios, es decir, que sus beneficios esperados sean cero, solo puede ocurrir si:

$$\varepsilon = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = \theta P - fR_t$$

$$P = \frac{fR_t}{\theta} \qquad (28)$$

La ecuación (28) indica que el agente financiero requiere de un pago de $\frac{fR_t}{\theta}$ por cada proyecto factible al menos para cubrir los costos de selección de los distintos proyectos para realizar una innovación.

Ahora los beneficios por lograr innovar estará dado por los beneficios generados por la innovación $\Pi_{i,t}^*$ descrito en la ecuación (16)[8] por la probabilidad de lograr la innovación μ, menos el costo en investigación y desarrollo R_t, menos el pago al agente financiero ecuación (28) o lo que es lo mismo los intereses por el crédito proporcionado.

$$\Phi = \mu\pi A_{it}^* - R_t - \frac{fR_t}{\theta} \qquad (29)$$

Retomando la ecuación (18) para obtener el costo de investigación y desarrollo con probabilidad μ, dado por R:

$$R = A^*(\mu\psi)^{\frac{1}{\sigma}} \qquad (30)$$

Donde: $\psi = \frac{1}{\lambda}$

[8] La ecuación (16) se considera en términos per cápita al normalizar L a la unidad.

Sustituyendo la ecuación (30) en (29):

$$\Phi = \mu\pi A_{it}^{*} - A^{*}(\mu\psi)^{\frac{1}{\sigma}} - A^{*}\left(\frac{f}{\theta}\right)(\mu\psi)^{\frac{1}{\sigma}}$$

Maximizando los beneficios obtenidos, la probabilidad de innovación μ esta dada por:

$$0 = \mu\pi A_{it}^{*} - A^{*}(\mu\psi)^{\frac{1}{\sigma}} - A^{*}\left(\frac{f}{\theta}\right)(\mu\psi)^{\frac{1}{\sigma}}$$

$$\mu = \left(1 + \frac{f}{\theta}\right)^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} \psi^{\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \pi^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)} \qquad (31)$$

La ecuación (31) representa la probabilidad de realizar una innovación o la frecuencia con que se logran las innovaciones dado que se introdujo un costo por financiamiento.

Sustituyendo la ecuación (31) en la ecuación (24) que representa la tasa de crecimiento de la productividad y de crecimiento económico:

$$g = \left[\left(1 + \frac{f}{\theta}\right)^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} \psi^{\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \pi^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}\right](\gamma - 1) \qquad (32)$$

La ecuación (25) representa el crecimiento de la economía sin restricciones financieras, mientras que la ecuación (32) representa la tasa de crecimiento económico que incluye un costo de financiación. Para fines comparativos se toma un caso específico cuando $\sigma = \frac{1}{2}$.

Caso I. Tasa de crecimiento económico sin intermediarios financieros.

$$g_1 = \psi^{\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)}(\sigma\pi)^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}(\gamma - 1)$$

$$g_1 = \frac{\pi}{2\psi^2}(\gamma - 1)$$

Caso II. Tasa de crecimiento con intermediación financiera.

$$g_2 = \left[\left(1+\frac{f}{\theta}\right)^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)} \psi^{\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)} \pi^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}\right](\gamma-1)$$

$$g_2 = \frac{\pi}{\left(1+\frac{f}{\theta}\right)\psi^2}(\gamma-1)$$

La diferencia en los resultados entre la tasa de crecimiento g_1 y g_2 es el costo por selección efectuada por el sector financiero. Si el costo f aumenta, la frecuencia de innovaciones se reduce así como también se reduce la tasa de crecimiento de equilibrio. De esta forma los países con sectores financieros más eficientes tendrán menores costos en f y por consecuencia mayores tasas de crecimiento económico.

4. Innovación, proceso financiero y crecimiento: Un análisis numérico

El propósito de la simulación numérica es determinar los efectos de la innovación, los procesos de detección de los sistemas financieros, así como la productividad que impacta en las tasas de crecimiento económico junto con las distintas medidas de distribución descritas en el apartado anterior. El análisis numérico se realiza mediante la solución de un problema de optimización de manera heurística o aproximada por medio de un algoritmo evolutivo, el cual permite estimar el modelo teórico de manera no lineal con la ventaja de evaluar diversos escenarios y ampliar el número de resultados obtenidos. El método es capaz de encontrar óptimos globales, por lo tanto el método se detiene y devuelve una solución, ya sea cuando ciertas reglas heurísticas (parámetros bien definidos) indican que un mayor progreso es poco probable.

En los siguientes apartados se presentan las simulaciones de diversos escenarios basados en las ecuaciones (25) y (32), las cuales tienen como función objetivo maximizar la tasa de crecimiento económico con la diferencia de que la segunda presenta un costo por selección de proyectos productivos efectuada por el sector financiero.

4.1 Calibración del modelo

Para obtener estimaciones confiables con los algoritmos evolutivos es necesario conocer el más mínimo detalle de los múltiples componentes y parámetros estudiados, ya que en gran parte de ello va a depender la calidad del resultado y la eficiencia del algoritmo. En el cuadro 1 se resumen los parámetros a estimar así como sus límites de variación.

Cuadro 1**.** Parámetros a estimar y límites.

Parámetro	**Descripción**	**Límites**	
		Mínimo	**Máximo**
$\boldsymbol{\gamma}$	Productividad de la economía	1	1.99
$\boldsymbol{\pi}$	$\pi = (1-\alpha)\alpha^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ donde α es la elasticidad de la función de producción	0	0.075
$\boldsymbol{\lambda}$	λ productividad de la investigación	1	1.99
$\boldsymbol{\sigma}$	Elasticidad de la función de innovación	0	1
$\boldsymbol{f}$	Proporción del costo para una institución financiera de determinar si un proyecto es o no factible	0	1
$\boldsymbol{\theta}$	Probabilidad de que un proyecto productivo sea factible	0	1
$\boldsymbol{g}$	Tasa de crecimiento de la economía	-	-

Fuente: Elaboración propia.

La tasa de crecimiento económico g, será la variable objetivo por lo que se fijara para estudiar el comportamiento del resto de los parámetros. En cuanto al parámetro γ, que representa el nivel de productividad de la economía tendrá una variación entre 1-1.99, donde 1 representa una economía donde la productividad de un periodo a otro es cero. Mientras que el 1.99 mostraría un aumento en la productividad del 99%. Se espera que este indicador tenga impactos positivos hacia el crecimiento y se incremente debido al aumento tanto de las innovaciones financieras como de las tecnológicas.

Los parámetros de innovación tecnológica como financiera, λ y θ respectivamente, se espera que tengan un impacto positivo en la productividad y como consecuencia en el crecimiento

económico, lo que resolvería la hipótesis de que la innovación financiera canaliza los proyectos de innovación tecnológica que originan el crecimiento económico. El parámetro f representa los costos de información que los empresarios pagarían por la proyección de su tecnología, en otras palabras, serían los costos de intermediación financiera.

El parámetro π depende del coeficiente de elasticidad α, que corresponde a la especificación de la función Cobb-Douglas de la economía. De acuerdo a la ecuación (9) los beneficios de la economía son una fracción π del trabajo eficiente, de tal forma que a menores niveles de elasticidad α, mayores niveles de π que se transforman en mayores beneficios económicos. Finalmente el coeficiente de elasticidad σ corresponde a la función también de tipo Cobb-Douglas que se especificó para la innovación.

4.2 Estimación de los procesos productivos e innovación

Las estimaciones numéricas se realizan por medio del solver evolutionary de Excel. En una primera aproximación se considera el efecto en el crecimiento económico ante distintas combinaciones de las tasas de productividad e innovación, en concreto se evalúa la ecuación (25):

$$g = \lambda^{\left(\frac{1}{1-\sigma}\right)}(\sigma\pi)^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}(\gamma - 1)$$

La función objetivo es la tasa de crecimiento, los parámetros π y σ se consideran fijos para analizar únicamente los impactos de la productividad y la innovación sobre el crecimiento. Aghion y Howitt (2009) propone un coeficiente de $\sigma = 0.5$ y $\pi = 0.075$.

De tal forma que se compara la respuesta en el crecimiento económico bajo dos esquemas, i) crecimiento económico sin sistema de innovación, y ii) crecimiento económico con cambios en los procesos productivos debido a la evolución del factor de innovación.

En el cuadro 2 se presentan los resultados de evaluar el óptimo de la función (25), calculando el máximo global de la función de crecimiento económico. En el primer escenario, se obtienen la máxima tasa de crecimiento si no existe un continuo sistema de innovación en la economía ($\lambda = 1$) y la productividad esta empleada al 99%. Para el segundo escenario se calcula la máxima tasa

de crecimiento económico dada una continua actividad de innovación que sostiene la productividad al máximo.

Cuadro 2**.** Estimación de parámetros y el máximo de la tasa de crecimiento de la economía.

Escenario	γ	π	λ	σ	g
1	1.99	0.07	1	0.5	0.035
2	1.99	0.07	1.99	0.5	0.137

Fuente: Elaboración propia.

La diferencia entre la magnitud de tasas de crecimiento obtenidas en el cuadro 2, entre el primer y segundo escenario es bastante amplia, sin embargo, es importante aclarar que son escenarios que no se cumplen en una economía real[9], la intención de esta primer aproximación es sólo comprobar la estabilidad de la función y observar el impacto tan significativo que se logra debido a una gran productividad en los departamentos de investigación y desarrollo.

Para la siguiente estimación se fija una tasa de crecimiento objetivo y así calcular los parámetros de innovación y productividad para ese nivel de crecimiento. El objetivo es evaluar el impacto de la productividad dada la evolución de la innovación en periodos consecutivos. En el cuadro 3 se presenta los resultados para t periodos, donde se fija un nivel de crecimiento económico objetivo en dos puntos porcentuales. Los parámetros π y σ se mantienen fijos.

[9] Los modelos evolutivos calculan máximos globales, de tal forma que es necesario especificar los límites reales de las variables utilizadas en el modelo ya que el solver sólo sabe que una nueva solución candidato es mejor que otras soluciones encontradas anteriormente.

Cuadro 3. Evolución de los parámetros de productividad e innovación; crecimiento objetivo del 2%.

Periodo (t)	γ	$\Delta\gamma$	λ	$\Delta\lambda$	g
1	1.19		1.72		0.02
2	1.21	0.018	1.63	-0.05	0.02
3	1.26	0.040	1.47	-0.01	0.02
4	1.36	0.08	1.25	-0.15	0.02
5	1.57	0.14	1	-0.2	0.02

Fuente: Elaboración propia.

Para el periodo t_1 del cuadro 3, se logra una innovación significativa, resultado de una productividad de la investigación de un 72%. La tasa de productividad de la economía es del 19% resultado de la innovación en el periodo t_0. En el periodo t_2, se observa una tasa de innovación del 63%, y un incremento en el factor productivo de 21%, por lo tanto $A_{t_2} > A_{t_1}$, este resultado se debe al efecto del factor de innovación del periodo anterior. Obsérvese que de t_1 a t_4 se mantienen niveles de innovación positivos y como consecuencia se genera un continuo incremento en la productividad, lo cual permite mantener los niveles de crecimiento constantes de dos puntos porcentuales.

Para el periodo t_5 se alcanza un nivel máximo de productividad como resultado de las tasas de innovación en periodos anteriores, sin embargo, el impacto de la innovación realizada en t_1 ha terminado de evolucionar por lo que se vuelve menos eficaz. Para un periodo t_6 se tendría $\Delta\gamma = \Delta\lambda = 0$, por lo tanto, $A_{t_5} = A_{t_6}$, lo que implicaría dejar de lograr la tasa de crecimiento objetivo de 2%.

Los resultados son consistentes con lo planteado en la parte teórica, en primer lugar se confirma la relación positiva entre la innovación, la productividad y el crecimiento económico. Los resultados de las innovaciones son del tipo de función Cobb-Douglas planteado en la ecuación (18), los valores de λ son positivos pero con rendimientos decrecientes como se observa en la columna cinco del cuadro 3. A diferencia de la productividad que presenta rendimientos positivos y crecientes siempre y cuando se mantenga un nivel de innovación.

4.3 **Estimación de los sistemas de innovación en los procesos financieros**

Para este apartado se incorpora el sector financiero, el cual participa en el sistema de innovación mediante la invención de procesos de detección de proyectos productivos mucho más eficientes, por lo tanto, las asimetrías de información evolucionan en base a las elecciones endógenas de los financieros y los inversionistas tendrán que pagar por la información de detección producida por los financieros. Se retoma la ecuación (32):

$$g = \left[\left(1+\frac{f}{\theta}\right)^{\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)}\pi^{\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)}\right](\gamma-1)$$

La calibración de los coeficientes son los presentados en el cuadro 1. Al igual que la estimación anterior, se mantienen constantes los parámetros $\sigma = 0.5$ y $\pi = 0.075$.

El parámetro f se refiere al costo que deben pagar los inversionistas al agente financiero para identificar si un proyecto es rentable. Entonces la relación entre f y g es inversa, es decir, a mayores niveles de f menores niveles de g, lo que se interpretaría como una ineficiencia del sector financiero ya que el costo de intermediación es muy alto.

El parámetro θ representa la probabilidad de generar un proceso de detección de proyectos más eficiente por parte del agente financiero. En otras palabras θ representa el factor de innovación del sector financiero, el cual se espera tenga un impacto positivo sobre la tasa de crecimiento económico.

Como primer ejercicio se calcula el máximo global de la variable objetivo que es el crecimiento económico, g. El objetivo es identificar el impacto que tendrá la innovación financiera y la innovación tecnológica sobre el crecimiento económico.

Cuadro 4**.** Parámetros a estimar con sector financiero.

Escenarios	γ	π	λ	σ	f	θ	g
1	1.99	0.07	1.99	0.5	0.01	0.99	0.27
2	1.99	0.07	1.99	0.5	0.1	0.01	0.025
3	1.99	0.07	1	0.5	0.1	0.01	0.0063

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro 4 se presentan los resultados de obtener un máximo global al evaluar la función de crecimiento económico. En el primer escenario del cuadro 4, se obtienen la máxima tasa de crecimiento sólo con las restricciones de π y σ. Se tiene un 99% de innovación financiera seguido de bajos costos de intermediación, una tasa de innovación tecnológica del 99% que genera alta productividad económica.

Para el segundo escenario se tienen un máximo global en g considerando una nula innovación financiera, generando un incremento en los costos de intermediación respecto al valor de la innovación tecnológica. Si bien la tasa de innovación tecnológica y la productividad es máxima, el nivel de g es mucho más pequeño que en el primer escenario.

Al tercer escenario se le agrega la restricción de nula innovación tecnológica a las restricciones del segundo escenario. El resultado arroja un máximo global de g casi nulo.

La función estimada es estable ya que al calcular el máximo de la función objetivo g, se obtienen valores máximos de los parámetros que tienen una relación positiva en g, como la productividad y las tasas de innovación financiera y tecnológica. De forma contraria resultan valores mínimos en los parámetros que tienen relación inversa al crecimiento económico, tal es el caso del costo de intermediación.

Para la siguiente estimación se fija una tasa objetivo de crecimiento de dos puntos porcentuales y se realiza el análisis en función de las tasas de innovación tanto financiera como tecnológica.

Cuadro 5. Parámetros a estimar con tasa de crecimiento objetivo.

Escenarios	γ	$\Delta\gamma$	λ	$\Delta\lambda$	f	θ	$\Delta\theta$	g
1	1.13		1.61		0.10	0.43		0.02
2	1.14	0.005	1.59	-0.012	0.10	0.40	-0.07	0.02
3	1.16	0.013	1.53	-0.037	0.10	0.36	-0.10	0.02
4	1.20	0.041	1.37	-0.101	0.10	0.29	-0.20	0.02
5	1.29	0.074	1.22	-0.113	0.10	0.19	-0.35	0.02

Fuente: Elaboración propia.

El cuadro 5 presenta los resultados de la estimación de los parámetros de innovación tanto tecnológica como financiera y el costo de los financieros por el proceso de detección de emprendedores. En el primer escenario se estiman los parámetros γ, λ, f y θ para lograr una tasa de crecimiento del dos por ciento. Se asume que el costo de intermediación financiera, f, calculado en el primer escenario es el que se considera para los siguientes cuatro escenarios, bajo el supuesto de que una vez que los financieros logran innovar y obtienen el mejor método de detección de proyectos el costo de información no cambia para los siguientes periodos.

En los escenarios del cuadro 5 la innovación financiera exitosa genera nuevos procesos de detección de proyectos de innovación tecnológica, la cual evoluciona de manera positiva pero con rendimientos decrecientes como se muestra en la columna cinco. El progreso tecnológico incrementa la productividad lo cual permite mantener las tasas de crecimiento económico objetivo.

La innovación financiera también evoluciona a través de los periodos con rendimientos decrecientes, columna siete, a la par de la innovación tecnológica. Para un periodo $t + n$ la innovación financiera será nula al igual que la tecnológica, como consecuencia la tasa de crecimiento objetivo sería inalcanzable, por lo que sólo hasta que exista una nueva innovación financiera que detecte un nuevo proyecto efectivo de innovación tecnológica se incrementaran las tasas de productividad restableciendo el crecimiento económico.

5. Conclusiones

Si bien existe una amplia literatura de investigación donde se consideran modelos de crecimiento económico en conjunto con el sector financiero, uno de los objetivos de este trabajo es modelar la evolución de forma endógena la innovación financiera y tecnológica en conjunto. En una primera etapa de evaluación del modelo, se comprueba teórica y empíricamente que la innovación es tanto necesaria como efectiva para lograr en primera instancia mover los distintos sectores de la economía, haciéndolos más productivos y por consecuencia alcanzar mayores tasas de crecimiento.

De manera dinámica se estiman coeficientes de impacto tecnológico cada vez más pequeños debido a que conforme pasa el tiempo es más complicado desplazar la frontera de innovación una vez que se van descubriendo nuevas tecnologías, en otras palabras se obtienen rendimientos positivos pero decrecientes en innovación. A pesar de este resultado en innovación, el impacto sobre la productividad es positivo y con rendimientos crecientes lo que permite alcanzar tasas de crecimiento económico constantes.

Un conclusión importante es que el impacto de la innovación tecnológica sobre la productividad no es máxima en un primer momento, si no que va creciendo conforme evoluciona la innovación. Esto implica que existe un proceso de transferencia temporal entre la innovación, ejecución y transformación en productividad. Lo que explicaría el por qué a pesar de que existe una transferencia tecnológica entre economías no todas obtienen los mismos rendimientos de esta cooperación.

La teoría indica que un proceso clave para la transmisión de la innovación tecnológica a productividad es el sector financiero debido a que en generan las innovaciones contienen un alto costo de generación. La importancia de la participación de los intermediarios financieros depende en gran medida de su propia innovación, así una segunda aproximación numérica del modelo incluye de manera endógena la evolución tanto de la innovación tecnológica como la financiera. Se asume como innovación financiera a los procesos de detección de proyectos tecnológicos que sean factibles de financiar y el modelo incluye el costo por información que el sector financiero requiere para identificar dichos proyectos.

Aghion, Philippe, Peter Howitt y David Mayer-Foulkes (2005), "The Effect Of Financial Development On Convergence: Theory And Evidence," *Quarterly Journal of Economics*, vol. 120, No. 10358, pp. 173-222.

Akcigit, U. y William R. Kerr (2010). "Growth through Heterogeneous Innovations", *the national bureau of economic research*.

Bhattacharya, P. y M. Sivasubramanian (2003). "Financial Development and Economic Growth in India: 1970-1971 and 1998-1999", *Applied Financial Economics*, vol. 13(12), pp. 925-929.

Bencivenga, R. y D. Smith (1991), "Financial Intermediation and Endogenous Growth", *Review of Economic Studies*, vol. 58, No 2, pp. 195-209.

Borondo, C. (2008). La innovación en la literatura reciente del crecimiento endógeno. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Coe, D. E. Helpman y A. Hoffmaister (1995), "North-south R&D spillovers", *NBER Working Paper No. 5048*.

Demirgüc-kunt, Asli and Ross Levine (2007), "Finance and Opportunity: Financial Systems and Intergenerational Persistence of Relative Incomes", World Bank.

Dritsakis, N. and A. Adamopoulos (2004). "Financial Development and Economic Growth in Greece: An Empirical Investigation with Granger Causality Analysis", *International Economic Journal*, vol. 18(4), pp. 547-559.

Frantzen, D. (2000), "Innovation, international technological diffusion and changing influence of R&D on productivity", *Cambridge Journal of Economics*, vol. 24, pp. 193–210.

Greenwood, J., M. Sanchez y Cheng Wang (2010), "Financing Development: The Role of Information Costs", *American Economic Review*, vol. 100, pp. 1875-1891.

Griffith, R., S. Redding y J. van Reenen (2001), "Mapping the two faces of R&D: productivity growth in a panel of OECD industries", *CEPR Discussion Paper 2457*.
Grossman, G. y E. Helpman (1991), *"Innovation and growth in the global economy".* Cambrige (MA): MIT Press.

Hall, B. y John Van Reenen (2000), "How effective are fiscal incentives for R&D? A review of the Evidence", *Research Policy*, vol. 29, pp. 449-469.

Holland, J. y Ann Arbor (1975), "*Adaptation in Natural and Artificial Systems*". University of Michigan Press.

King, Robert and Ross Levine (1993), "Finance and Growth: Schumpeter might be right", *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 108, No. 3, pp. 717-737.

Lerner, J. y Peter Tufano (2011). "The Consequences of Financial Innovation: A Counterfactual Research Agenda", *National Bureau of Economic Research*, No. 16780.

Levine Ross (2004), "Finance and growth: Theory and evidence", *National Bureau of Economic Research*, No. 10766.

Levine, Ross and Sara Zervos (1998), "Stock Markets, Banks, and Economic Growth", *American Economic Review*, vol. 88, pp. 537-558.

Pagano, Marco (1993), "Financial markets and growth", *European Economic Review*, vol. 37, pp. 613-622.

Porter, M. y S. Stern (2000), "Measuring the 'ideas' production function: Evidence from International Patent Output", *NBER Working Paper 7891*.

Rajan, Raghuram G. (2005), "Has financial development made the world riskier?", *National Bureau of Economic Research*, No. 11728.

Rebelo, Sergio (1991), "Lon-Run Policy Analysis and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, vol. 99, No. 31, pp. 500-521.

Romer, P. (1990), "Endogenous technological change", The Journal of Political Economy, vol. 98, No. 5.

Sánchez, C. y Ríos, H. (2011). La economía del conocimiento como base del crecimiento económico en México. *Revista Venezolana de Información, Tecnología y Conocimiento*, 8 (2), 43-60.

Solow, R. (1957). "Technical Change and the Aggregate Production Function." *Review of Economics and Statistics*, vol. 39, 312-320.

Thakor, Anjan (2013). *"Innovation and growth: what do we know"*, Singapore: World Scientific.

Tirole, Jean (1988), "The theory of industrial organization", Cambridge, Mass.: MIT Press.

Toner, P. (2011), "Workforce Skills and Innovation: An Overview of Major Themes in the Literature". STI and OECD Education Working Paper, SG/INNOV (2011)1. Paris: OECD.

Zachariadis, M. (2003), "R&D, Innovation and technological progress: a test of the schumpeterian framework without scale effects", *Canadian Journal of Economics*, Vol. 36 (3), pp. 566–686.

CAPÍTULO XXXI

Lo que es y lo que deber ser: disyuntiva en la Política Fiscal del caso mexicano.

Eusebio Ortiz Zarco

Instituto Politécnico Nacional, México

Fernando Evaristo Callejas Albiñana

Universidad de Castilla – La Mancha, España

Resumen

En situación de crecimiento/recesión económica surge el cuestionamiento de si aumentar o disminuir el Gasto público y/o Impuestos. Las políticas pro-cíclicas "Lo que es" y las políticas normativas o contra-cíclicas "lo que debe ser" juegan un papel importante en la disyuntiva de política fiscal a implementar. Implementar políticas pro-cíclicas en diversas ocasiones suele sobrecalentar la economía o agudizar las crisis económicas, por otro lado, un irresponsable uso de políticas contra-cíclicas deriva en problemas como sobre-endeudamiento. El presente documento analiza, empíricamente con datos de panel el caso mexicano, muestra la necesidad de aplicación de planteamientos de la política fiscal normativa.

Palabras Clave: Política Fiscal, Crecimiento Económico & Datos de Panel

Clasificación JEL: C23, E62

1. Introducción

Una disyuntiva de diversos gobiernos acerca de la implementación de la política fiscal consiste en la existencia de argumentos a favor y en contra de lo que es la economía positiva y la normativa, sin dejar de lado que son dos cuestiones que hemos considerado dicótomas. Keynes (2003) intentó tricotomizar dicha situación, refiriéndose al arte de la economía como una situación intermedia,

Friedman (1967) insiste en considerar el positivismo y normativismo conjuntamente. Siendo la economía positiva la rama que describe cómo funciona la economía en realidad (Krugman, 2006), y la economía normativa la encargada de recomendar y postular el "debería", se ha observado que por el lado del normativismo utilizan juicios de valor, por el lado del positivismo la fundamentación econométrica que sustente el pragmatismo de la economía.

En un México, el gobierno está facultado incluso constitucionalmente para proteger los intereses económicos de la población a la que gobierna, para lo cual está facultado entre otras cosas para ejercer la política económica, derivada en política fiscal y política monetaria, las cuales consisten en la actuación gubernamental en la economía fungiendo como regulador, e incluso como agente económico. Los fines, en resumidas cuentas, se pueden expresar en los resultados de la actuación por parte del gobierno mediante la intervención en la economía para buscar redistribución y asignación de recursos, asimismo actuar como agente ante fluctuaciones económicas.

El gobierno actúa como agente económico mediante el manejo de recursos que obtiene mediante diversas formas, las cuales están legalmente constituidas (impuestos, aprovechamientos, derechos, etc.) y, por otro lado, su distribución entre la población mediante el gasto público, para ello el gobierno mexicano cuenta con numerosos organismos en los tres niveles de gobierno. La manera en la que el gobierno establezca recursos económicos mediante el gasto público, así como la forma en que consiga dichos recursos, tiene importantes alcances económicos, ello independientemente de la ideología económica sobresaliente en los países o regiones donde se estén efectuando dichas actividades. Es reconocido por las diversas escuelas de pensamiento que la política fiscal tiene implicaciones en la economía, algunos la juzgan a favor, algunos otros en contra.

2. Estado del arte

Los fundamentos teóricos y definiciones de lo que es el crecimiento económico, así como de la política fiscal son tema muy importante para el keynesianismo, el cual, tal como su nombre lo dice, cuenta con aportaciones principales por Keynes (2003) cuenta con el discurso, ante la evidencia empírica de 1929 y previa lectura del enfoque clásico, de la necesidad de incentivación de la demanda agregada, es importante no olvidar posturas anteriores, cuando incluso desde el siglo XVII hubo autores que estudiaron sucesos económicos, cuestionando las teorías predominantes en ese momento; Cerda, Gómez y Lagos (2005) mencionan que David Hume, estudió los efectos a

inmediatos de la inyección de dinero en la economía, en especial los causados en la balanza comercial y precios, considerando así que pequeños aumentos en la oferta monetaria generan dinamismo en la economía, siempre y cuando sean moderados. Por su parte Tickell (2009) por su parte, menciona a Arthur Pigou, quién plantea como acción ante externalidades negativas el uso de impuestos que logren que el costo marginal del productor más impuestos de igual al costo marginal social, los llamados impuestos pigouvianos, lo anterior evitando ocasionar pérdida de eficiencia en los mercados explicado por pérdidas ocasionadas por una discrepancia entre el producto neto de los agentes privados y producto neto de la sociedad, siendo impuestos una forma de subsanar las pérdidas sociales.

El evento económico del siglo XX de gran trascendencia fue la gran depresión de 1929, se hizo evidente la existencia de fallas de mercado, las cuales se convirtieron en una justificante para el estudio de la intervención gubernamental en la economía, cuestionando si el libre mercado realmente era la mejor de las alternativas posibles para la eficiente distribución de los recursos económicos en la economía sin existencia de desempleo involuntario. La gran depresión fue un suceso muy importante para la enunciación y valoración de la teoría económica, esto debido a que muchos de los supuestos realizados por teóricos clásicos estuvieron puestos en duda ante la evidencia práctica.

Keynes, ante la evidencia real de la economía, mostró que la economía no tiende al equilibrio, con pleno empleo y, en caso de lograrse, este se suscita de manera incidental, más no recurrente, siendo necesario repensar al libre mercado como asignador óptimo de la riqueza.

En su obra titulada "Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero", publicada en el año 1936 por John Keynes insta en que la demanda agregada es vacilante, ocasionada por cambios en la confianza de los inversionistas, plantea la intervención gubernamental en la economía con la política fiscal para actuar ante las fluctuaciones de la demanda, principalmente mediante el ejercicio del gasto público, Ferrari y Henrique (2012); lo anterior queda sustentado en la teoría mediante diversos análisis que cimientan, entre otros contextos la rigidez de precios, medio que permite transmitir los efectos de la política fiscal en el comportamiento de la economía; posteriormente hubo un sinfín de autores y corrientes de pensamiento económico que aportan y, en su caso, critican las ideas del enfoque keynesiano.

Ferrari y Henrique (2012) aluden el desarrollo del modelo IS-LM (Investment-Saving, Liquidity-Money) a cargo de John Hicks & Hansen, modelo intenta desarrollar una teoría que pudiese mostrar implicaciones de decisiones gubernamentales política económica. Desai (1989) postula que Hicks trataba de minimizar las diferencias entre la teoría keynesiana y la neoclásica, siendo IS-LM una armonía al tener supuestos neoclásicos, el modelo muestra la interacción entre el mercado de productos y el de dinero, el modelo supone una economía cerrada con precios rígidos a corto plazo, siendo los precios mecanismo de transmisión de la política económica; El equilibrio entre la curva IS y la LM, afectado por la política fiscal (IS) y la política monetaria (LM) concluye que el dinero no es neutral, ya que la política monetaria ejerce impacto en variables como tasa de interés y precios, por otro lado, genera cambios en el producto.

Diversas contribuciones y conceptos aportan sustento al pensamiento keynesiano, tal es el caso del multiplicador de la inversión gubernamental, Krugman (2007) el comportamiento del multiplicador muestra el cambio en el Producto a causa de un aumento en el gasto público, incentivando así la demanda agregada con aumentos marginales decrecientes tal como muestra al siguiente fórmula:

$$\Delta Y = \frac{1}{1-\mathrm{PMgc}} \Delta GAA$$

Sin duda, después de Keynes hubo autores que intentaron fortalecer los fundamentos teóricos keynesianos; según Larraín y Sachs (2002), Lawrence Klein realizó modelos econométricos con aplicación en la política económica, no necesariamente claros; sus con un número importante de variables y ecuaciones, por otro lado, Franco Modigliani (1989), desplegó modelos teóricos con arreglo keynesiano, entre los que se incluyen modelos que consideran el ahorro presente para el consumo futuro, siendo importante la expectativa de agentes económicos de la evolución de políticas económicas; Paul Samuelson (2010), realizó estudios sobre la paradoja del ahorro y el multiplicador de la política fiscal, siendo el multiplicador de la política fiscal fundamentando así el pensamiento keynesiano.

Como todo enfoque existen diversas críticas hacia el enfoque keynesiano de mediación gubernamental en la economía, insisten distorsiones que pudiese tener la economía por la política fiscal. Una de ellas es el efecto crowding-out, que postula que la inversión privada mermada ante aumentos recurrentes del gasto público, debido a la implantación de política fiscal que exige recursos adicionales para el financiamiento del aumento en el gasto público que de otra manera

corresponderían a inversiones privadas, siendo importante como menciona Friedman (2009) la sincronización de políticas.

En 1972, Robert Lucas con las expectativas racionales (Hall 1992), realiza una enérgica crítica a los modelos económicos y econométricos, insta en la necesidad de considerar expectativas racionales en los modelos económicos y econométricos, mismos que requieren una sólida fundamentación macro y microeconómica, siendo importante el dinamismo de las expectativas, los agentes económicos no son engañados recurrentemente por sus mandos económicos, siendo las políticas económicas no tan efectivas ante la previsión anticipada de los agentes.

Además de aportaciones es importante hablar de críticas, un enfoque importante fue el de Ricardo quién criticaba la intervención gubernamental, pues consideraba que a largo plazo la política fiscal es ineficiente, ante las restricciones intertemporales y considerando que los agentes económicos saben que el ingreso permanente no se ve afectado ante intervenciones públicas presentes, ello debido a que ocasionan un cambio de políticas a futuro para subsanar las expansiones presentes. Es otras palabras, teniendo presente un horizonte temporal a largo plazo, una política fiscal expansiva en el tiempo presente representa precisamente una política fiscal contractiva a futuro.

Existen investigaciones sustentadas empíricamente que estudian componentes de política fiscal, en los cuales, de acuerdo a Fidel Pérez Macal (2006), se clasifican los estudios de estimaciones de multiplicadores fiscales derivados de simulaciones de modelos macroeconómicos y ecuaciones reducidas; estudios de episodios por cambios fiscales y determinantes de los multiplicadores fiscales. Kandil (1991) en "Las diferencias estructurales entre los países desarrollados y en desarrollo: algunas evidencias y consecuencias" muestra que el multiplicador en países desarrollados es pequeño respecto a países subdesarrollados, intentando explicar que la elasticidad interés-demanda de dinero es baja en los desarrollados, siendo la política fiscal menos predominante que la política monetaria.

El enfoque neoclásico postula un distinto uso de la política fiscal, siendo instrumento que pudiese influir en el crecimiento económico temporalmente, basado en que dan la máxima autoridad a las fuerzas del mercado como distributivas del ingreso, y propiciadoras del desarrollo económico, la política fiscal llega a ser clasificada como distorsionadora, por lo que todo instrumento con objetivo

de actuación ante las fluctuaciones económicas es un instrumento de política económica inadecuado,

El pensamiento neoclásico, parte de supuestos e hipótesis muy diferentes en comparación entre ellos la asignación de precios y cantidades de equilibrio mediante la interacción de la oferta y demanda, supone la existencia de competencia perfecta es decir, no existen fallos de mercado, hay flexibilidad de precios, considera una dicotomía entre las variables reales y nominales, racionalidad absoluta en los agentes económicos, lo que en síntesis proporciona la innecesaria política fiscal, siendo el mercado el máximo regulador, la intervención pública sólo genera distorsiones.

Los neoclásicos cuentan con diversos autores y estudios, Alfred Marshall, (Parkin, 2012) en 1980 con *Principios de economía* examinó el funcionamiento e interacción de la oferta y demanda en el mercado, estudió monopolios, riqueza y producción, como resultado obtuvo que la asignación de precios se deriva del costo de producción y la utilidad, siendo la marginalidad en utilidad y costos importante.

Pareto, por su parte, llegó al óptimo de Pareto (Morishima 1981), considera que las asignaciones de recursos de mercado son inmejorables, sólo existiría mejoría en un agente en perjuicio de otros agentes, Olivier Blanchard, pese a no ser neoclásico, llega a ciertos postulados en temas relacionados con la política fiscal (Jiménez 2006), menciona cinco conclusiones, la primera, en corto plazo cambios en la demanda agregada tienen repercusiones sobre el comportamiento del producto; segunda, el producto tiende a un nivel potencial a largo plazo; tercera, considerar a las expectativas es importante en los modelos económicos; cuarta, la política monetaria no es neutral en el corto y mediano plazo; y quinto, la política fiscal tiene efectos en el corto y largo plazo;

Por la naturaleza del enfoque neoclásico, la política fiscal no juega un papel predomínate en el crecimiento económico, contrario al enfoque keynesiano, esto debido a que una de sus grandes hipótesis es la no existencia de desempleo involuntario, por lo que la intervención de la política fiscal para incentivar la demanda agregada es innecesaria.

El enfoque neoclásico cumple con diversas características; entre ellas, el consumo se deriva de una maximización en un horizonte de utilidad infinito, el ingreso permanente no es modificado, cada

gasto adicional ahora deberá ser pagado en el futuro, la equivalencia intertemporal, la intervención gubernamental es irrelevante a través del tiempo.

En resumen, la política fiscal neoclásicamente juega un papel diferente al keynesiano, pues no se usa como correctora de la no tendencia al equilibrio con desempleo, sino se usa como maximización inter-temporal de agentes, la actuación de gobierno es anti-cíclica.

Estudios recientes involucran variables fiscales y de crecimiento económico. Posteriormente enfoques de nuevas investigaciones que se centran como tema principal en la intervención del gobierno en la economía, así como el estudio de los multiplicadores de la inversión, entre los nombres de autores a quienes corresponden dichas investigaciones se encuentran Feldstein (2009) Auerbach (2011), Blanchard (2013) e Ilzetzki (2010),

3. Crisis de 2008

Un punto crucial que incentiva a la realización del presente documento es la crisis de los EUA de 2008, siendo el parte aguas de estudio, se busca encontrar a respuestas de cómo se intervino por parte del gobierno en la economía, y si dichas políticas implicaron beneficios y/o perjuicios en la economía. Estudios se realizaron y fueron diversos 2004 que miden el efecto del estímulo fiscal de devolución de impuestos en la economía de Estados Unidos durante 2008 y 2001; Auerbach (2010) menciona que la modificación de los ingresos y gastos públicos, ejerce un impacto expansivo o restrictivo sobre la demanda agregada y en definitiva en la economía.

La ejecución de políticas contiene los instrumentos a utilizar y los objetivos a alcanzar, en ocasiones se le da énfasis a alguno respecto a otro.
Los efectos de la política fiscal sobre el consumo y la inversión privada, por tanto, sobre la renta, han sido analizados por muchos estudios recientes, como por ejemplo Blanchard y Perotti (2002), existe literatura que busca evidenciar como los recortes de impuestos afectan positivamente a la propensión marginal al consumo (Auerbach, 2010), por otro lado, en cuanto al efecto del gasto público como instrumento de política fiscal, la literatura sobre el efecto de las transferencias públicas sobre el consumo no es tan extensa como el análisis de los recortes de impuestos (Auerbach, 2010).

En la primera década del siglo XXI el debate sobre la superioridad de la política fiscal o monetaria es un tema vigente, Feldstein (2009) muestra situaciones reales en las cuales las políticas de los gobiernos no van acorde a la ideología ni manifiestos que predican, de esa manera incita a cuestionar, y como el nombre del artículo lo indica, en "Retinking the role of the fiscal policy", muestra que pese a un consenso en el pensamiento económico de los hacedores de política económica en la que consideran la superioridad de la política monetaria, es cierto que ante la necesidad de implantación de la política económica en momentos de crisis, algunos gobiernos, en especial de EUA, detallaron fuertes estímulos fiscales y programas extensos de ejercicio del gasto público como respuesta a la crisis de 2008, ello indica que la supremacía de la política monetaria no es un hecho determinante y se debe analizar con cuidado, sin duda no hay mejor momento para repensarlo que una crisis económica.

Historicamente han existido olas de entusiasmo y pesimismo en el ejercer de la política fiscal; en el 29, bajo Roosevelt los estímulos fiscales no fueron suficientes para atenuar la gran crisis económica, sin embargo posteriormente en vísperas de la segunda guerra mundial el gasto militar tuvo una efecto de expansión en la economía. Mediante el uso econometría se notaron resultados fueron elemento para la toma de decisiones de políticas fiscales que permitiesen atenuar los ciclos económicos, ya que una expansión insensata de la intervención gubernamental es crisis.

Feldstein (2009) menciona el impacto de un aumento del gasto autónomo en el producto se obtuvo que el valor del multiplicador es muy pequeño, algunas explicaciones peran1) existencia de una expansión fiscal, 2) una deuda pública creciente, 3) tasas de interés y demanda de dinero elevados, y 4) fuga de demanda agregada por sustitución de producción con importaciones; fundamentado en lo anterior se concluía que era difícil de evaluar los ciclos económicos y el impacto que reciben por las variaciones en el gasto público, los análisis se turnaban relativamente complicados por un lado debido a la evidencia empírica que contrastaba los resultados y por otro las deficiencias en el manejo y especificación de los modelos que pretendían fueran explicativos

En la década de los sesenta, en la implementación de la política fiscal hubo un detrimento en su credibilidad, esto debido a que pese a los esfuerzos en la formulación de una política fiscal expansiva, variables fundamentales como el desempleo y la inflación tuvieron un aumento no controlable, ni siquiera explicable por los mecanismos existentes.

El prestigio a la política monetaria desde la década de los setenta ocasionó que se empleara en la década de los ochentas como instrumento para combatir la inflación y armonizar los ciclos económicos, en casos de contracción económica los bancos centrales intervenían regulando y flexibilizando la tasa de interés a la baja, cuando el efecto es de recuperación económica y se sobrecalienta la economía se retiran los estímulos mediante un alza en las tasas de interés y mediante diversos mecanismos de política monetaria.

En la crisis hipotecaria que detona en otoño de 2007, Feldstein (2009) la define como una crisis diferente, en la que los mecanismos de política contractiva convencional no resultan efectivos, anteriormente, ante una recesión económica, bastaba con un ajuste a la baja de las tasas de interés mediante los mecanismos de los bancos centrales, y posteriormente, cuando la recuperación está consolidada y los componentes de política monetaria sólo generan inflación se procedía a retirar los estímulos económicos, para el control de la inflación mediante un alza en la tasa de interés; En EUA en 2007 cuando se hizo una rebaja en la tasa de interés, se pretendió un estímulo a favor de la recuperación en el sector construcción, por un lado, para que los proyectos de construcción resultaran más rentables, y por el otro, para que los deudores hipotecarios vieran flexibilización en el desenvolvimiento de sus créditos, intenciones que no causaron los efectos esperados.

La FED no pudo aplicar sus medidas convencionales en materia de política monetaria, bajar la tasa de interés en los bonos gubernamentales con la intención de bajar las tasas de interés en los créditos hipotecarios y corporativos; no sucedió, el crédito se vio afectado ante una desconfianza en los mercados financieros donde las tasas de interés de los créditos se elevaron, nadie confía en nadie, el valor de las viviendas se desplomaron, y simplemente una variedad de activos relacionados con valores hipotecarios se desplomaron.

La falta de efectividad en el papel de la política monetaria ocasionó en la crisis de 2007 que se repensara el papel de la política fiscal, los gobiernos centrales formularon diferentes mecanismos para la acción ante la crisis, el caso del gobierno estadounidense es muy importante, esto debido a que ante una política económica ineficiente recurrió al uso de política fiscal expansiva mediante diversos mecanismos, entre ellos la bonificación de impuestos con la intensión de incentivar al consumo, pese a ello, una vez realizadas las devoluciones de impuestos a los ciudadanos, lo único que aumento fue el ahorro, un intento de explicación es la negación de los agentes económicos a usar los recursos adicionales teniendo unas expectativas de crisis a futuro, muchos de los recursos

se utilizaron para provisiones de lo recién perdido, en el año 2007 se devolvieron 80 mil millones de dólares a los contribuyentes, de los cuales en el bimestre mayo-junio sólo hubo impacto en gasto de consumo en la economía estadounidense por 10 mil millones de dólares.

Existen estudios formales al respecto del impacto del ingreso adicional en el comportamiento del gasto en consumo, Stephen Miran (2012) realizó un estudio con datos del periodo 1980-2008 en donde encontraron que la propensión marginal a consumir de 0.7, por el ingreso real, y ante un ingreso añadido o adicional, la propensión marginal a consumir solo es de un 0.13, situación que por ende afecta al multiplicador como herramienta confiable para una expansión en la economía.

Las medidas aplicadas en la crisis de 2008 no sólo implicaron un ayuda por medio de devolución de impuestos, sino en ayudas a la mejora en los mercados de crédito mediante la compra de papel comercial a los agentes de los mercados financieros (bancos, fondos de inversión, etc.) situación que no resolvió de forma estructural la desconfianza y deterioro en el mercado de crédito (Feldstein 2009), constando que no es suficiente realizar expansión del gasto y disminución de impuestos, se requería que cada acción fuera realmente formulada y ejecutada con fines de no desperdiciar los recursos que se estaban gastando o dejando de obtener por parte del gobierno, la insuficiencia en las políticas crediticias que si bien propiciaron un fortalecimiento de las instituciones financieras no lograron un crédito suficiente para revertir la espiral decreciente de la demanda agregada.

Antes de la realización de los incentivos gubernamentales por parte del gobierno de Estados Unidos se buscaron las causas de la crisis financiera y el mecanismo de transmisión en las variables macroeconómicas, si bien el tema es meramente financiero, la importancia de su análisis radica en servir para determinar el cómo el gobierno podía intervenir mediante la política fiscal y/o monetaria para actuar contra cíclicamente. Feldstein (2009) menciona a groso modo como causa de la crisis un infravaloramiento en el riesgo y apalancamiento excesivo, ello mediante la interacción de un sinfín de organizaciones como las calificadoras de riesgo, bancos de inversión, casas de bolsa, etc.

Un mecanismo de transmisión de la crisis hipotecaria se puede exponer de la siguiente forma, ante una crisis financiera en la que el valor de los activos financieros se desploma, esto detona en una disminución de la riqueza de los inversionistas, posteriormente una reducción en el gasto de consumo e inversión en los bienes inmuebles, reducción en el valor del bien inmueble, disminuyen expectativas de crecimiento de la industria y de la economía por parte de los agentes económicos,

bajan los niveles de financiamiento, disminuye el crédito, y ahora la cuestión más interesante, ¿Qué puede hacer el banco central? , simple y sencillamente en el caso de la crisis de los EUA la FED no pudo intervenir, ya que una baja en la tasa de interés no es su facultad, incluso aunque existió una baja en las tasas de interés representativas no se logró que fuesen reflejadas en el mercado de crédito.

En la crisis detonada desde 2007 se estima que la perdida de riqueza de diversos agentes económicos fue de diez billones de dólares, con disminuciones drásticas en los niveles de demanda agregada y en el consumo por alrededor de 600 mil millones de dólares, en el actuar de la política fiscal se realizaron diversos cuestionamientos, entre los que se incluye, ¿Cómo aumentar el gasto público anualmente para que en conjunto con la devolución de impuestos se acorte la brecha?, se menciona al gasto público debido a que déficit en la demanda agregada en crisis anteriores eran subsanadas con inventarios.

En el caso de los Estados Unidos y de muchos gobiernos existen problemas para el ejercicio de la política fiscal, el caso mexicano no es la excepción, el problema abarca dos frentes, por el lado del financiamiento y por el gasto público. Un problema crucial es la capacidad de endeudamiento que tiene el gobierno mexicano, ello aunque exista un mercado de crédito disfuncional en el que el dinero se ha vuelto fácil, en las que basta con observar las tasas de interés tan bajas con las que el gobierno se financia. Otro tipo de corte de política fiscal con el cual el gobierno intentó palear la crisis, son los créditos fiscales a las empresas que invierten en investigación y desarrollo, aumento de tasas impositivas a las personas de altos ingresos; por otro lado, en el lado del gasto público se requería un gasto que fuese grande, rápido y dirigido al aumento de la demanda agregada y el empleo, la rapidez era necesaria debido a que el actuar ante la crisis debía contener proyectos que no sobrepasaran por ningún motivo dos años en la ejecución del gasto y/o bonificación impositiva

En síntesis, resultó muy complicado el análisis de la política a implementar, ya que se tenían situaciones adversas como lo es la baja propensión a consumir por los ingresos adicionales (mostradas en la baja propensión por ingresos extras) hasta problemas burocráticos como la lentitud y retraso en el ejercicio del gasto público, y aun realizando el gasto como se planeaba se dieron ciertas interrogantes sobre el papel que pudiese tener el gasto como instrumento anti cíclico. En EUA el presidente Obama declaró las áreas prioritarias del gasto público gasto: sanidad, energía, educación, infraestructura y el apoyo a los pobres.

Una propuesta que sonaba muy bien en el año 2008 como incentivo a la recuperación económica era la expansión en el gasto público en defensa militar, se puede recordar a la economía norteamericana como una economía con un alto interés en la industria militar, y por ende con un gasto gubernamental elevado en dicho rubro, esto en especial después de la segunda guerra mundial, cuando el papel de las fuerzas armadas ha jugado un papel muy importante en la economía, diversos descubrimientos tecnológicos militares han sido de gran aplicación en las industrias de telecomunicaciones y transportes principalmente. Para Feldstein (2009), por el lado del combate al desempleo, el gasto en la milicia pudiese haber representado una recuperación de alrededor de 300,000 empleos, lo que significaría un alivio para el de por sí ya deteriorado mercado laboral.

En suma, Feldstein(2009) mencionaba que podían existir tres escenarios del manejo de la política fiscal,1)Con aumento en el gasto público-un aumento considerable y sostenido en el gasto público pudiera ocasionar en un mediano plazo desempleo, y agravar la situación económica si no se revisaba la eficacia de sus componentes 2) Baja en la tasa impositiva- ante una estrategia de limitación de las tasas impositivas a las empresas y personas se debe armonizar con el gasto público para no incurrir en endeudamientos elevados 3) Devaluación- una estrategia de depreciación del dólar sería de gran ayuda para aliviar el deterioro de la balanza comercial.

Un asunto de suma importancia respecto a la multiplicación de la inversión gubernamental es el dinamismo que tienen los mismos, es decir vienen definidos por condiciones temporales y espaciales definidas. En su artículo *Growth forecast errors and fiscal multipliers*, Blanchard (2013) habla sobre una situación muy importante, los errores de pronóstico del crecimiento económico y la consolidación fiscal prevista para la crisis, el tema resulta interesante porque muchos países ha tenido debates sobre el tamaño y signo de los multiplicadores cuando las economías se encuentran en un estado de consolidación fiscal, es decir, en una situación en la que se evita el déficit en las finanzas públicas mediante un recorte en el gasto público o un aumento en las tasas impositivas. El tema de la investigación refiere a los problemas de estimación en el tamaño del multiplicador, ya que como se mencionara más adelante, los pronósticos han quedado a deber, debido a que los países que han contado con consolidación fiscal han tenido decepciones respecto al comportamiento del crecimiento económico y esto debido a que de haber sabido el

comportamiento exacto del multiplicador hubiesen expandido el gasto público para así generar un mayor crecimiento económico en lugar de haber aplicado una política restrictiva.

Ante la inquietud de los efectos que pudiese tener una pronosticación Blanchard (2013) muestra su modelaje con el fin de obtener respuesta a lo que son las equivocaciones en la combinación de gasto público ejercido y situación financiera del gobierno, ello mediante un estudio realizado a países europeos, en el que muestra cómo existe una relación entre lo que es la situación de déficit o superávit en las finanzas públicas y la estimación de la relación de los errores en los pronósticos de crecimiento económico; los desconocimientos en el valor de los multiplicadores pudiesen ocasionar decepciones en el comportamiento del crecimiento económico.

Considerando en la ecuación anterior la existencia de expectativas racionales y suponiendo un modelo explicativo, los coeficientes deben ser cero, indicadores en las beta negativos indican que los pronosticadores subestimaron el valor del multiplicador, claro ejemplo es la relación inversa que se establecería entre el valor del pronóstico de la consolidación fiscal (sanidad en las finanzas públicas) respecto el error de pronóstico del crecimiento económico.

Antes de mostrar el resultado de la investigación publicada en World Economic Outlook (IMF, 2012) es importante aclarar que la investigación que realizo Blanchard se centra en encontrar que tan decepcionante o no puede ser para el crecimiento económico una eventual subestimación del multiplicador de la inversión. Por el lado de la consolidación fiscal, independientemente de los resultados arrojados, existieron posiciones encontradas por legisladores, algunos a favor de la disminución del déficit a que al plantear la relación que pudiese existir entre las variables antes mencionadas legisladores de Europa como Jean- Claude Trichet mencionaban que la austeridad en las finanzas públicas en ningún momento podía ser una amenaza para el empleo ni el crecimiento económico.

El estudio de Blanchard, ante diversas críticas que se enfocan en insistir en que los multiplicadores son más grandes durante momentos donde no existen las crisis, contra multiplicadores pequeños en momentos de crisis, concluye que los multiplicadores fiscales, por lo general, son subestimados, también enfatiza en que se subestimaron significativamente el desempleo, la inversión, y el consumo, concluyendo así que los multiplicadores son mayores a uno durante los primeros años de crisis. En el mismo estudio, y para años posteriores a la subestimación, se puede observar una

disminución en los errores de predicción de los crecimientos y consolidación fiscal, que se traduce en un multiplicador menor pasada la crisis.

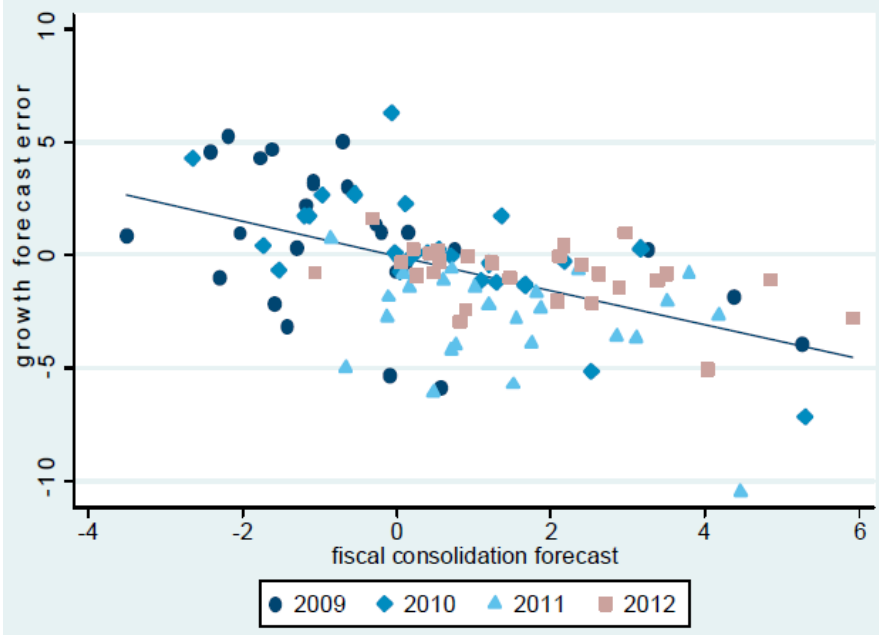
Blanchard insiste que sus investigaciones no se deben observar como una invitación a dejar de lado la consolidación fiscal, es decir, no quiere incentivar a que los gobiernos realicen política fiscal expansiva indefinida, y menos de manera irresponsablemente que termina siendo insostenible, el resultado de la subestimación del multiplicador no se debe tomar como una recta infalible, ello debido a que cada país contiene desviaciones respecto al valor del multiplicador y cada valor tiene una temporalidad, es decir en una misma economía el valor del multiplicador a través del tiempo no toma un valor constante, es diferente en las crisis, auges, incluso mediante las expectativas racionales el empleo de la política fiscal puede ocasionar que dicho valor sea aún más cambiante acorde a las expectativas que tengan los agentes.

Los resultados que muestra, pese a la aclaración anterior, muestran que los países que cuentan con mayores consolidaciones fiscales tienen mayores decepciones de crecimiento económico por una contracción en el gasto público y una visualización de un amplio multiplicador, mayor al estimado, técnicamente y acorde a la ecuación de regresión del error del pronóstico del crecimiento respecto al pronóstico de consolidación fiscal se encuentra una relación negativa significativa entre las previsiones de consolidación fiscal en 2010 y posteriores errores de crecimiento, indicando un parámetro beta $\boldsymbol{\beta}$ con un valor de -1.095, con un estadístico t de -4.294, indicando que los errores de pronósticos son alrededor de uno por ciento.

El primer indicio encontrado en el estudio de Blanchard indica que los multiplicadores fiscales han sido mayores de los estimados durante el periodo 2010-2012, una justificación de ello puede ser el uso de modelos en los que el multiplicador fiscal depende de la composición del ajuste fiscal; por otro lado en estudios del Fondo Monetario Internacional en 2008 y 2010 realizados a economías desarrolladas durante periodos de datos que van desde 1970 a 2007 y 1979 a 2009, indican que el valor del multiplicador es de 0.5; posteriormente estudios realizados por el mismo organismo muestran un cambio en la magnitud de los multiplicadores fiscales, ello mediante el estudio del impacto fiscal en el periodo 2008-2010, en el que el valor de los multiplicadores se eleva de estar en un rango en los países europeos de 0.3- 0.5 hasta un rango de 0.3-1.8, sin embargo, existen diversas explicaciones en el comportamiento del multiplicador, y por ende el valor de todos los multiplicadores no es necesariamente mayor a uno, en el caso de los multiplicadores que son

menores pudiera deberse al aprendizaje de los pronosticadores, ejemplo de ello es la siguiente gráfica donde muestra resultados obtenidos por medio de una estimación econométrica por medio de panel.

Grafica 1- Pronósticos de consolidación fiscal y errores de pronósticos de crecimiento económico 2009-2012



Fuente: Blanchard (2013), Growth forecast errors and fiscal multipliers, NBER.

Lo interesante ahora es ver como las predicciones del crecimiento van corrigiéndose al pasar los años, que para efectos de la gráfica 3 es un periodo de crisis, donde en un principio las estimaciones no son las óptimas, posteriormente las estimaciones son mejores, por ende los multiplicadores no son subestimados, y no hay decepciones respecto al comportamiento del crecimiento económico. Una disminución en los multiplicadores reales también podría reflejar una relajación de las restricciones crediticias, los resultados por ende no son meramente definitivos, en algunos casos las situaciones de cambios de confianza en los agentes económicos pueden intervenir, además de que a medida que las economías se recuperan de una crisis, al salir de la trampa de la liquidez, el valor de los multiplicadores es muy probable que vuelvan a sus niveles originales de antes de la crisis.

Una premisa básica del estudio realizado por Blanchard indica que parece seguro el tener en cuenta la consolidación fiscal para asumir multiplicadores más altos antes de que las crisis se sucinten. Es importante destacar que para establecer el mecanismo de política fiscal, el estimar el valor del multiplicador fiscal a corto plazo no es una herramienta meramente suficiente, pese a ser un factor importante.

Las estimaciones del tamaño de multiplicadores son un tema importante, pues consta en conocer el tamaño y en su caso dinamismo que presenta, por su parte Ilzetzki y Mendoza (2010) realizaron investigaciones que resumen en su artículo llamado "How big (small) are the fiscal multipliers?", en las que determinan que los efectos macroeconómicos del gasto público, obteniendo como premisa principal que no es el mismo efecto en todos los países, diversos factores pueden distorsionar el valor de los multiplicadores, algunos de ellos son el nivel de desarrollo económico, el régimen en el tipo de cambio, niveles de endeudamiento público, grado de apertura comercial. En su estudio, realizado con una serie de datos trimestrales, donde se incluyeron muestras de 44 países en los que se buscó la relación que existe entre el gasto público y el comportamiento de la producción, se obtuvieron resultados interesantes, los cuales consisten en las relaciones que tiene el tamaño del multiplicador respecto al tamaño de la economía, el tipo de cambio con el que cuentan, si es una economía abierta o cerrada, y la disciplina fiscal con la que refieran.

Existen posturas diversas respecto al valor de los multiplicadores, Robert Barro (2009) asume que el valor del multiplicador en tiempo de paz es cero, por otro lado Cristina Romer, asesora económica de la Presidencia de Estados Unidos insistía en que el multiplicador es de alrededor de 1.6, fundamentando un estímulo económico de alrededor de 800 mil millones de dólares aprobado para el año 2009, si bien, se logró a fines de 2010 un aumento del empleo por alrededor de 4 millones de personas en EUA, la incertidumbre del multiplicador sigue siendo un tema de mucha complicación, incluso pese al éxito del estímulo aplicado en EUA en 2009-2010, pese a que es un hecho que ejercer política fiscal expansiva no es sostenible a largo plazo, principalmente por los niveles de endeudamiento que genera.

Auerbach por su parte, estimo multiplicadores de gasto de gobierno en un estudio que abarcó a países de la OCDE, realiza proyecciones en los multiplicadores con el manejo de una base de datos, a diferencia de sus trabajos anteriores, el autor realiza pronósticos sin el uso de técnicas VAR, ello lo justifica para evitar la pérdida de grados de libertad.

En su estudio encontró tres conclusiones principales, las cuales consisten en: 1) en momentos de recesión económica se encuentran grandes diferencias entre el tamaño de los multiplicadores de los países, 2) cuando se cuenta con control de pronósticos en tiempo real el valor del multiplicador aumenta en momentos de recesión, 3) En el momento de desagregar el gasto de gobierno, especificando el análisis al gasto de gobierno en la milicia se obtiene que el valor de los multiplicadores es más grande.

La importancia de los resultados de la investigación de Auerbach (2011), es la consistencia, en este caso, con la visión keynesiana de la política fiscal, al notar que ante los valores del multiplicador más grandes en momentos de recesión, la optimalidad del ejercicio de la política fiscal reside en su implementación como atenuante de ciclos económicos, es decir, expansión del gasto público en momentos de recesión, pese a críticas que le realizan autores como Gali, que indican que los modelos keynesianos no tienen capacidad de entretejer en el consumo privado, la discusión, no solamente incluye discusiones aisladas de autores, basta con ver las discrepancias entre los enfoques de los autores keynesianos contra los autores nuevos keynesianos.

La diferencia entre los dos anteriores enfoques consiste en la admisión por parte de los nuevos keynesianos del efecto desplazamiento de la inversión privada por parte del gobierno en el momento de la expansión del gasto público, asimismo admiten y reconocen un vaciamiento de los mercados con la inexistencia de capacidad ociosa, por ende los resultados de los estudios de multiplicadores por los nuevos keynesianos indican la inexistencia de relaciones entre el aumento del gasto y el aumento del consumo privado, situación muy diferente respecto a los keynesianos.

4. Evolución de la Política fiscal y el crecimiento económico en México

A continuación se presentan variables que se emplearon en la estimación de un panel de datos, el tipo de datos son series anuales que comprenden el periodo 1993-2013, a precios constantes del año 2008, series que están disponibles para las treinta y dos entidades federativas de la República Mexicana; son cuatro variables a emplear, las cuales son Producto Interno Bruto (PIB), Impuestos estatales (IMEST), gasto público (GP), con un total de 672 observaciones, considerando que son 32 entidades federativas y 21 años de observaciones.

Las estadísticas, en resumen, de las variables antes mencionadas se muestran a continuación

Tabla 1: Estadísticos básicos de variables de política fiscal

Variable	Obs.	Mean	Std. Dev.	Min	Max
pib	672	3.17e+11	3.39e+11	4.06e+10	2.24e+12
gp	672	2.63e+10	2.50e+10	2.26e+09	1.79e+11
imest	672	1.25e+09	3.43e+09	1.22e+07	2.97e+10

Fuente: Elaboración propia con datos del INEGI.

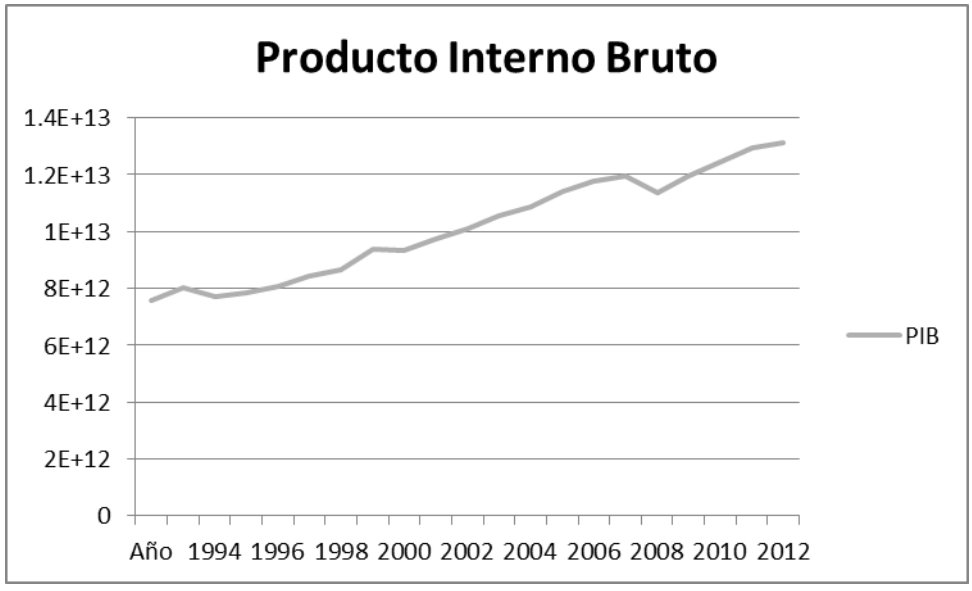
Los valores expresados en la tabla muestran el valor en pesos, a precios de 2008, dichos datos por sí solos no indican una tendencia; los valores medios, mínimos y máximos representan la magnitud del PIB, inversión en vivienda, gasto público y de los impuestos estatales; a continuación se muestra la información, mencionando la observación mínima, media y máxima de cada variable durante el periodo antes mencionado.

5. Comportamiento de las variables

Para efecto de una mejor visualización, se muestra a continuación el comportamiento de las tres variables.

- Producto Interno Bruto a precios constantes de 2008

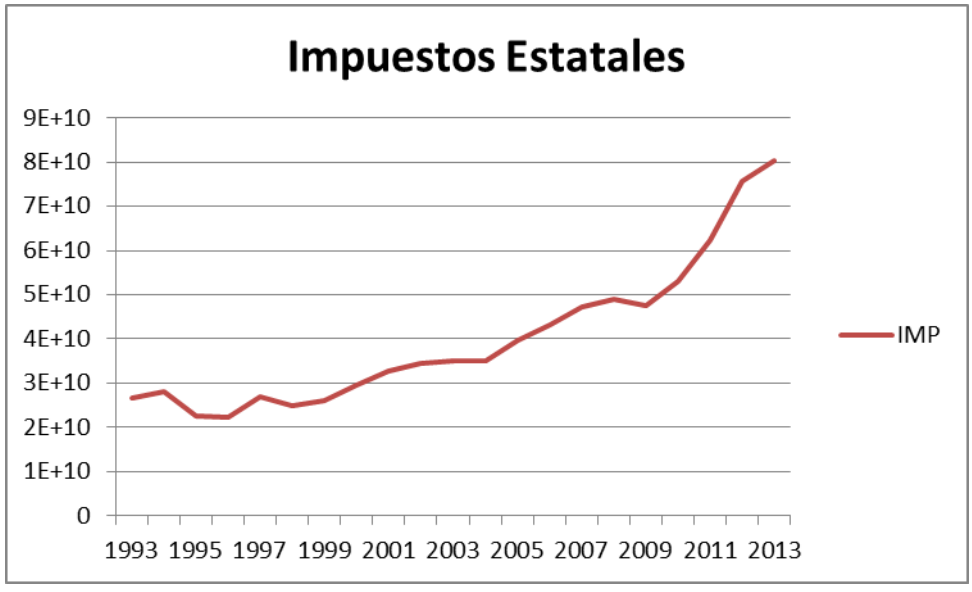
Gráfica 2. Producto Interno Bruto p.08



Fuente. Elaboración propia con datos de BIE-INEGI

- Impuestos Estatales a Precios constantes de 2008

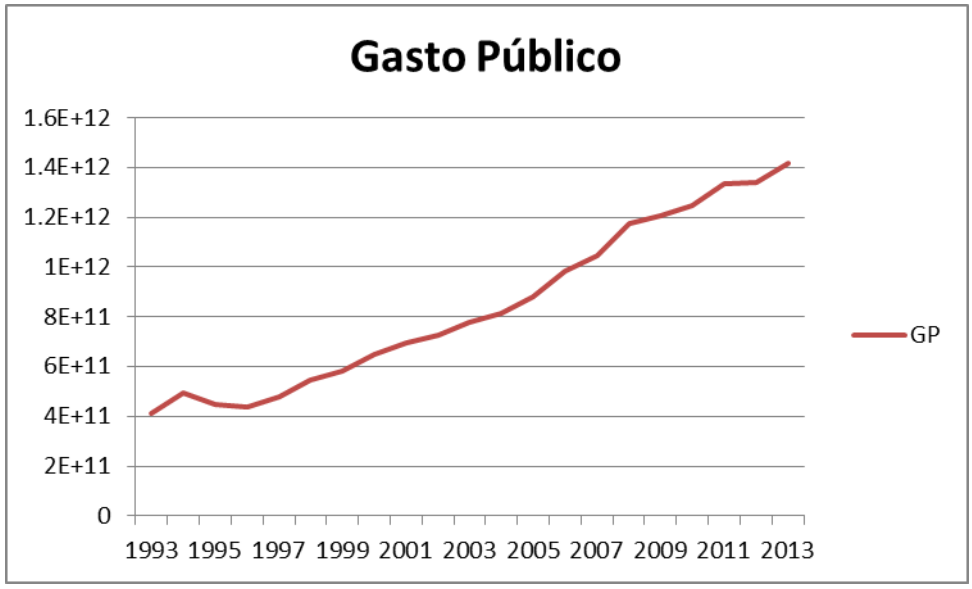
Gráfica 3. Impuestos Estatales p.08



Fuente: Elaboración propia con datos de BIE-INEGI

- Gasto Publico a precios constantes de 2008

Gráfica 4: Gasto Público p.08



Fuente: Elaboración propia con datos de BIE-INEGI

Como se puede observar el comportamiento de las variables puede ser resumido a manera de estadísticos y gráficamente, el comportamiento de las variables obedece por un lado a las decisiones gubernamentales relacionadas a la captación de ingresos públicos, ejercicio del gasto y cobro de impuestos estatales.

6. Política fiscal y el crecimiento económico mexicano, un análisis empírico

La base de datos para el presente estudio cuenta con tres variables que son los impuestos estatales (IMEST), el producto interno bruto (PIB) y el gasto público estatal (GP), ello para los 32 estados de la república en un periodo que va de 1993 a 2013; por la naturaleza de la composición de los datos se elabora un panel corto de acuerdo a la clasificación de Cameron y Trivedi (2009) en el cual se incluye un periodo corto de observaciones y asimismo, entre las ventajas que se tiene por el uso de panel de datos se incluye que, a diferencia de las series temporales, en el panel sí se puede detectar y medir mejor los efectos, proporciona una mayor cantidad de datos informativos, permiten el estudio de modelos más complejos, y por último se observa que no hay un límite para la heterogeneidad en el uso de variables, es decir de diversa naturaleza (Gujarati, 2003).

El modelo queda especificado de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{ln(PIB) = \beta_1 + \beta_2\, ln(GP) + \beta_3 ln(IMEST) + \varepsilon}$$

$\boldsymbol{\beta_1}$= constante, $\boldsymbol{\beta_2, \beta_3}$, = parámetros.

$\boldsymbol{Ln(PIB)}$: Logaritmo natural del Producto Interno Bruto. Logaritmo natural del PIB, que es la producción de bienes y servicios de demanda final en un estado en un periodo de un año expresado en valor monetario a precios de 2008.

$\boldsymbol{Ln(GP)}$: Logaritmo natural de la variable gasto público. Es el logaritmo natural del flujo negativo que realizan los gobiernos estatales producidos a lo largo de ejercicios anuales realizados por operaciones presupuestarias y no presupuestarias a precio de 2008.

$\boldsymbol{ln(imest)}$: Logaritmo natural de la variable impuestos estatales.- Es el logaritmo natural de los tributos percibidos por los estados, acorde a las facultades que tienen como entidades federativas para la obtención de los mismos.

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Error

Una vez establecido como preámbulo la especificación del modelo econométrico, podemos recordar que hay tres tipos de control en la presencia de efectos observables en los modelos de panel de datos, ellos son mediante la estimación de mínimos cuadrados ordinarios (pooled), efectos fijos y efectos aleatorios.

La estimación se lleva a cabo por tres métodos: Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO), Efectos Fijos (EF) y Efectos Aleatorios (EA); el enfoque más sencillo es el de MCO, omite las dimensiones de tiempo y espacio. La estimación mediante EF, supone que hay efectos individuales e independientes entre sí, consideran un término constante diferente para cada individuo. Para determinar cuál de los dos modelos es mejor, el de MCO o EF, se debe saber que la primer estimación de MCO es a diferencia de la regresión de EF, un modelo restringido, pues asume intercepto común para todos los estados y mediante la Prueba F restrictiva se determina la mejor estimación.

Tabla 2. Estimación del modelo econométrico

	Estimación 1993-2007			Estimación 1993-2013		
Variables	M.C.O.	M.E.F.	M.E.R.	M.C.O.	M.E.F	**M.E.R**
Constante	4.61e+10	**1.61e11**	1.60e11	5.83e10	1.93e11	**1.92e11**
Probabilidad	0.282	**0.000**	0.000	0.162	0.000	**0.000**
Gasto Público	9.715103	**2.78665**	2.908742	7.344645	2.354603	**2.331921**
Probabilidad	0.000	**0.000**	0.000	0.000	0.000	**0.000**
Impuestos	43.49206	**72.7224**	71.5172	52.45847	49.45991	**51.44723**
Probabilidad	0.001	**0.000**	0.000	0.000	0.000	**0.000**
F (valor P)		**0.000**			0.000	
LM (valor P)			0.000			**0.000**
Hausman (valor P)		**0.000**				**0.1260**
Observaciones	479	**479**	479	672	672	**672**
R^2	0.7966	**0.7553**	0.7580	0.8113	0.8079	**0.8063**

Fuente: Elaboración propia con datos de regresión.

La estimación con EA, supone distinto intercepto para las unidades transversales, tratando el carácter individual de cada estado, para elegir entre MCO y EA se utiliza la prueba "Breusch and Pagan Lagrangian multiplier test for random effects. En el cuadro 2 observamos tanto EF como EA son preferibles a MCO en base a las pruebas Breusch & Pagan y Prueba F, para elegir entre las dos regresiones, se aplica la Prueba de Hausman, que demostró que la diferencia entre los coeficientes de ambas estimaciones no es sistemática, y es más conveniente el método de EF para el caso de la regresión del periodo 1993-2007 y viceversa con la elección de la estimación con Efectos Aleatorios.

El cuadro numero 4 muestra los resultados la estimación del modelo que plantea la relación entre el Producto interno bruto (lPIB), el gasto público (lGP) e impuestos estatales (lIMEST). En dicho cuadro se observan tres tipos de modelos; mínimos cuadrados ordinarios (MCO), efectos fijos (EF)

y efectos aleatorios (EA) en dos regresiones 1993-2007 y 1993-2013. La variable dependiente es el PIB y las independientes son el gasto público e impuestos estatales.

Como se tienen tres tipos de modelos, se tienen que comparar entre ellos para saber cuál de los tres modelos es mejor, es decir, comparar entre mínimos cuadrados vs efectos fijos, mínimos cuadrados vs efectos aleatorios y efectos fijos vs efectos aleatorios, en un principio se realiza la estimación M.C.O., al ser comparada con M.E.F. y su valor en f p-value resulta ser mejor respecto a M.C.O.; en una segunda instancia se realiza la estimación de M.E.A y al compararlo con M.C.O mediante el valor en test Breusch and Pagan resulta ser mejor M.E.A.; al final M.E.F. resulta ser el mejor al obtener un valor p=0.0000 en la prueba de Hausman en el primer caso, y en el segundo se opta por la regresión de M.E.A. por un p=0.126 respectivamente.

7. Conclusiones

En el presente trabajo, se realizó una investigación en la que se buscó la relación entre la política fiscal y el crecimiento económico en México durante el periodo de 1993-2013, con la realización de dos estimaciones de panel dinámico se obtuvo lo siguiente:

1) El primero y muy importante, se observó una relación positiva entre el ejercicio de gasto público y los impuestos estatales en el comportamiento del PIB.

2) Se observa una relación más fuerte de las variables Gasto Público e Impuestos Estatales durante el periodo 1993-2007, lo que indica que la efectividad de la política fiscal era de más fuerza en el primer periodo estudiado.

El resultado obtenido en el presente trabajo de investigación no podría proponer, en resumidas cuentas, el ejercicio de política fiscal a modo contracíclico o procíclico; la importancia del presente trabajo radica en que al comprender el sustento teórico, los resultados obtenidos anteriormente por diversos autores sirvan de guía, mas no de receta, para el ejercicio de política fiscal.

Es importante conocer que el resultado del presente trabajo arrojaría como resultado que durante el periodo de 1993-2013, se pudo haber ejercido política fiscal expansiva con fines de acelerar el crecimiento económico, en especial de 1993-2007 pero no se debe olvidar que en el ejercicio de la política fiscal existen situaciones y conceptos que si bien no son una verdad absoluta pueden servir de ayuda para comprender un poco más el tema, tal es el caso del efecto desplazamiento, la

disciplina fiscal; o en su caso, situaciones como el comportamiento del multiplicador de gasto de gobierno durante recesiones, expansiones, endeudamiento, etc., sirven para generar recomendaciones más amplias y consistentes sobre lo que es el ejercicio de una política fiscal responsable.

La importancia de todo estudio económico de este tipo se fundamenta en la necesidad de complementar los resultados de estudios econométricos o estadísticos actuales con la evidencia empírica antes realizada, así como las condiciones de las economías en las que se realizaron estudios similares.

Bibliografia

Auerbach Alan J. y Gorodnichenko Yuriy (2010), "Fiscal multipliers in recession and expansion", Working Paper 17447, NBER. , National Bureau of Economic Research, Inc.

Barro Robert (1998), "Macroeconomics", Quinta edición, Massachusetts Institute of technology, EUA.

Blanchard Olivier J., Leigh Daniel (2013), "Growth forecast errors and fiscal multipliers", Working Paper 18779, NBER. National Bureau of Economic Research, Inc.

Blanchard Olivier, Fischer Stanley (2002), "Lectures on Macroeconomics", Primer edición, MIT, EUA.

Cerda Rodrigo, González Herman & Lagos Luis Felipe (2005)," Efectos dinámicos de la política fiscal", Pontificia Universidad Católica de Chile, Cuadernos de economía, Vol. 42

Cameron Colin Adrian, P. K. Trivedi (2009), "Microeconometrics using stata", Stata Press, USA.

DesaiMeghnad (1981), "El monetarismo a prueba", primera edición en español, Fondo de Cultura Económica, México.

Feldstein Martin S. (2009), "Rethinking the role of fiscal policy", Working Paper 14684, NBER. , National Bureau of Economic Research, Inc.

Ferrari Fernando & Henrique Fábio (2012), "Las políticas económicas de Keynes: Reflexiones sobre la economía brasileña en el período 1995-2009", Revista CEPAL, no 108.

Friedman Milton, (1967), "The Optimum Quantity of Money", Primer edición, Aldine Transaction, EUA.

Hall Robert, Taylor John (1992), "Macroeconomía", tercera edición, Antoni Bosch, España

Ilzetzki Ethan, Mendoza Enrique G. y Vegh Carlos A. (2010)," How big (small?) are the fiscal multipliers?", Working Paper 16479, NBER. , National Bureau of Economic Research, Inc.

Jiménez Félix (2006), "Macroeconomía, enfoques y modelos", Tercera edición, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Kandil, Magda (1991), "Las diferencias estructurales entre los países desarrollados y en desarrollo: algunas evidencias y consecuencias", Economic Notes, Vol. 20.

Krugman Paul R. (2006), "Macroeconomía, introducción a la economía"; Traducción, Editorial Reverté, España.

Larraín Felipe y Sachs Jeffrey (2002); "Macroeconomía en la economía global", Segunda edición; Editorial Prentice-Hall, Argentina.

Lucas Robert (1972), "Expectations and the Neutrality of Money", Journal of Economic Theory.

Maynard Keynes John (2003), "Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero", cuarta edición, Fondo de cultura económica, México.

Modigliani Franco, (1989), "Monetary Theory and stabilization Policies" . MIT Vol. 4&5, ISBN-02621322943, EUA

MorishimaMichio (1981), "Teoría económica de la sociedad moderna", Primera edición, Antoni Bosch, España.

Parkin Michael, (2012), "Macroeconomía, versión para Latinoamérica", séptima edición, Pearson Educación, México.

Pérez Macal Fidel (2006), "La efectividad de la política fiscal en la estimulación de la actividad económica", notas monetarias, Banco de Guatemala, No. 77, año 7.

Samuelson Paul, Nordhaus William, (2010),"Economics"; Décimo novena edición, Mc-Graw-Hill, India.

Sánchez Gómez, N. (2009), "Derecho Fiscal Mexicano", Séptima edición, editorial Porrúa, México.

Tickell Oliver (2009), "Kioto 2: ¿cómo gestionar el efecto de invernadero global?", Primera edición, Icaria Editorial, España.

CAPÍTULO XXXII

Matrices de covarianzas ortogonales markovianas con cambio de régimen: Propuesta y demostración teórica de su factibilidad en un contexto gaussiano.

Oscar V. De la Torre Torres

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Resumen

El uso de modelos markovianos con cambio de régimen en aplicaciones de Econometría Financiera y valuación de activos financieros es una práctica que surge gracias a los trabajos pioneros de Hamilton (1989, 1994). En dichos modelos se asume que el proceso estocástico subyacente a una variable financiera o económica se comporta como un proceso markoviano de S regímenes. Este tipo de modelo es útil en la práctica para determinar la probabilidad de que una serie de tiempo en el periodo t se encuentre en un escenario de alta o baja volatilidad. Hoy en día se tienen extensiones de modelos multivariados que conducen al cálculo de una matriz de covarianzas con cambio de régimen como son las propuestas de Pelletier (2006) y Haas (2010) pero estas se enfocan a resolver un problema de dimensión N con las correspondientes limitaciones numéricas y computacionales. Dado esto, en el presente trabajo se plantea, de manera teórica, un primer método de simplificación partiendo del método de los componentes principales. La utilidad y factibilidad práctica de la propuesta se demuestra con simulaciones Monte Carlo con cambio de régimen.

1. Introducción

1.1 Discusión teórica que fundamenta la propuesta.

Determinar la función de distribución de probabilidad que modela el comportamiento del precio de valores y activos financieros, así como los parámetros de la misma, es una tarea que ha interesado tanto a académicos como profesionales especializados en las finanzas y se ha convertido en la piedra angular en el proceso de valuación y selección de activos financieros que da origen a la Economía Financiera y todas las áreas de conocimiento derivadas de este programa

de investigación. Como punto de partida, es bien conocida la novel propuesta de Markowitz (1959; 1952) quien sugiere que un conjunto de N activos en un portafolio diversificado (mismo que lleva a un conjunto o matriz de rendimientos $\mathbf{r}=[\mathbf{r}_{1,t},\ldots,\mathbf{r}_{n,t}]'$ o variable vectorial) estará distribuido de forma gaussiana multivariada:

$$\mathbf{r}\sim\Phi(\mathbf{m},\mathbf{C})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{C}|^{1/2}}e^{-\frac{1}{2}([\mathbf{r}-\mathbf{m}]'\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{r}-\mathbf{m}])} \quad (1)$$

Dada la expresión anterior, se observa que, para fines de valuación y selección de portafolios de valores, son dos los parámetros de importancia a considerar. El primero es el vector de rendimientos $\mathbf{m}=[E(\mathbf{r}_1),...,E(\mathbf{r}_n)]'$ esperados en cada activo y el segundo la matriz de varianzas y covarianzas $\mathbf{C}=([\mathbf{r}-\mathbf{m}]'[\mathbf{r}-\mathbf{m}])1/n$, en donde estas últimas, las covarianzas, son la piedra angular para cuantificar los beneficios de la diversificación en un portafolio. Posterior a esta propuesta seminal, se estudiaron múltiples formas de modelar el proceso estocástico subyacente de los rendimientos de los activos de un portafolio y se hicieron múltiples demostraciones que llevaron a observar que el supuesto dado en (1) no se apega a la realidad de los activos financieros que cotizan en bolsas y mercados interbancarios. Ante esto, se observó como principal causa, en unos inicios, a que no se tenían, a nivel asintótico, varianzas definidas y que los rendimientos de las acciones que cotizaban en la bolsa de nueva York estaban modelados por una función de densidad de probabilidad ("fdp" de ahora en adelante) Pareto estable[1] con parámetro de forma $\xi\in(0,2]$. Dado esto, se observó en las propuestas que las colas de la fdp podrían no ser exponenciales (como se espera en una fdp gaussiana); sino polinomiales. Sin embargo, gracias a los estudios de series de tiempo, se cayó en la cuenta de que los parámetros dados en (1) podrían no ser los mismos en diferentes periodos de tiempo. Esto es debido a que los datos con que se cuentan son muestras y, por ende, subconjuntos de la población de posibles variaciones porcentuales de los activos financieros de interés. Ante esto, se llegó a observar que los parámetros $\mathbf{m}$ y $\mathbf{C}$ son no estacionarios, por lo que, para sostener el supuesto de normalidad dado en (1). Dado lo anterior, se observa que el parámetro de rendimiento esperado $E(\mathbf{r}_i)$ de un activo financiero o variable económica puede aproximarse con un modelo lineal que contempla el

[1] Para mayor detalle, favor de referirse a Fama (1963).

efecto de no estacionariedad, a fin de que los residuales ε_t puedan estar normalmente distribuidos:

$$\varepsilon_{i,t} = r_{i,t} - E(r_i), \quad \varepsilon_{i,t} \sim \Phi\left(0, \sigma^2_{\varepsilon_{i,t}}\right) \tag{2}$$

Sin embargo, tal como se ha observado en la práctica y en la teoría de series de tiempo, el supuesto presentado en (2) tampoco puede sostenerse ya que los residuales cuadráticos también siguen un proceso autorregresivo, lo que llevó a sustituir la definición de varianza dada por $\sigma_i^2 = \left[\sum_{t=1}^{T}\left(r_{i,t} - E(r_i)\right)^2\right] n^{-1}$ por la siguiente expresión sugerida por Bollerslev (1986), misma que complementa y parte de la propuesta de Engle (1982):

$$\sigma_t^2 = \kappa + \sum_{p=1}^{P} \beta_p \varepsilon_{t-p}^2 + \sum_{q=1}^{Q} \gamma_q \sigma_{t-q}^2 + \upsilon_t \tag{3}$$

Con el proceso de varianza generalizada auto regresiva con heteroscedasticidad o GARCH (p,q) descrito en (3), se observa en primera instancia que el comportamiento de los residuales ya no se puede aproximar con un modelo lineal pero, a pesar de ello, el supuesto de normalidad de las innovaciones η_t se puede dar como válido. Con lo previamente descrito, se tenia presente que los parámetros de rendimiento esperado y varianza de los activos financieros podrían ser modelados por procesos ARMA (r,m) y GARCH (p,q). Esto es así debido a la propiedad cambiante de estos parámetros, misma que resulta del cambio en las expectativas y objetivos de los inversionistas o agentes en un mercado financiero. Ante esto, resultó de necesidad extender el modelo GARCH (p,q) a las covarianzas o elementos no diagonales de la matriz $\mathbf{C}$ previamente descrita. Esto es así por que, en los mercados financieros, se observa el efecto de conglomerado de volatilidades y el conglomerado de correlaciones (y como consecuencia de covarianzas). Lo anterior como consecuencia del cambiante ánimo entre los inversionistas y agentes participantes en los mercados financieros, así como el cambiante nivel de aversión al riesgo. Como consecuencia de esto, se ha aceptado que tanto los rendimientos esperados, como las varianzas y covarianzas (con sus coeficientes de correlación implícitos) sean cambiantes en el tiempo y resultado del cambio en las expectativas de los inversionistas. Evidencia de ello se puede encontrar en los trabajos primigenios de Perry (1982) y Akgiray (1989). Como resultado de este supuesto y la demostración de su validez y utilidad práctica, se pueden mencionar múltiples trabajos como el de West y Cho (1995), quienes demuestran el beneficio de emplear modelos GARCH en series de

tiempo de divisas. Para el caso mexicano se pueden citar a López (2004) quien estudia el efecto ARCH y la aplicación de variantes de la familia de modelos GARCH al IPC de la Bolsa Mexicana de Valores, o a López y Benavides (2010) quienes estudian tanto el efecto enero como el autorregresivo en las principales bolsas de valores.

Dada la breve revisión de conceptos y bibliografía previa, se puede apreciar que, en la mayoría de los casos, se acepta que el rendimiento esperado de la serie de tiempo de variaciones porcentuales de un activo financiero se modela de forma lineal ya sea con una media aritmética, exponencial o geométrica o con un modelo ARMA (r,m). De manera complementaria, se ha aceptado ampliamente que es más adecuado modelar la varianza (léase volatilidad) con modelos no lineales como pueden ser los modelos GARCH. Esta propuesta puede extenderse a nivel multivariado en donde se puede calcular el vector de medias esperadas $\mathbf{m}$ con los modelos previamente citados y la matriz de covarianzas $\mathbf{C}$ con modelos GARCH, lo que llevó a propuestas como la de Bollerslev (1990) , la de Engle y Kroner (1993) quienes sugieren una forma de calcular $\mathbf{C}$ con un modelo denominado VECH-GARCH, el cual adquiere una complejidad que ha limitado su implementación práctica. De manera complementaria y como una forma de solventar lo anterior Alexander (2002) hace una propuesta ortogonal para poder calcular las matrices de covarianzas GARCH, el cuál es tomado en consideración en una parte importante dentro de la propuesta del presente trabajo.

A pesar de las bondades tanto de los modelos de covarianzas GARCH estudiados, así como de los modelos ARMA, se ha observado que el vector de medias y, como consecuencia, las varianzas y covarianzas de los activos de un portafolio pueden ser no lineales. Esto es que, para fines de un régimen de baja volatilidad (BV), se tenga un vector $\mathbf{m}_{BV}$ y, para el caso de alta (AV), uno $\mathbf{m}_{AV}$. Dado esto, se observa que el modelar las series de tiempo con algunos de los modelos previamente mencionados puede resultar limitado ya que ahora la fdp dada en (1) puede tener la siguiente forma funcional para dos regímenes, misma que se parte del denominado filtro de Hamilton (1989)[2]:

$$\mathbf{r} \sim \Phi(\mathbf{m}, \mathbf{C}) = \Phi(\mathbf{m}_S, \mathbf{C}_S) \tag{4}$$

[2] No se emplean las propuestas de cómo el modelo auto regresivo de umbrales (Threshold Autoregresive o TAR) de Tong (1983, 1990) debido a que, para cada activo del portafolio, el régimen de volatilidad en el que se encuentra en el tiempo t, es algo desconocido o latente. Al menos se sostendrá este supuesto en el presente trabajo.

En la expresión anterior, se tiene el cálculo de la fdp ya no como una combinación o mezcla de probabilidades gaussianas; sino como un proceso dado por un vector de medias $\mathbf{m}_S$ y una matriz de covarianzas $\mathbf{C}_S$ observados en dos regímenes de volatilidad diferentes. Para fines prácticos del presente trabajo, se entenderá que la población de la serie de tiempo de los activos financieros de interés en un portafolio proviene de un régimen de baja volatilidad (S=1) o de uno de alta (S=2).

Es importante observar que para poder llegar a un cálculo de probabilidades incorporando efectos de cambio de régimen como el descrito en (4), se requiere ya no un vector de medias como el que se lograría con las propuesta de Hamilton (1989); sino también de una matriz de covarianzas que incorpore, tanto en su diagonal como en los elementos no diagonales, el mismo efecto de cambio de régimen en las volatilidades y conglomerados de correlaciones.

De lograrse la misma, se tendría un insumo importante para poder realizar el análisis y selección de portafolios. Esto es así ya que, como es bien sabido, cuando los activos financieros se encuentran en periodos propios de un régimen de alta volatilidad (S=2), la correlaciones de los mismos tienden a incrementarse y a tener el mismo signo o dirección. Como resultado, se tienen matrices de covarianzas diferentes que hacen que el diseño óptimo de un portafolio para los inversionistas sea diferente en el tiempo. De tenerse dicha matriz de covarianzas $\mathbf{C}_S$, se tendrían modelos de valuación de riesgos más apegados a la realidad del contexto o régimen de volatilidad en t, lo que llevaría a mejoras en la administración de riesgos inversiones de los inversionistas en general. Dos propuestas que resuelven esta necesidad son las realizadas por Pelletier (2006) y Haas (2010), las cuales demuestran una superioridad para capturar el efecto de conglomerado de correlaciones en el comportamiento de tipos de cambio (con dos y tres regímenes de comportamiento), así como en acciones y bienes raíces a nivel internacional. A pesar de lo idóneo de estas propuestas, se tiene la limitante de que las mismas buscan resolver un problema de dimensión N. Esta situación, tal como la expone Alexander (2002), tiene la dificultad de tener superficies o hiperplanos con soluciones no factibles o no convergentes o incluso con múltiples máximos locales. Dado esto, se ve de oportunidad realizar problemas de reducción a la dimensión del problema a resolver por lo que se procederá entonces a realizar la propuesta teórica que busca solventar esta situación.

2. Propuesta del modelo ortogonal de cambios de régimen.

Siguiendo el caso de un modelo de una función de probabilidad dada por una combinación gaussiana o *normal mixture* (NM), que es un caso particular de un modelo MS, y ante la necesidad previamente citada, se pueden tener, para el caso multivariado con dos regímenes de volatilidad (que puede fácilmente ser generalizado para S>2 regímenes) dos vectores de rendimientos esperados y dos matrices de covarianzas. Esto tal como se plantea en. Estos parámetros son de interés ya que, como se expresó en el apartado anterior, son los insumos para la valuación y selección de portafolios o la administración de riesgos.

Para poder exponer la propuesta, se parte de la concepción de que las series de tiempo de un conjunto de activos ($\mathbf{r}$) se conforma de S=2 subconjuntos o regímenes de datos. Siendo cada dato, en cada uno de estos conjuntos, generado por dos procesos estocásticos con la misma función de probabilidad pero con dos parámetros diferentes que son, para este caso, dos vectores de rendimientos esperados (vectores de medias correspondientes cada una al régimen de alta y baja volatilidad) y dos matrices de covarianzas. Para los fines de interés, se supondrá que la función de probabilidad correspondiente a cada uno de los regímenes es una normal multivariada, dado el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{m}_S, \mathbf{C}_S\}$ y la definición de dos regímenes S=1 y S=2:

$$f\left(\mathbf{r}_t \mid S = j; \boldsymbol{\theta}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2} \left|\mathbf{C}_{S=j}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{r}-\mathbf{m}_{S=j}\right]' \mathbf{C}_{S=j}^{-1} \left[\mathbf{r}-\mathbf{m}_{S=j}\right]\right)} \tag{5}$$

Ahora, el hecho de que la observación de cada activo en $\mathbf{r}_t$ provenga de uno de los dos regímenes o subconjuntos se modela, para un modelo MS, a través de un proceso markoviano no observable con una fdp propia del proceso que tampoco es observable, misma que lleva a un nivel de probabilidad de suceso:

$$\xi_s = P\left(s = j \mid \boldsymbol{\theta}\right) \tag{6}$$

Partiendo de (6) y (7) se tiene la función de probabilidad incondicional del proceso estocástico, misma que se maximizará para obtener el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{m}_S, \mathbf{C}_S, \xi_S\}$

$$f\left(\mathbf{r}_t; \boldsymbol{\theta}\right) = \sum_{s=j}^{S} \frac{\xi_s}{\left(2\pi\right)^{n/2} \left|\mathbf{C}_{s=j}\right|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{r}-\mathbf{m}_{s=j}\right]' \mathbf{C}_{s=j}^{-1} \left[\mathbf{r}-\mathbf{m}_{s=j}\right]\right)} \tag{7}$$

La función anterior se resuelve, en términos netamente teóricos, con el siguiente problema de optimización:

$$\arg\min_{\boldsymbol{\theta}} \ \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \log\left(\sum_{t=1}^{T} f(\mathbf{r}_t;\boldsymbol{\theta})\right) \tag{8}$$

Sujeto a:

$1)\sum \xi_s = 1$

$2)\xi_s \geq 0$

La resolución de (8) implica derivar las condiciones de primer e incluso de segundo orden aplicables a problemas de optimización de esta naturaleza. Como se ha mencionado, hay dos propuestas (Haas, 2010; Pelletier, 2006) que dan solución aproximada al mismo. Sin embargo, se tiene la limitante de la dimensión y de la capacidad computacional requerida para resolverlo. Esto de manera complementaria a la factibilidad del problema a resolver. Ante esta limitante, se presenta una solución potencial empleando el teorema de la descomposición espectral de una matriz cuadrada semi-definida positiva como es la de covarianzas. Ante esto, si trabajamos con residuales determinados por $\mathbf{e} = \mathbf{r} - diag(\mathbf{m})$, llegamos a la matriz $N \times N$ de covarianzas $\mathbf{C}$ y a su descomposición espectral:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{E}' \tag{9}$$

En donde $\mathbf{E}$ es la matriz de los vectores característicos o eigenvectores y $\boldsymbol{\Lambda}$ el espectro o matriz de los correspondientes eigenvalores. Si ordenamos $\boldsymbol{\Lambda}$ con el eigenvalor más grande en la entrada diagonal superior izquierda y el eigenvalor más pequeño en la inferior derecha, llegamos a un espectro $\boldsymbol{\Lambda}_P$. Y a re expresar (9) sin cambiar el resultado en $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_P\boldsymbol{\Lambda}_P\mathbf{E}_P' \tag{10}$$

A su vez, si ordenamos $\mathbf{E}$ de manera que cada columna de eigenvectores corresponda a su eigenvalor en $\boldsymbol{\Lambda}_P$, llegamos a la matriz $\mathbf{E}_P$. Si multiplicamos esta última por la variable vectorial o matriz de rendimientos (o en este caso residuales), llegamos a la definición de los N componentes principales (1901).

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}\mathbf{E}_P \tag{11}$$

Como es bien conocido, la matriz de varianzas de (11) es $\boldsymbol{\Lambda}_P$ y también se sabe que $\mathbf{P}$ se integra de variables ortogonales ya que $\mathbf{E}_P$ se compone de la yuxtaposición de vectores con esta

propiedad. Es decir, sin covarianza[3]. Si se aplicara el problema dado en (8) para cada uno de los componentes principales de (11), se tendría la siguiente definición de espectro para el caso de un proceso estocástico con dos regímenes[4]:

Definición 1: Si se aplica un análisis de cambios de régimen a través del filtro de Hamilton a cada uno de los componentes principales derivados con (11), se llegaría a un espectro con los eigenvalores correspondientes a la volatilidad $\lambda_{i,s=j}$ correspondiente al régimen S en el que el i-ésimo componente principal se encuentra. Esto dado un nivel de probabilidad c (por lo general de 50% o 51%):

$$\mathbf{\Lambda}_{MS} = \begin{bmatrix} \lambda_{i,s=j} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i,s=j} \end{bmatrix}, \ \lambda_{i,s=j} = \begin{cases} \lambda_{i,s=2} \text{ si } P\left(s=j \mid s_{t-1}=j\right) > c \\ \lambda_{i,s=1} \text{ si } P\left(s=j \mid s_{t-1}=j\right) \leq c \end{cases} \tag{12}$$

Es importante señalar que $\mathbf{\Lambda}_{MS}$ está ordenada con el eigenvalor de mayor magnitud, dado el régimen S en la izquierda de su diagonal y el menor a la derecha. Esto en correspondencia al orden de los componentes principales que, según se expone en (11), se obtienen con una matriz de eigenvectores ordenada $\mathbf{E}_P$.

De manera análoga se puede tener una definición para la matriz de eigenvectores de un proceso markoviano con cambio de régimen.

Definición 2: De conocerse la matriz de covarianzas de cada uno de los regímenes, así como la probabilidad de que el i-ésimo componente principal se encuentre en el régimen S=j, se puede tener la siguiente matriz de eigenvectores ordenados en correspondencia a su eigenvalor en $\mathbf{\Lambda}_{MS}$:

$$\mathbf{E}_{MS} = \left\{\mathbf{e}_{i,S=j}\right\}, \ \mathbf{e}_{i,S=j} = \begin{cases} \mathbf{e}_{i,s=2} \text{ si } P\left(s=j \mid s_{t-1}=j\right) > c \\ \mathbf{e}_{i,s=1} \text{ si } P\left(s=j \mid s_{t-1}=j\right) \leq c \end{cases} \tag{13}$$

Las dos definiciones llevan la descomposición espectral de una matriz de covarianzas que incorpora el efecto de cambio de régimen en las varianzas y covarianzas.

Definición 3: Partiendo de una matriz de eigenvectores $\mathbf{E}_{MS}$ y un espectro $\mathbf{\Lambda}_{MS}$ que contemplan el efecto de cambio de régimen en las series de tiempo, se llega a la matriz de varianzas y

[3] Esto ayudará a que (8) ya no es un problema n-dimensional; sino n problemas unidimensionales.
[4] La misma puede generalizarse para el caso más de dos regímenes.

covarianzas que incorpora el efecto de cambio de régimen con modelos markovianos (*MS*) dada por la siguiente descomposición espectral:

$$\mathbf{C}_{MS} = \mathbf{E}_{MS}\mathbf{\Lambda}_{MS}\mathbf{E}'_{MS} \tag{14}$$

La expresión de la última definición lleva a la matriz de covarianzas que interesa. Sin embargo, para derivar las magnitudes de los escalares de $\mathbf{E}_{MS}$ y $\mathbf{\Lambda}_{MS}$ deberían conocerse las matrices de covarianzas de cada uno de los S regímenes que interesan. Como se desconocen las mismas, se puede realizar la siguiente proposición que definirá el cálculo de la matriz de covarianzas con cambios de régimen, al aplicar el filtro de Hamilton (1989) a los componentes principales determinados con (11).

Proposición 1: Sea $\mathbf{C}_{MS}$ la matriz de covarianzas de una variable vectorial o matriz $\mathbf{r}$ de series de tiempo de los rendimientos o variaciones porcentuales del precio de N activos, misma que incorpora el efecto de cambios de régimen en el proceso estocástico a través de un proceso markoviano. La misma puede determinarse con la matriz de eigenvectores $\mathbf{E}_P$ de la descomposición espectral dada en (10) y la matriz de eigenvalores (espectro) con cambios de régimen de los componentes principales de la **definición 1** dada en (12):

$$\mathbf{C}_{MS} \approx \mathbf{E}_P\mathbf{\Lambda}_{MS}\mathbf{E}'_P \tag{15}$$

Demostración: Para probar (15) se parte de la función de densidad de probabilidad incondicional dada en (7) que lleva al definición de la matriz de covarianzas como sigue:

$$\mathbf{C} = \sum_{S=1}^{S} \xi_S \left(\mathbf{E}_{P,S}\mathbf{\Lambda}_{P,S}\mathbf{E}'_{P,S} \right) \tag{16}$$

En donde $\mathbf{E}_{P,S}$ es el vector de eigenvectores correspondiente al régimen S, mismo que se desconoce (al desconocerse la matriz de covarianzas del régimen S) cuyo orden descendente se da (de izquierda a derecha) con la correspondencia de los eigenvalores de $\mathbf{\Lambda}_{P,S}$. Esta última matriz es un espectro ordenado (como $\mathbf{\Lambda}_S$) que contiene los eigenvalores o varianzas de los componentes principales correspondientes a cada régimen S. Como se puede apreciar, dicha expresión es similar a la de un modelo NM (mezcla de probabilidades como un Normal Mixture NM), en donde es fija la probabilidad ξ_S de que las observaciones en t de $\mathbf{r}$ vengan de un determinado régimen S. Una de las notorias diferencias del modelo NM con el MS de Hamilton

(1989), radica en que el último relaja el supuesto de ξ_S sea fijo para permitir que éste sea cambiante en el tiempo e incluso tenga una matriz de probabilidades de transición $\mathbf{\Pi}$ entre regímenes[5]. Bajo el supuesto de que ninguno de los estados o subconjuntos de datos de cada régimen en el proceso markoviano sea absorbente (es decir que $\xi_S < 1$), se puede expresar que (16) lleva al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \sum_{S=1}^{S} \xi_S \left(\mathbf{E}_{P,S} \mathbf{\Lambda}_{P,S} \mathbf{E}'_{P,S} \right) = \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right)' \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \mathbf{E}'\end{aligned} \tag{17}$$

Para poder llegar a la definición de $\mathbf{C}_{MS}$ dada en (15), se observa que se debería tener conocimiento de la matriz de eigenvectores ($\mathbf{E}_{MS}$)[6] del régimen S, dada en la definición 2 así como su correspondiente espectro dado en la definición 1.

De conocerse tanto $\mathbf{E}_{MS}$ como $\mathbf{\Lambda}_{MS}$ se podría llegar directamente a la definición de una matriz de covarianzas que incorpore cambios de régimen en las varianzas y covarianzas de la definición 3 expresada en (14). Desafortunadamente, para conocer $\mathbf{E}_{MS}$ debería conocerse *a priori* la matriz de covarianzas del régimen S=1 y la de S=2 para hacer las descomposiciones espectrales correspondientes. Desafortunadamente estas son las que se busca derivar dado el régimen de volatilidad observado en t. Como desafortunadamente esta matriz de eigenvectores también se desconoce y solo puede inferirse $\mathbf{\Lambda}_{MS}$ directamente de los componentes principales derivados con (11), es de necesidad tener una aproximación de $\mathbf{E}_{MS}$ bajo el siguiente supuesto que parte del resultado dado en (17):

Supuesto 1:

$$si\ \mathbf{C} = \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right)' = \mathbf{E}_P \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \mathbf{E}'_P \Rightarrow \mathbf{E}_{MS} \approx \sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_S = \mathbf{E}_P \tag{18}$$

De manera complementaria, se tendrá el siguiente supuesto adicional:

[5] Para fines de exposición en la propuesta se obviará el empleo de esta matriz de probabilidades de transición.

[6] Para fines consistencia con la notación de dicha definición ahora se entenderá que $\mathbf{E}_{P,S} = \mathbf{E}_{MS}$.

Supuesto 2: dada la probabilidad ξ_S de estar en un determinado régimen, el espectro no será una combinación lineal de los eigenvalores (espectros) de cada régimen, dada su probabilidad de estar el determinado régimen; sino que será el espectro dado en la definición 1:

$$\left(\sum_{S=1}^{S}\xi_S\mathbf{\Lambda}_{P,S}\right)\approx\mathbf{\Lambda}_{MS} \tag{19}$$

Si incorporamos estos dos supuestos en términos de la descomposición espectral dada en (14) con la definición 3, se llega al resultado de la presente proposición que, partiendo del conocimiento de los componentes principales, define el cálculo de una matriz de covarianzas que incorpora el efecto de cambios de régimen en las varianzas y covarianzas:

$$si\ \left(\sum_{S=1}^{S}\xi_S\mathbf{\Lambda}_{P,S}\right)\approx\mathbf{\Lambda}_{MS}\ \text{y}\ \mathbf{E}_{MS}\approx\mathbf{E}_P\Rightarrow\mathbf{C}_{MS}\approx\mathbf{E}_P\mathbf{\Lambda}_{MS}\mathbf{E}_P^{'}\quad\blacksquare$$

La validez de esta proposición depende de que se cumplan cuatro cosas:

1. La validez del supuesto 1. Es decir que la matriz de eigenvectores $\mathbf{E}_P$ sea una adecuada aproximación de la matriz de eigenvectores $\mathbf{E}_{MS}$ y, como consecuencia que $\mathbf{C}_{MS}$ se aproxime con la mayor precisión posible a su verdadero valor teórico.
2. La validez del supuesto 2. Esto significa que la aproximación del espectro dado por la combinación lineal de los eigenvalores de cada régimen dada la probabilidad de estar en cada uno, sea válida y debidamente cuantificada por $\mathbf{\Lambda}_{MS}$.
3. De que el filtro de Hamilton (1989) sea una adecuada herramienta para aproximar la probabilidad de que cada i-ésimo componente principal se encuentre en el régimen S=j.
4. Que no se tengan problemas de discordancia en las probabilidades de estar en el régimen S=j. Es decir que, conociendo *a priori* que la matriz de covarianzas es la correspondiente a un régimen S=j, la probabilidad de que todos los componentes principales se encuentren en S=j sea la que debe ser y no que se calcule una probabilidad alta de estar en el régimen S=k cuando el verdadero régimen es S=j.

   De cumplirse estas cuatro circunstancias, se estaría en una factibilidad material de implementar la propuesta teórica presentada.

Dado que tanto como el primero como segundo supuesto deben verificarse en la realidad, es de necesidad establecer una definición que relaje alguno de estos. La primera opción sería relajar el primero pero, dada la demostración de la proposición 1, se entiende que la matriz de eigenvectores observada es una combinación de los eigenvectores de cada régimen. Como estos son desconocidos, el relajar este supuesto representa una limitante. Sin embargo, el segundo sí puede ser relajado. Situación que lleva a la siguiente proposición adicional:

Proposición 2: De conocerse la matriz de covarianzas de cada uno de los regímenes y partiendo de la demostración dada para la proposición 1, se puede definir el espectro de como una combinación lineal de los eigenvalores de cada régimen, ponderada por la probabilidad de estar en cada régimen:

$$\mathbf{\Lambda}_{MS} = \sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \tag{20}$$

Demostración: Se parte de lo expuesto en (17) dentro de la demostración de la proposición 1, la cual lleva al supuesto 2. Dado esto, en lugar de sustituir el espectro de la definición 2, se sustituye el previamente descrito en la descomposición espectral dada en (15)

$$\text{si } \mathbf{C}_{MS} \approx \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{E}_{P,S} \right)' \text{ y } \mathbf{E}_{MS} \approx \mathbf{E}_P \mathbf{C}_{MS} \Rightarrow \mathbf{C}_{MS} \approx \mathbf{E}_P \left(\sum_{S=1}^{S} \xi_S \mathbf{\Lambda}_{P,S} \right) \mathbf{E}_P' \tag{21}$$

■

Como puede apreciarse, en la búsqueda que se tiene de un método de cálculo de una matriz de covarianzas que incorpore el efecto de cambios de régimen de volatilidad, se tienen dos métodos aproximados pero a la vez diferentes de calcular la misma. Ambos incorporan el supuesto 1 de la proposición 1. Esto es, se desconoce la matriz de eigen vectores de los dos regímenes pero se aproxima con la derivada de la descomposición de una matriz de covarianzas calculada de la forma convencional. Sin embargo, el primer método de cálculo (dado con la proposición 1) incorpora el supuesto 2 y el segundo método (dado con la proposición 2) la relaja y emplea el cálculo del espectro en la forma dada por (21). Ante esto, es de interés conocer cuál de los dos métodos, ante una generación de rendimientos

aleatorios[7] de los activos financieros de un portafolio determinado, es el más adecuado para los fines buscados. Esto es: aproximar adecuadamente la matriz de covarianzas de cada régimen de volatilidad. Dada esta necesidad teórica que resulta de las dos propuestas realizadas, se procederá a la demostración empírica de las mismas.

3. Demostración empírica de la propuesta realizada.

Para demostrar que los tres requerimientos previamente citados se cumplen, se realizaron simulaciones Monte Carlo con T=2500 días (equivalentes a aproximadamente 7 años), mismas que incorporan el cambio de régimen en un proceso estocástico con 2 regímenes. Los pasos que se realizaron en el algoritmo de simulación se presentan de manera general:

1. Como nota metodológica inicial se observa que, en cada simulación, se crearon tres portafolios de activos financieros ficticios, cuyas series de tiempo se generaron de manera aleatoria, incorporando dos regímenes de volatilidad diferentes cuya probabilidad de estar en un régimen u otro en t se modela según se propone en Alexander (2008). Estos tres portafolios difieren en el número de activos que son 3, 10 y 30 respectivamente.
2. De las series de tiempo de los activos de cada portafolio, generadas aleatoriamente, se derivaron dos matrices de covarianzas. Una para cada régimen. Con esto se solventa, a nivel simulación, la carencia teórica que tiene la descomposición espectral dada en la definición 3 presentada con (14).
3. Una vez que se calcularon las N series de tiempo de cada portafolio, se calculó una matriz de covarianzas $\mathbf{C}$. Esta corresponde a las covarianzas de las variaciones porcentuales de los activos durante todo el periodo simulado, mismo que tiene datos de ambos regímenes de volatilidad. De la misma se obtuvo la descomposición espectral dada en (9) y, con esto, los N componentes principales empleando (11). Una vez que se tienen los mismos, se aplicó el filtro de Hamilton (1989), al resolver el problema dado en (8) cada componente principal. Con esto se obtuvo y se realizó el cálculo de con la descomposición espectral dada en (15).
4. Con lo anterior, se calculó $\mathbf{C}_{MS}$ con los dos métodos dados en las propuestas 1 y 2. Es decir, se calculará una matriz de covarianzas con cambio de régimen que incluye los dos supuestos de la proposición 1 (ésta se denominará MSOCOVARD) y otra (denotada como

[7] El objetivo del trabajo es verificar la factibilidad material, en términos netamente teóricos, dejando la utilidad práctica en trabajos futuros.

MSOCOVARS) que relajará el segundo supuesto y aproximará el espectro de cambios de régimen como una combinación lineal de los eigenvalores de cada régimen, al emplear el método propuesto en (21). Para obtener ambas matrices de covarianzas, se emplearon en un primer escenario todos los componentes principales determinados para la matriz de covarianzas $\mathbf{C}$ calculada en el paso 3.

5. De manera complementaria se calcularon matrices de covarianzas que empleen las proposiciones 1 y 2 pero en lugar de utilizar todos los componentes principales de la matriz de covarianza $\mathbf{C}$ del paso 3, se empleó solamente el primero. Es decir, aquél que tiene, de la variabilidad total de las variables (léase el eigenvalor), el valor (eigenvalor) más grande de todos. Esto es así para tener una idea general del impacto de una reducción drástica de la dimensionalidad del problema. Cada matriz se denotó, de manera correspondiente al espectro empleado, como MSOCOVARD1PC y MSOCOVARS1PC respectivamente.
6. Una vez que se calculó $\mathbf{C}_{MS}$ con los dos métodos y la cantidad de componentes principales previamente indicada, se comparó si la matriz de covarianzas determinada es igual a la matriz $\mathbf{C}_{S=1}$ o $\mathbf{C}_{S=2}$. Esto según el régimen de volatilidad en el que, según determinó el simulador, se encuentran las series de tiempo en el periodo t=T. Para hacer esto se calculó la varianza del portafolio σ^2_{portMS} de los N activos que se obtendría con $\mathbf{C}_{MS}$, así como la varianza σ^2_0 que se observaría en el portafolio de referencia al utilizar ya sea $\mathbf{C}_{S=1}$ o $\mathbf{C}_{S=2}$. Esto a través de la siguiente expresión dado un vector $\mathbf{w}$ de niveles de inversión equiponderado (es decir $\mathbf{w}=\left[w_1,...,w_N\right]'$, $w_i=1/N$):

$$\sigma^2_{portMS}=\mathbf{w}'\mathbf{C}_{MS}\mathbf{w}$$
$$\sigma^2_0=\mathbf{w}'\mathbf{C}_S\mathbf{w},\ \mathbf{C}_0=\begin{cases}\mathbf{C}_{S=1}\ \text{si S=1}\\ \mathbf{C}_{S=2}\ \text{si S=2}\end{cases}$$

7. La hipótesis nula a demostrar es que las dos varianzas de los dos portafolios son iguales, a través del siguiente estadístico:

$$EP=\frac{\sigma^2_{portMS}\left(T-1\right)}{\sigma^2_0},\ EP\sim X^2_{i,GL=T-1} \tag{22}$$

Dado esto y para demostrar que la hipótesis nula se cumple se realizará, para cada simulación realizada en cada portafolio, la siguiente regla de contraste:

$$\text{Aceptar } H_0 \Leftrightarrow LI < X^2_{i,GL=T-1} < LS, LI = 1\%,5\%,10\%\ LS = 99\%,95\%,90\% \quad (23)$$

8. Éste procedimiento de calcular las variables vectoriales para N=3, 10 y 30 activos financieros (mismas que incorporen el cambio de régimen), así como el cálculo de σ^2_{portMS} y su contraste con σ^2_0 a través de (22), se realizó 350 veces[8]. A continuación se presentan los resultados logrados.

4. Resultados de las simulaciones.

Tabla 1 Resumen de los cálculos de las probabilidades de que la matriz de covarianzas con 3 activos financieros calculada, sea igual a la que teóricamente se observe en t, dado el régimen de volatilidad en que se encuentran las series de tiempo simuladas.

	MSOCOVARD	***MSOCOVARS***	***MSOCOVARD1PC***	***MSOCOVARS1PC***
Parámetro	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***
Media	49.3238%	74.0752%	4.3581%	8.6483%
Desv. Est.	45.9633%	41.7951%	19.7823%	27.3909%
Min	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Máx	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%
Percentil(5%)	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Percentil(95%)	100.0000%	100.0000%	100.0000%	100.0000%

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

En la tabla 1 se exponen los resultados del valor promedio de la probabilidad del estadístico dado en (22) para el portafolio simulado con 3 activos. En cada columna se expone el valor promedio de la probabilidad calculada cada portafolio simulado, así como su desviación estándar. En este primer resultado, es de interés resaltar que, al emplear todos los componentes principales, se llegó a matrices de covarianzas que, en promedio, muestran probabilidades aceptables de que la matriz de covarianzas derivada con el método propuesto sea igual a la que teóricamente debería existir según en el régimen de volatilidad en t.

[8] Esto se debe a cuestiones computacionales ya que se calculó 43 veces el filtro de Hamilton y, aunque se está trabajando en un código con mejoras informáticas que permitan procesar más simulaciones, la capacidad física y de cálculo permite solo lograr 400 simulaciones.

Tabla 2 Resumen de los cálculos de las probabilidades de que la matriz de covarianzas con 10 activos financieros calculada, sea igual a la que teóricamente se observe en t, dado el régimen de volatilidad en que se **encuentran las series de tiempo simuladas.**

	MSOCOVARD	***MSOCOVARS***	***MSOCOVARD1PC***	***MSOCOVARS1PC***
Parámetro	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***
Media	49.1667%	74.2373%	0.0000%	0.9638%
Desv. Est.	45.9069%	43.1283%	0.0000%	9.0285%
Min	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Máx	100.0000%	100.0000%	0.0000%	100.0000%
Percentil(5%)	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Percentil(95%)	100.0000%	100.0000%	0.0000%	0.0000%

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Tabla 3 Resumen de los cálculos de las probabilidades de que la matriz de covarianzas con 30 activos financieros calculada, sea igual a la que teóricamente se observe en t, dado el régimen de volatilidad en que se encuentran las series de tiempo simuladas.

	MSOCOVARD	***MSOCOVARS***	***MSOCOVARD1PC***	***MSOCOVARS1PC***
Parámetro	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***	***M6 test***
Media	49.9507%	77.1215%	0.3416%	0.3416%
Desv. Est.	44.4464%	41.3571%	3.6784%	3.6784%
Min	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Máx	100.0000%	100.0000%	39.8460%	39.8460%
Percentil(5%)	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%
Percentil(95%)	100.0000%	100.0000%	0.0000%	0.0000%

Fuente: Elaboración propia con datos de las simulaciones.

Es de importancia resaltar que, cuando se relaja el supuesto 2. Es decir, cuando se emplea el espectro dado en (20) para la proposición 2, se tiene una probabilidad promedio mayor de que las matrices de covarianzas sean iguales. Sin embargo, a pesar de esto las probabilidades promedio se encuentran dentro de la regla de aceptación dada en (23). Por otro lado, el emplear solo el primer componente principal lleva a probabilidades de igualdad notablemente inferiores, por lo que se debe trabajar esta situación con una cantidad más aceptable de componentes principales, misma que permita ser representativa de la variabilidad total pero que lleve a una reducción significativa de la dimensionalidad del problema. Esto, como se describirá en breve, puede ser tema de trabajos de investigación complementarios.

En las tablas 2 y 3 se expone el mismo análisis pero ahora aplicado a portafolios con 10 y 30 activos respectivamente.

Como se puede apreciar, se llegan a resultados similares a la tabla 1, para el caso de los portafolios que emplean todos los componentes principales y las matrices MSOCOVARD y MSOCOVARS. Para el caso de las matrices que emplean solo el primer componente principal, se notan drásticas reducciones en la probabilidad promedio. Esto es así ya que, debido a un bien conocido resultado del análisis de componentes principales y al tener una mayor dimensión en la matriz de covarianzas, la capacidad de explicación del primer componente principal es significativa pero menor.

Para tener una interpretación más puntual de los resultados expuestos, se realizó un análisis del conteo del número de veces que, en el total de las 350 simulaciones de los tres portafolios, se aceptó la hipótesis nula dada en (23). Esta se contrastó con el valor crítico inferior (para niveles de significancia α de 10%, 5% y 1% respectivamente) de una distribución de probabilidad binomial, dados los 350 intentos o simulaciones y una probabilidad de suceso del 50%. Es decir, se tienen 50% de probabilidades de que la matriz de covarianzas calculada sea igual o no. Los resultados para los tres portafolios se exponen en las tablas cuatro, cinco y seis respectivamente. Como se puede apreciar, el número de veces en que las matrices de covarianzas que emplean MSOCOVARD y MSOCOVARS son iguales a la que teóricamente corresponde al régimen de volatilidad observado en T=t, es bajo. Esto en relación al conteo esperado en el valor crítico. Sin embargo, es de importancia observar algo de interés: el conteo es muy aproximado al valor crítico dado con un nivel de significancia α de 1%.

Las razones de estos resultados, son causa de un trabajo de investigación en curso ya que se sospecha que la concordancia o validez del requerimiento 4 para que ambos modelos de cálculo de coavarianzas sea válido: "*Que no se tengan problemas de discordancia en las probabilidades de estar en el régimen S=j. Es decir que, conociendo a priori que la matriz de covarianzas es la correspondiente a un régimen S=j, la probabilidad de que todos los componentes principales se encuentren en S=j sea la que debe ser y no que se calcule una probabilidad alta de estar en el régimen S=k cuando el verdadero régimen es S=j.*" A pesar de esto, es de interés resaltar que, el empleo de la matriz MSOCOVARD. Es decir, calcular una matriz de covarianzas que contemple el efecto de cambio de régimen de volatilidad empleando los dos supuestos implícitos en la

proposición 1, lleva a resultados superiores y aceptables en el desempeño teórico esperado del modelo propuesto.

5. Conclusiones.

El presente trabajo tiene implicaciones más teóricos que empíricos. El mismo se enfoca a abordar la necesidad de métodos de cálculo de matrices de covarianzas, mismas que incorporen el efecto de cambio de régimen en la volatilidad y conglomerado de correlaciones. Dado que hoy en día no se tienen dichas propuestas, el presente expone dos propuestas o métodos de cálculo que aplica el filtro de Hamilton (1989) en los componentes principales y se enfoca a demostrar, en un contexto netamente teórico a través de simulaciones Monte Carlo, la validez teórica de los métodos empleados.

Después de hacer la propuesta teórica y demostrar axiomáticamente el sustento de la misma, se procedió a realizar 350 simulaciones Monte Carlo de las series de tiempo de tres portafolios con 3, 10 y 30 activos. Esto simulando, para cada activo, 2,500 días (aproximadamente 7 años) de observaciones en donde se tienen cambios de régimen de volatilidad (dos regímenes, uno de alta y otro de baja), los cuales se simulan por medio de un proceso markoviano de cambio de régimen. Esto tal como se propone en Alexander (2008).

Para poder calcular las matrices de covarianzas, se emplearon dos métodos. Uno de ellos que emplea la descomposición espectral de una matriz de covarianzas convencionales, sustituyendo el espectro original con un espectro que tenga los eigenvalores de un régimen de alta o de baja volatilidad. Esto según la probabilidad de estar en dicho régimen, determinada con el mencionado filtro de Hamilton. En el segundo método el espectro que se emplea tiene una combinación lineal de los eigenvalores de los S regímenes, ponderada por la probabilidad de estar en dicho régimen.

En base a las simulaciones logradas, se observó que el primer método que emplea los eigenvalores de un régimen de alta o baja volatilidad determinados con el filtro de Hamilton tiene una mejor bondad de ajuste al comparar la varianza que se cuantificaría en el portafolio simulado empleando el mismo, en comparación con la de un portafolio que emplea la verdadera matriz de covarianzas del régimen S en t.

A pesar de esto, se observa que el modelo propuesto tiene alguna deficiencias asintóticas en su validez práctica. Esto es, el número de veces en las que la matriz de covarianzas calculada es igual a la real, es marginalmente bajo al mínimo esperado a nivel poblacional. Esto se debe, potencialmente, a que el método empleado puede tener algunos errores para determinar si

realmente las covarianzas de los activos de un portafolio están en el régimen S=1 o S=2. Esto, así como la validez práctica de la propuesta realizada en el presente, son trabajos que se están realizando como parte de los trabajos del proyecto.

Bibliografía

Akgiray, V. (1989). Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts. *The Journal of Business*, 62 (1): 55.

Alexander, C. (2002). Principal component models for generating large GARCH covariance matrices. *Economic Notes*, 31 (2): 337–359.

Alexander, C. (2008). *Market risk analysis II: Practical Financial Econometrics*. Hoboken: John Wiley & Sons Inc.

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autorregresive Conditional Hetersoskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (3): 307–327.

Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates : A multivariate generalized ARCH model. *The Review of Economics and Statistics*, 72 (3): 498–505.

Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50 (4): 987–1007.

Engle, R., & Kroner, K. (1993). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11 (1): 122–150.

Fama, E. F. (1963). Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis. *The Journal of Business*, 36 (4): 420–429.

Haas, M. (2010). Covariance forecasts and long-run correlations in a Markov-switching model for dynamic correlations. *Finance Research Letters*, 7 (2): 86–97.

Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*, 57 (2): 357–384.

Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton: Princeton university press.

López, F. (2004). Modelado de la volatilidad y pronóstico del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores. *Contaduría Y Administración UNAM*, (213): 43–72.

López, F., & Benavides, D. (2010). El efecto enero en las principales bolsas latinoamericanas de valores. *Contaduría Y Administración UNAM*, (230): 25–46.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7 (1): 77–91.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection. Efficient diversification of investments*. New Haven: Yale University Press.

Pearson, K. (1901). On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, 2 (7-12): 559–572.

Pelletier, D. (2006). Regime switching for dynamic correlations. *Journal of Econometrics*, 131 (1-2): 445–473.

Perry, P. R. (1982). The Time-Variance Relationship of Security Returns: Implications for the Return-Generating Stochastic Process. *Journal of Finance*, 37 (3): 857–870.

Tong, H. (1983). *Threshold models in nonlinear time series analysis*. New York: Springer-Verlag.

Tong, H. (1990). *Nonlinear time series: A dynamical systems approach*. Oxford: Oxford university press.

West, K. D., & Cho, D. (1995). The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility.pdf. *Journal of Econometrics*, 69 (1): 367–391.

CAPÍTULO XXXIII

La versión fuerte del principio de Paridad del Poder de Compra: Evidencia para América Latina.

Domingo Rodríguez Benavides

Instituto Politécnico Nacional

Francisco López Herrera

Universidad Nacional Autónoma de México

Miguel Ángel Martínez García

Instituto Politécnico Nacional

Resumen

En este trabajo sometemos a prueba la versión débil del principio de paridad del poder adquisitivo (PPP) la cual sostiene que el tipo de cambio nominal es proporcional a la razón de precios domésticos y externos. A partir de una muestra de datos de 17 países de América Latina, aplicamos pruebas de raíces unitarias y de cointegración en panel a los paneles conformados por tales series. En virtud de que las prueba de raíces unitarias y de panel muestran evidencia de que las series del tipo de cambio nominal y los precios relativos poseen raíces unitarias y están cointegrados, estimamos las pendientes, individuales y de panel, con los estimadores propuestos por Pedroni (1999 y 2001). Los resultados sugieren el cumplimiento de la versión débil del PPP para la muestra de países de América Latina bajo estudio.

Palabras Clave: Paridad de poder de compra, pruebas de raíces unitarias y de cointegración en panel, América Latina.

Clasificación JEL: F31, N26.

1 Introducción

La ley de un solo precio se cumple para un bien en un grupo de países si su precio es el mismo en todos esos países cuando se expresan en una moneda común. Si consideramos una

cesta de bienes, es posible establecer diferentes nociones del principio de paridad de poder adquisitivo (PPP por sus siglas en inglés). Si E_{it} es el tipo de cambio nominal de la moneda del país i con relación a la moneda del país base, P_{it} el precio de la cesta de bienes en el país i y P_t^* el precio de la misma cesta de bienes en el país base, entonces el tipo de cambio real para la cesta de bienes referida se define como:

$$Q_{it} = \frac{E_{it} P_t^*}{P_{it}} \qquad (1)$$

Las cestas de bienes generalmente empleadas consisten en bienes del consumidor o bienes transables. La versión fuerte del PPP se mantiene si el tipo de cambio real es igual a 1; el cumplimiento de esta versión requiere que la cesta de bienes considerada sea la misma en todos los países. Debido a la dificultad para analizar una cesta de bienes homogénea para todos los países, en general se utiliza la versión fuerte del PPP para estudiar y comparar los precios de bienes individuales y de cestas de bienes.

La forma común de probar la versión fuerte del PPP en un modelo panel es a través de la siguiente ecuación:

$$s_{it} = \alpha_i + \beta_i p_{it} + u_{it} \qquad (2)$$

Donde s_{it} es el logaritmo bilateral del tipo de cambio nominal con respecto a los Estados Unidos, p_{it} es el logaritmo de la razón de precios agregado en términos de los índices de precios al consumidor entre dos países. El cumplimiento de la versión fuerte del PPP requiere que s_{it} y p_{it} estén cointegrados y que la pendiente estimada para cada unidad del panel considerado, β_i, sea igual a 1, de esta manera la hipótesis nula de interés es $H_0 : \beta_i = 1$ para todo i, Pedroni (2001).

En la búsqueda de evidencia que soporte la versión débil del PPP algunos autores argumentan que a pesar de que exista tendencia del tipo de cambio nominal y de los precios relativos a moverse conjuntamente en equilibrio sobre largos periodos de tiempo, la relación no necesariamente es estrictamente proporcional. Diversas razones se han argumentado para explicar por qué no se puede cumplir la versión fuerte del PPP, entre las que destacan: *i*) diferencias en la composición de las cestas de bienes consideradas; *ii*) la inclusión de bienes

no-transables en las cestas; *iii*) costos de distribución; *iv*) mercados imperfectos y *v*) barreras comerciales (Burstein *et al*. 2005).

Por estas razones, en los análisis empíricos generalmente se utiliza una versión débil del PPP: el PPP se cumple para un grupo de países si el tipo de cambio real es estacionario. Si los precios y el tipo de cambio nominal poseen una raíz unitaria, entonces las desviaciones del PPP deben ser de un orden estocástico menor que aquellos. Una forma frecuente de probar la versión débil del PPP consiste en aplicar el logaritmo natural a la ecuación (1), con lo cual tenemos:

$$q_{it} = e_{it} + p_t^* - p_{it} \qquad (3)$$

Donde las letras en minúsculas indican el logaritmo natural de las variables correspondientes. Como parte de este procedimiento, se aplican pruebas de raíz unitaria o de estacionariedad a q_{it}, en el entendido de que el no rechazo de la hipótesis nula de raíz unitaria es evidencia en contra del PPP, mientras que el rechazo de esta hipótesis nula o el no rechazo de la hipótesis nula de estacionariedad es evidencia a favor del cumplimiento del PPP

No obstante, con el advenimiento de nuevos y más robustos procedimientos estadísticos, tanto a nivel univariado como multivariado, disponemos de mayor evidencia de largo plazo del PPP. En este contexto, existe un soporte adicional en favor de esta hipótesis permitiendo cambios estructurales. Así, se han propuesto versiones relajadas del PPP en las que el tipo de cambio real se considera estacionario alrededor de una media cambiante o bien en torno a una tendencia estacionaria con cambios en el nivel. Ventosa y Gómez (2013) resumen las distintas versiones intermedias del PPP que se han empleado y enfatizan la necesidad de interpretar correctamente los resultados en función de la versión econométrica empleada para probar el PPP.

Una de las desventajas de probar la hipótesis del PPP con pruebas univariadas de series de tiempo es que, a pesar de que en algunos casos se cuenta con series de tiempo largas, este tipo de pruebas sufre de distorsiones de tamaño (Engel, 2000). Por esta razón, en las últimas décadas en la literatura empírica se observa que la atención se ha centrado en las pruebas de raíces unitarias en panel en virtud de que estas últimas presentan distorsiones menos graves.

La velocidad de convergencia de la paridad del poder adquisitivo (PPP) es importante porque provee información sobre las rigideces nominales y sobre la importancia relativa de los choques nominales y reales en los modelos macroeconómicos internacionales.

En el presente trabajo proveemos evidencia sobre la versión fuerte del PPP para una muestra de 17 países de América Latina en el periodo 1960-2013, para tal fin efectuamos pruebas de raíces unitarias y de cointegración en panel del tipo de cambio nominal y de los precios relativos, una vez que las condiciones requeridas, la presencia de una raíz unitaria en ambas variables y que estas cointegren, empleamos el método propuesto por Pedroni (2001) para obtener los estimadores individuales y de panel de las relaciones de largo plazo.

Además de esta introducción, el presente trabajo se compone de la siguiente forma: el siguiente apartado provee una breve revisión de la literatura sobre los trabajos que han abordado el tema destacando el método empleado y sus principales resultados; en el tercer apartado presentamos la metodología econométrica empleada, la cuarta sección muestra los resultados y por último en la sección quinta se presentan las conclusiones.

2. Revisión de la Literatura

Un esfuerzo considerable se ha destinado con el fin de probar la hipótesis del principio de paridad del poder de compra en la literatura empírica sobre la macroeconomía internacional. Uno de los métodos econométricos que recientemente se han empleado para probar esta hipótesis lo constituyen los modelos panel, de manera particular los que se han desarrollado para analizar los paneles cointegrados, los cuales ponen énfasis en las propiedades de series de tiempo de paneles largos (*long panels*).

Diversos trabajos han intentado probar la validez de la forma débil del PPP empleando tanto técnicas de series de tiempo (Engel, 2000; Papell, 1997), como métodos de panel. Dentro de este último enfoque, Coakley y Fuertes (1997), Frankel y Rose (1996), Imbs *et al*. (2005), Lothian (1997), MacDonald (1996), Oh (1996) y Wu (1996) emplean pruebas de raíces unitarias en panel de primera generación. Una de las principales ventajas de emplear pruebas de raíces unitarias en panel en lugar de las de series temporales es el hecho de que las primeras sufren de distorsiones menos severas. Uno de los principales inconvenientes de las

pruebas de raíces unitarias en panel de primera generación es que se basan en el supuesto de independencia de las secciones cruzadas, el cual difícilmente se cumple en la práctica.

Wagner (2008) emplea pruebas de raíces unitarias en panel de primera y de segunda generación. Estas últimas están diseñadas para tomar en cuenta la posible dependencia existente entre las unidades de sección cruzada, y Wagner las aplica a distintos paneles que cubren diferentes periodos y regiones. Los resultados de Wagner (2008) destacan la presencia de componentes comunes no estacionarios en los distintos paneles de tipo de cambio real, además de términos idiosincráticos no estacionarios potencialmente correlacionados. Por lo tanto, Wagner no encuentra evidencia que apoye la hipótesis de PPP.

Hooi y Smyth (2007) emplean la prueba LM de raíz unitaria con una y dos rupturas, individual y en panel, para probar el PPP en el tipo de cambio real de 15 países asiáticos. Sus resultados de las pruebas de raíz unitaria univariadas LM encuentran evidencia del PPP para dos tercios de la muestra. Mientras que los resultados de la prueba de raíz unitaria LM de panel proveen fuerte evidencia en favor del cumplimiento del PPP en esos países. Adicionalmente, Hooi y Smyth (2007) afirman que los resultados obtenidos con la prueba de raíz unitaria del panel LM difieren de los obtenidos con otras pruebas de raíz unitaria en panel sobre el PPP para los países asiáticos que no permiten la existencia de cambios estructurales. No obstante, Hooi y Smyth (2007) no hacen mención alguna de la correcta interpretación de sus resultados, ya que al permitir cambios estructurales en media en las pruebas empleadas por ellos más bien están proveyendo evidencia no acerca del PPP sino de la versión intermedia Quasi/PPP.

Rogoff (1996) describe la paradoja del principio de paridad del poder de compra como la cuestión de cómo reconciliar la alta volatilidad experimentada por el tipo de cambio real a corto plazo con la convergencia extremadamente lenta al PPP. Revisando la literatura empírica, hasta principios del siglo XXI existía un "notable consenso" de 3-5 años de la vida media de las desviaciones de PPP en estudios que emplearon datos con series de tiempo que cubren un horizonte temporal amplio; se consideraba que el lapso de este consenso era aparentemente demasiado largo para ser explicado por las rigideces nominales (Murray y Papell, 2002).

Murray y Papell (2002) utilizan el coeficiente autorregresivo de las pruebas Dickey-Fuller (DF) y Dickey-Fuller Aumentada (ADF) tanto con series de tiempo largas anuales del tipo de cambio real como con datos trimestrales posteriores a 1973 de seis países: Canadá, Francia, Italia, Japón, Países Bajos y el Reino Unido. Con los datos anuales, el valor de la mediana de las estimaciones puntuales de las desviaciones de PPP de las regresiones univariadas es de 3.98 años, casi en el centro del rango de 3-5 años de Rogoff.

Con los datos posteriores a 1973, la vida media promedio resultó ser de 3.07 años, cerca del límite inferior del rango, pero aún dentro del consenso de Rogoff. Los límites de los intervalos de confianza de la mediana, sin embargo, especialmente con los datos posteriores a 1973, son demasiado amplios para ser confiables. En una extensión de este trabajo, Murray y Papell (2005) utilizan la prueba Dickey-Fuller en panel; en virtud de que en sus resultados no encuentran mucha diferencia con las estimaciones individuales sostienen que los paneles no ayudan a resolver la paradoja del PPP.

Guloglu *et al*. (2011) proveen evidencia sobre la validez de la Quasi Purchasing Power Parity para 18 series de tipo de cambio real de Turquía usando pruebas de raíces unitarias en panel con cambios tanto en la media como en la tendencia; sus resultados basados en series de tiempo largas encuentran evidencia de la validez de la quasi/PPP para la mayoría de los tipos de cambio reales bajo estudio y para la totalidad del panel también.

Su *et al*. (2012) aplican pruebas de raíces unitarias no lineales para investigar las propiedades de largo plazo del PPP en 15 países africanos. Los resultados empíricos de la raíz unitaria univariadas y en panel muestran evidencia de que el PPP no se cumple para estos 15 países estudiados. Sin embargo, las pruebas indican que el PPP tiene validez en cuatro de estos 15 países de acuerdo con el método de panel SUR empleado por los autores.

Månsson y Sjölander (2014) aplican una serie de pruebas de raíz unitaria del panel no lineales que son robustas a la posible presencia de dependencia de sección cruzada. Sus resultados brindan soporte al cumplimiento del PPP. De igual forma Månsson y Sjölander (2014) muestran que las economías menos industrializadas exhiben patrones de ajuste no lineal más fuertes y diferentes hacia la PPP.

Buberkoku (2014) examina la paridad del poder adquisitivo de 21 mercados emergentes y en subgrupos de estos países utilizando diferentes pruebas cointegración en panel, de Pedroni (1999, 2004), Kao (1999) y Johansen Fisher (1999). A través de los estimadores FMOLS de Pedroni (2000) estima los parametros de largo plazo, sus resultados proporcionan fuerte evidencia de la versión débil de PPP cuando las pruebas de cointegración ignoran la dependencia de las unidades. Por el contrario, cuando las pruebas de cointegración se efectuan teniendo en cuenta la posible dependencia de sección cruzada, a través de la prueba de Westerlund (2007) los resultados indican claramente que la PPP no se mantiene. Los 21 mercados emergentes los divide en economías emergentes de Asia, Europa, América Latina y África, los cuales presentan resultados similares. La principal implicación de su estudio es que los hacedores de la política económica no deberían emplear la paridad del poder adquisitivo para determinar el tipo de cambio de equilibrio.

3 Metodología econométrica

3.1. La prueba de Im, Lee y Tieslau

Im, Lee y Tieslau (2005), de aquí en adelante ILT, consideran el siguiente modelo con el fin de probar estacionariedad en una serie de datos panel:

$$y_{it} = \delta_i' z_{it} + e_{it} \tag{4}$$

$$e_{it} = \phi_i e_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \tag{5}$$

Donde $y_{i,t}$ se refiere a la variable y para la unidad i en el tiempo t, z_{it} es un conjunto de variables exógenas con vector de parámetros δ_i y e_{it} es el término de perturbación. Si $z_{it} = [1,t]'$ entonces el DGP es el mismo que la prueba sin rupturas de Schmidt y Phillips (1992). En este contexto, la hipótesis nula de raíz unitaria se especifica como $\phi_i = 1$ en (5).

3.2. Pruebas de cointegración en panel de Pedroni

Pedroni (1999, 2004) introdujo siete pruebas estadísticas que prueban la hipótesis nula de no cointegración en paneles estacionarios. Estas pruebas estadísticas permiten la heterogeneidad

en el panel, tanto en la dinámica de corto como en los coeficientes de la pendiente e intercepto del largo plazo.

Los siete estadísticos son agrupados en dos categorías: los estadísticos de la media del grupo que promedian los resultados del estadístico de prueba de cada país y los estadísticos de panel que agregan los estadísticos de la dimensión "*within*". De cada grupo es posible obtener pruebas paramétricas (Dickey-Fuller aumentada y v) y no parametricas $(\rho$ y $t)$.

De igual forma, la prueba puede incluir *dummies* de tiempo comunes que tomen en cuenta la posible dependencia de sección cruzada, la cual se aplica restando la media del grupo en cada momento de los datos a cada variable como sigue:

$$\bar{y}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_{it} \qquad (6)$$

Todos los estadísticos de prueba se basan en los residuales de las siguientes regresiones:

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_{1i}x_{1i,t} + \beta_{2i}x_{2i,t} + ... + \beta_{Mi}x_{Mi,t} + e_{i,t} \quad (7)$$

$$\Delta y_{i,t} = \sum_{m=1}^{M} \beta_{mi}\Delta x_{mi,t} + \eta_{i,t} \qquad (8)$$

$$\hat{e}_{i,t} = \hat{\gamma}_i \hat{e}_{i,t-1} + \hat{\mu}_{i,t} \qquad (9)$$

$$\hat{e}_{i,t} = \hat{\gamma}_i \hat{e}_{i,t-1} + \sum_{k=1}^{K} \hat{\gamma}_{i,k}\Delta\hat{e}_{i,t-k} + \hat{\mu}^{*}_{i,t} \qquad (10)$$

Donde $i = 1,2,...,N$ es el número de individuos en el panel, $t = 1,2,...,T$ es el número de periodos en el tiempo, $m = 1,2,...,M$ es el número de regresores, y $k = 1,2,...,K$ es el número de rezagos en la regresión ADF, Neal (2014). Una tendencia lineal $\delta_{i,t}$ se puede incorporar en la regresión a juicio del investigador.

Varias series y distintos parámetros se pueden calcular de las regresiones anteriores:

$$\hat{s}_i^{*2} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \hat{\mu}_{i,t}^{*2} \qquad \hat{s}_{N,T}^{*2} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \hat{s}_{i,t}^{*2} \qquad (11)$$

$$\widehat{L}_{11i}^{-2}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{\eta}_{i,t}^{*2}+\frac{2}{T}\sum_{s=1}^{k_i}\left(1-\frac{s}{k_i+1}\right)\sum_{t=s+1}^{T}\widehat{\eta}_{i,t}\widehat{\eta}_{i,t-s} \qquad (12)$$

$$\widehat{\lambda}_i=\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{k_i}\left(1-\frac{s}{k_i+1}\right)\sum_{t=s+1}^{T}\widehat{\mu}_{i,t}\widehat{\mu}_{i,t-s} \qquad (13)$$

$$\widehat{s}_i^{*2}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{\mu}_{i,t}^2,\quad \widehat{\sigma}_i^2=\widehat{s}_i^2+2\widehat{\lambda}_i,\quad \tilde{\sigma}_{N,T}^2=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{\sigma}_i^2 \qquad (14)$$

Los siete estadísticos se pueden construir de las siguientes ecuaciones, Pedroni (1999):

$$\text{panel } v:\ T^2N^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}\right)^{-1} \qquad (15)$$

$$\text{panel } \rho:\ T\sqrt{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}^2\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\left(\widehat{e}_{i,t-1}\Delta\widehat{e}_{i,t}-\widehat{\lambda}_i\right) \qquad (16)$$

$$\text{panel } t:\ \left(\tilde{\sigma}_{N,T}^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\left(\widehat{e}_{i,t-1}\Delta\widehat{e}_{i,t}-\widehat{\lambda}_i\right) \qquad (17)$$

$$\text{panel ADF:}\ \left(\tilde{s}_{N,T}^{*2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}^{*2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}^{*}\Delta\widehat{e}_{i,t}^{*} \qquad (18)$$

$$\text{grupo } \rho:\ T\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{L}_{11i}^{-2}\widehat{e}_{i,t-1}^2\right)^{-1}\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{e}_{i,t-1}\Delta\widehat{e}_{i,t}-\widehat{\lambda}_i\right) \qquad (19)$$

$$\text{grupo t:}\ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\widehat{\sigma}_i^2\sum_{t=1}^{T}\widehat{e}_{i,t-1}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}\left(\widehat{e}_{i,t-1}\Delta\widehat{e}_{i,t}-\widehat{\lambda}_i\right) \qquad (20)$$

$$\text{grupo ADF:}\ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{s}_i^{*2}\widehat{e}_{i,t-1}^{*2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{t=1}^{T}\widehat{e}_{i,t-1}\Delta\widehat{e}_{i,t} \qquad (21)$$

Los estadísticos de prueba se ajustan para que se distribuyan como una normal estandariazada bajo la hipótesis nula. Los ajustes efectuados sobre los estadísticos varían dependiendo sobre el número de regresores, si se incluye una tendencia temporal, y del tipo de estadístico, Neal (2014).

3.3. El estimador PDOLS de Pedroni

El estimador de Pedroni (1999, 2004) parte de considerar el siguiente modelo:

$$y_{i,t}=\alpha_i+\beta_i x_{i,t}+\mu_{i,t} \quad (22)$$

El estimador PDOLS es una extensión del estimador individual de series de tiempo minimos cuadrados ordinarios dinámicos (DOLS), el cual a pesar de ser eficiente es un estimador individual de la ecuación cointegrante que se puede aplicar a datos no estacionarios, Neal (2014). Pedroni (1999, 2004) extiende este a datos panel de series de tiempo a través de efectuar una regresión DOLS sobre cada individuo en el panel anterior como sigue:

$$y_{i,t} = \alpha_i + \beta_i x_{i,t} + \sum_{j=-P}^{P} \gamma_{i,j} \Delta x_{i,t-j} + \mu_{it}^{*} \quad (23)$$

Donde $i = 1,2,...,N$ es el número de unidades en el panel, $t = 1,2,...,T$ es el número de periodos de tiempo, $p = 1,2,...,P$ es el número de rezagos y adelantos en la regresión DOLS, β_i es el coeficiente de la pendiente y $x_{i,t}$ es la variable explicativa. Los coeficientes β y sus estadísticos t asociados se promedian sobre la totalidad del panel a través del método de la media del grupo de Pedroni, Neal (2014).

$$\widehat{\beta}_{GM}^{*} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{T} z_{i,t} z_{i,t}^{'} \right)^{-1} \left\{ \sum_{t=1}^{T} z_{i,t} \left(y_{i,t} - \overline{y}_i \right) \right\} \right] \quad (24)$$

$$t_{\hat{\beta}_i^{*}} = \left(\widehat{\beta}_i^{*} - \beta_0 \right) \left\{ \widehat{\sigma}_i^{-2} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{i,t} - \overline{x}_i \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$t_{\hat{\beta}_{GM}^{*}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} t_{\hat{\beta}_i^{*}} \quad (26)$$

Donde $z_{i,t}$ es el vector $2(p+1) \times 1$ de regresores, el cual incluye los rezagos y los adelantos de las diferencias de la variable explicativa, y σ_i^2 es la varianza de largo plazo de los residuales μ_{it}^{*}. Por el contrario, Kao y Chiang (1997) y Mark y Sul (2003) calculan los estadísticos del panel a través de la dimensión *within*, con el estadístico t diseñado para probar $H_0 : \beta_i = \beta_0$ contra $H_A : \beta_i = \beta_A \neq \beta_0$. El estimador PDOLS de Pedroni esta promediado a través de la dimensión *between*, es decir la media del grupo. De acuerdo con esto, la prueba del estadístico del panel es $H_0 : \beta_i = \beta_0$, contra $H_A : \beta_i \neq \beta_0$. En la hipótesis alternativa, los regresores no están restringidos a ser una constante β_A. Pedroni (2001) argumenta que esto es una importante ventaja de los estimadores de panel de series de tiempo

que se basan en la dimensión *between*, particularmente cuando se espera heterogeneidad en las pendientes.

4. Resultados

El cuadro 1 muestra los resultados de las pruebas LM de Raíz Unitaria sin rupturas aplicadas al logaritmo natural del tipo de cambio nominal bilateral entre los Estados Unidos y los países de América Latina considerados en el periodo de estudio 1960-2013[4]. Como se puede apreciar en dicho cuadro las pruebas de raíces unitarias en panel sin rupturas, con y sin tendencia, no permiten rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria en el tipo de cambio nominal y en los precios relativos, a pesar de que de manera individual en algunos casos si se rechace dicha hipótesis.

Cuadro 1. Prueba LM de Raíz Unitaria para el tipo de cambio nominal $\left(e_{it}\right)$ y los precios relativos $\left(p_{it}/p_t^*\right)$ con y sin tendencia.

	e_t				p_t/p_t^*			
	Sin tendencia		*Con tendencia*		*Sin tendencia*		*Con tendencia*	
	Estad.	*p*	*Estad.*	*p*	*Estad.*	*p*	*Estad.*	*p*
Argentina	-1.782	(4)	-1.388	(1)	-1.651	(3)	-2.149	(5)
Bolivia	-2.015	(1)	-3.006	(1)	-2.047	(1)	-2.990	(1)
Brasil	-2.033	(1)	-2.009	(1)	-1.781	(5)	-1.718	(5)
Chile	-2.000	(7)	-1.670	(3)	-1.550	(2)	-2.071	(3)
Colombia	-1.688	(4)	-2.532	(5)	-2.877	(8)	-1.603	(6)
Costa Rica	-1.430	(1)	-1.841	(1)	-1.949	(8)	-2.020	(3)
República Dominicana	-1.614	(3)	-2.230	(6)	-1.722	(3)	-1.753	(1)
Ecuador	-1.497	(1)	-2.014	(5)	-2.687	(8)	-2.124	(3)
Salvador	-1.769	(4)	-1.339	(1)	-2.545	(7)	-1.897	(3)
Guatemala	-2.119	(4)	-2.082	(5)	-1.791	(4)	-2.410	(4)
Honduras	-1.530	(3)	-2.644	(3)	-1.935	(3)	-2.233	(3)
México	-1.733	(3)	-2.472	(3)	-1.930	(7)	-3.192	(3)
Nicaragua	-1.462	(4)	-1.502	(4)	-1.775	(5)	-1.568	(5)
Paraguay	-1.492	(2)	-2.046	(3)	-2.631	(5)	-2.448	(5)
Perú	-1.875	(1)	-1.485	(2)	-1.696	(3)	-1.391	(2)
Uruguay	-1.537	(7)	-1.486	(1)	-1.958	(4)	-1.478	(1)
Venezuela	-2.663	(7)	-2.132	(7)	-1.595	(6)	-1.801	(2)
Panel	0.789		-0.542		-0.999		-0.966	

[4] El anexo 1 describe los datos empleados en las pruebas econométricas.

Notas: Los números entre paréntesis son los rezagos incorporados en cada prueba. Los valores críticos correspondientes a los niveles de significancia del 1%, 5% y 10% para el estadístico panel LM sin rupturas, con una y dos rupturas son -2.32, -1.64 y -1.28, respectivamente.
Fuente: Elaboración propia.

Una vez que encontramos evidencia sobre la presencia de raíces unitarias tanto en el tipo de cambio nominal como en la razón de precios relativos, verificamos la posibilidad de que ambas variables se encuentren cointegradas. El cuadro 2 presenta las pruebas de cointegración en panel de Pedroni (1999), las cuales en todos los casos rechazan la hipótesis nula de no cointegración en el panel en su conjunto. De esta manera las pruebas de Pedroni (1999) muestran evidencia de cointegración entre el tipo de cambio nominal y los precios relativos, ambas variables con respecto al dólar, para el conjunto de países de América Latina considerados en el análisis.

Cuadro 2. Pruebas de cointegración en panel de Pedroni entre el tipo de cambio nominal $\left(e_{it}\right)$ y los precios relativos $\left(p_{it}/p_t^*\right)$.

Estadístico de prueba	*Panel*	*Grupo*
v	5.691	
rho	-5.824	-4.658
t	-4.785	-4.816
adf	-4.894	-5.709

Notas: Todos los estadísticos de distribuyen como una normal N(0,1), bajo la nula de no cointegración.
Fuente: Elaboración propia.

Por último, el cuadro 3 presenta los resultados de las estimaciones de las pendientes del vector cointegrante, tanto de manera individual como en su conjunto, entre las variables en cuestión.

Cuadro 3. Estimaciones de la pendiente de cointegración individuales y de panel entre el tipo de cambio nominal y los precios relativos a través del estimador PDOLS.

	Sin tendencia			*Con tendencia*		
	Coeficiente	*Estadístico t*		*Coeficiente*	*Estadístico t*	
Argentina	1.017	3.206	***	1.018	2.163	**
Bolivia	1.028	6.495	***	1.023	1.507	
Brasil	0.990	-3.080	***	0.979	-6.007	***
Chile	1.041	4.084	***	1.007	0.511	
Colombia	1.095	5.046	***	0.955	-6.746	***
Costa Rica	1.116	8.994	***	0.938	-5.785	***
República Dominicana	1.099	4.978	***	0.956	-7.232	***
Ecuador	1.060	7.042	***	0.916	-6.521	***
Salvador	0.638	-20.070	***	1.109	17.200	***
Guatemala	1.018	0.607		0.989	-1.968	*
Honduras	1.043	1.948	***	0.980	-3.099	***
México	1.001	0.244		1.039	2.263	**
Nicaragua	0.983	-3.808	***	0.969	-4.195	***
Paraguay	1.184	6.134	***	0.939	-7.174	***
Perú	0.954	-11.750	***	0.897	-15.530	***
Uruguay	0.993	-0.806		0.953	-1.377	
Venezuela	0.941	-2.891	***	0.963	-1.967	*
Panel	1.012	1.545		0.978	-10.66	***

Notas: *, **, *** indican el rechazo de la hipótesis nula $H_0 : \beta_i = 1$, a los niveles de significancia del 10%, 5% y del 1%, respectivamente.

Fuente: Elaboración propia.

En virtud de que los datos de tipo de cambio nominal como de la razón de precios son de frecuencia anual consideramos suficiente efectuar las estimaciones con un adelanto y un rezago. La mayoría de las pendientes de los vectores cointegrantes están muy cerca de la unidad, sugiriendo de esta manera el cumplimiento de la versión débil del principio de paridad del poder de compra en los países de América Latina que componen la muestra bajo estudio. Sin embargo, en todos los casos el estadístico t que reporta los resultados de la prueba de que el parámetro estimado es igual a la unidad , de manera individual tienden a rechazar la hipótesis tal hipótesis al nivel de significancia del 1% a pesar de que la mayoría de los parámetros estimados son muy cercanos a la unidad, con excepción de Uruguay en el que los estadísticos t bajo ambas especificaciones del modelo, con y sin tendencia, no permiten rechazar la hipótesis nula de que el parámetro es igual a la unidad.

Sin embargo, los resultados de las estimaciones del panel no son tan concluyentes como los resultados de las estimaciones y pruebas individuales. Cuando el modelo se especifica sin tendencia el estadístico t asociado no permite rechazar la hipótesis nula de que el parámetro estimado para el panel en su conjunto es igual a la unidad. Por el contrario, cuando el modelo

se especifica con tendencia el estadístico *t* rechaza en forma contundente la hipótesis de que el parámetro de interés es igual a la unidad.

No obstante la anterior ambigüedad, la evidencia en su mayoría tiende a rechazar la versión débil del principio de paridad del poder de compra (PPP) en la muestra de países considerados bajo estudio. Estos resultados están acorde a lo encontrado por Pedroni (2001) y Buberkoku (2014).

5. Conclusiones

En años recientes la investigación sobre el PPP, auspiciada por la disponibilidad de muestras de mayor tamaño, se ha enfocado en el análisis de datos panel, lo cual tiende a mejorar la precisión y la confianza en las estimaciones empíricas.

En el presente trabajo, la prueba de raíces unitarias empleada no permite rechazar la hipótesis nula de raíz unitaria en el tipo de cambio nominal y en los precios relativos. A partir de esta evidencia efectuamos las pruebas de cointegración en panel de Pedroni (1999), las cuales en todos los casos permitieron rechazar la hipótesis nula de no cointegración entre ambas variables. Tomando en cuenta esta evidencia, estimamos a partir del estimador propuesto por Pedroni (1999) la pendiente de las relaciones cointegrantes tanto de manera individual como para el panel en su conjunto.

Los resultados de las estimaciones muestran que a pesar de que la mayoría de los parámetros estimados son muy cercanos a la unidad, los estadísticos *t* que prueban la hipótesis nula de que la pendiente de las ecuaciones cointegrantes son iguales a uno rechazan firmemente tal hipótesis. Estos resultados están en línea con lo reportado por Pedroni (1999) y por Buberkoku (2014). De esta manera no encontramos evidencia que de cuenta del cumplimiento de la versión fuerte del principio de paridad del poder de compra en la muestra de países de América Latina analizados.

Es importante destacar que el estadístico *t* de la prueba correspondiente a la estimación del parámetro de la pendiente de la ecuación cointegrante para el panel en su conjunto cuando no se incorpora la tendencia no permitió rechazar la hipótesis nula de que dicho parámetro estimado es igual a uno. De esta manera hay pocos indicios que evidencien el cumplimiento de dicha hipótesis, por lo que una mayor investigación es necesaria que contribuya ya sea a

confirmar estos resultados o bien a esclarecer por qué esta evidencia aunque mínima, también pues estar presente.

ANEXO 1. DESCRIPCIÓN DE LOS DATOS

El TCR de los 17 países involucrados mide el nivel del tipo de cambio real bilateral de la unidad monetaria nacional respecto al dólar estadounidense. Es importante señalar que el año base 2005 es la referencia internacional actual en el caso específico de los índices de precios al consumidor.

Para los tipos de cambio nominal se emplearon los datos oficiales de cada país, incluyendo el caso de Ecuador que desde el 2000 asumió oficialmente el dólar estadounidense como medio de pago legal. Sin embargo, como alternativa, organismos internacionales adjudican una tasa diferente, la que entre 2001-2006 tiene un mismo valor de la unidad monetaria nacional por dólar. Aquí elegimos esta última para realizar las pruebas y las estimaciones. Los datos son oficiales, provienen de la base del Banco Mundial y, en el caso de datos faltantes, se complementaron con datos oficiales de la CEPAL. Para los países con datos atípicos se consultaron sus estadísticas nacionales directamente para cotejarlos.

El Índice de precios al consumidor PROMEDIO NACIONAL se usó para todos los países, excepto para los casos de Argentina (2013, IPC), Brasil (1980, IPC), Chile (2009, IPC), Nicaragua (1999, IPC) y Venezuela (2005, IPC). Estos países no poseen un promedio de índice NACIONAL para todo el periodo. Así, existen series más largas pero se refieren al IPC de sólo algunas ciudades importantes.

Por estas razones, para estos cinco países se decidió utilizar el índice de precios del PIB, que es más representativo del promedio nacional de inflación y es homogéneo desde los años cincuenta o sesenta o mucho antes. Esto en comparación con los precios al mayoreo o con una mezcla no homogénea que se podría elaborar encadenando las series cortas de IPC con cualquier otro tipo de índice. Para complementar la fuente de datos del Banco Mundial se recurrió a la base de datos de la CEPAL. Algunas de estas series fueron cotejadas con los sistemas de cuentas macroeconómicas de algunos de estos países.

Cuadro A1. Índice de Precios utilizado para cada país.

País	*Índice de Precios*
Argentina	Deflactor
Bolivia	IPC
Brasil	Deflactor
Chile	Deflactor
Colombia	IPC
Costa Rica	IPC
República Dominicana	IPC
Ecuador	IPC
Salvador	IPC
Guatemala	IPC
Honduras	IPC
México	IPC
Nicaragua	Deflactor
Paraguay	IPC
Perú	IPC
Uruguay	IPC
Venezuela	Deflactor
Estados Unidos	IPC

Notas: IPC abrevia Índice Nacional de Precios al Consumidor y Deflactor hace alusión al Deflactor Implícito de Precios del PIB.

Fuente: Elaboración propia.

Bibliografía

Buberkoku, Onder (2014). Purchasing Power Parity for Emerging Markets: Evidence From Panel Cointegration Tests. *Journal of BRSA Banking and Financial Markets*, Vol. 8(1), pp. 117-139.

Burstein, A., Eichenbaum, M. y Rebelo, S. (2005). Large Devaluations and the Real Exchange Rate. *Journal of Political Economy*, 113(4): 742-784.

Cashin, P. y McDermott, C.J. (2003). An unbiased appraisal of PPP. *IMF Staff Papers* 50.

Coakley, J. y Fuertes, A.M. (1997). New panel unit root tests of PPP. *Economics Letters,* 57: 17–22.

Chen, S.S. y Engel, C. (2005). Does 'Aggregation Bias' Explain the PPP Puzzle?. *Pacific Economic Review,* 10: 49–72.

Choi, Ch., Mark, N. C. y Sul, D. (2004). Bias Reduction by Recursive Mean Adjustment in Panel Data. Manuscrito, University of Auckland.

Choi, Ch., Mark, N. C. y Sul, D. (2006). Unbiased Estimation of the Half-Life to PPP Convergence in Panel Data. *Journal of Money, Credit, and Banking* 38(4): 921-938. The Ohio State University Press. Recuperado Junio 1, 2014, del Project MUSE database.

Dornbusch, R. y Vogelsang, T. (1991). Real Exchange Rates and Purchasing Power Parity. En *Trade Theory and Economic Reform: North, South and East*. Essays in Honour of Bela Balassa, ed. J. de Melo y Sapir, A. Oxford, Basil Blackwell: 3–24.

Engel, C. (2000). Long-run PPP may not hold after all. *Journal of International Economics*, 51: 243–273.

Frankel, J.A. y Rose, A.K. (1996). A panel project on purchasing power parity: Mean reversion within and between countries. *Journal of International Economics*, 40: 209–224.

Guloglu, B., Ispira, S. y Okat, D. (2011). Testing the validity of quasi PPP hypothesis: evidence from a recent panel unit root test with structural breaks. *Applied Economics Letters*, 18: 1817–1822.

Hegwood, N. D. y Papell. D. H. (1998). Quasi Purchasing Power Parity. *International Journal of Finance & Economics,* 3(4): 279-289.

Hooi, L. y Smyth, R. (2007). Are Asian real exchange rates mean reverting? Evidence from univariate and panel LM unit root tests with one and two structural breaks. *Applied Economics*, 39: 2109–2120.

Im K., Lee, J. y Tieslau, M. (2005). Panel LM unit Root Tests with Level Shifts. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 67(3): 393-419.

Imbs, J., Mumtaz, H., Ravn, M.O. y Rey, H. (2005). PPP strikes back: Aggregation and the real exchange rate. *Quarterly Journal of Economics,* 120: 1–43.

Lothian, J.R. (1997). Multi-country evidence on the behavior of purchasing power parity under the current float. *Journal of International Money and Finance*, 16: 19–35.

MacDonald, R. (1996). Panel unit root tests and real exchange rates. *Economics Letters,* 50: 7–11.

Månsson, Kristofer and Sjölander, Pär (2014). Testing for nonlinear panel unit roots under cross-sectional dependency — With an application to the PPP hypothesis. *Economic Modelling*, 38, pp. 121–132

Murray, C. J. y Papell, D. H. (2002). The Purchasing Power Parity Persistence Paradigm. *Journal of International Economics*, 56: 1-19.

Murray, C. J. y Papell, D. H. (2005). Do Panels Help Solve the Purchasing Power Parity Puzzle? *Journal of Business & Economic Statistics*, 23(4): 410-415.

Neal, T. (2014). Panel cointegration analysis with xtpedroni. *Stata Journal*, 14: 684–692.

Nickell, S. (1981). Biases in Dynamic Models with Fixed Effects. *Econometrica*, 49(6): 1417-1426.

Oh, K. Y. (1996). Purchasing power parity and unit root tests using panel data. *Journal of International Money and Finance*, 15: 405–418.

Papell, D. H. (1997). Searching for stationarity: Purchasing power parity under the current float. *Journal of International Economics*, 43: 313–332.

Papell, D.H. y Prodan, R. (2006). Additional Evidence of Long Run Purchasing Power Parity with Restricted Structural Breaks. *Journal of Money, Credit y Banking*, 38: 1329-1349.

Pedroni, P. (1999). Critical values for cointegration tests in heterogeneous panels with multiple regressors. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61: 653–670.

———. (2001). Purchasing power parity tests in cointegrated panels. *Review of Economics and Statistics* 83: 727–731.

———. (2004). Panel cointegration: Asymptotic and finite sample properties of pooled time series tests with an applicaton to the PPP hypothesis. *Econometric Theory,* 20: 597–625.

Phillips, P. C.B. y Sul, D. (2004). Bias in Dynamic Panel Estimation with Fixed Effects, Incidental Trends and Cross Section Dependence. Manuscrito, University of Auckland.

Rogoff, K. (1996). The Purchasing Power Parity Puzzle. *Journal of Economic Literature*, 34: 647–668.

Su, C.-H., Chang, T., Liu, Y.-T. (2012). Revisiting Purchasing Power Parity for African Countries: with Nonlinear Panel Unit-Root Tests. *Applied Economics*, 44, 3263–3273.

Taylor, A. M. (2001). Potential Pitfalls for the Purchasing-Power-Parity Puzzle? Sampling and Specification Biases in Mean-Reversion Test of the Law of One Price. *Econometrica*, 69: 473-498.

Ventosa, S. D. y Gómez, M. (2013). A comment on: 'Testing the validity of quasi-PPP hypothesis: evidence from a recent panel unit-root test with structural breaks'. *Applied Economics Letters* 20(2): 111-113.

Wagner, M. (2008). On PPP, unit roots and panels. *Empirical Economics*, 35(2): 229-249.

Working, H. (1960). Note on the Correlation of First Differences of Averages in a Random Chain. *Econometrica*, 28: 916–918.

Wu, X. (1996). Are real exchange rates nonstationary? Evidence from a panel-data test. *Journal of Money, Credit and Banking*, 28: 54–61.

CAPÍTULO XXXIV

Determinantes de la recaudación del impuesto sobre la renta en México, 1980-2012: un análisis de cointegración.

José César Lenin Navarro Chávez

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Plinio Hernández Barriga

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Alejandro López Huacuz

Servicio de Administración Tributaria

Resumen

Este trabajo estudia los determinantes de la recaudación del Impuesto Sobre la Renta (ISR) en México, en el periodo de 1980 a 2012. Se hace una revisión teórica sobre la política tributaria y los factores que definen la recaudación del ISR. A partir de la revisión teórica se plantea un modelo en donde la recaudación del ISR tiene las siguientes variables explicativas: a) la base imponible, b) la tasa legal, y c) la evasión y elusión fiscal. El modelo es corroborado empíricamente mediante un análisis de cointegración, en donde se identifican las elasticidades de los determinantes sobre la recaudación del ISR, positivas y cercanas a la unidad para el caso de la base imponible y de la tasa legal, y, negativa y superior a la unidad respecto de la evasión y elusión. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

Palabras Clave: Impuestos, Cointegración

Clasificación JEL: H29, C22

1. Introducción

Todo Estado, entendido como una forma de organización social, económica y política, formada por un conjunto de instituciones, que tienen el poder de regular la vida comunitaria,

requiere contar con recursos financieros para su buen desempeño. Los recursos económicos con los cuales el Estado debe cumplir sus funciones, proveyendo los servicios y bienes públicos que la ciudadanía demanda, dependen fundamentalmente de la recaudación de impuestos que hace a la comunidad a través de sus sistemas tributarios.

De lo anterior, se desprende que el análisis de los determinantes de la recaudación de impuestos en un país es de fundamental importancia, pues de ello depende en gran medida la viabilidad financiera de los gobiernos y el papel que el Estado les confiere como proveedores de bienes y servicios públicos. Claro está que la eficiencia con la que se empleen los recursos de los que disponen los gobiernos es también una determinante de la consecución de sus propios objetivos, sin embargo, en este trabajo nos centraremos en los determinantes de la captación de recursos, antes que de su diferentes empleos.

En virtud de la importancia que tiene la recaudación del ISR en los ingresos tributarios del gobierno mexicano, este trabajo estudia sus determinantes, los cuales son identificados en la base gravable, la evasión y elusión fiscal, así como su tasa legal, en el periodo de 1980 a 2012. El capítulo se estructura de la siguiente manera: en el primer apartado se aborda la política tributaria y los factores que determinan la recaudación del ISR; en el segundo apartado se presenta la especificación del modelo econométrico, a partir de la función general, así como del desarrollo metodológico en donde se señalan las variables, los indicadores y las fuentes de información; en el tercer apartado se efectúa un análisis para encontrar evidencia de cointegración que contempla el comportamiento en el corto y largo plazo de las series En el apartado cuatro se presentan los resultados del modelo econométrico, así mismo se realiza su interpretación, y finalmente se exponen las conclusiones.

2. La política tributaria y los factores determinantes de la recaudación del ISR

Existen diversos factores que inciden en la recaudación fiscal del ISR, sin embargo, los más importantes pueden ubicarse en: a) la evasión y elusión fiscal; b) la base imponible; y c) la tasa legal.

La evasión y la elusión fiscal tienen un efecto negativo en cuanto a la recaudación de impuestos. Para el caso de México, la evasión puede entenderse como una acción destinada a

no cumplir con una obligación señalada en la misma Carta Magna, que en su Artículo 31, fracción IV, señala que es obligación de los ciudadanos mexicanos el contribuir a los gastos públicos, a partir del pago de impuestos.

Por otra parte, la elusión fiscal puede definirse como la capacidad del contribuyente para interpretar el texto de la ley y adaptarlo de la manera más conveniente a sus intereses, con el objeto de minimizar sus obligaciones con el fisco. Es decir, el contribuyente aprovecha todo el andamiaje institucional tributario para aprovecharlo al máximo y disminuir su carga fiscal (Amieva-Huerta, 2010). La elusión fiscal está más relacionada con un actuar del contribuyente más apegado a derecho, de acuerdo con el cual, se busca igualmente minimizar la carga tributaria, pero sin violentar la ley de manera alguna (García, 2002).

La base imponible y la tasa legal deben tener un efecto directo sobre la recaudación de impuestos. La base imponible puede entenderse, en lo general, como el monto a partir del cual se calcula un impuesto determinado, en lo particular, la base imponible del impuesto sobre la renta, es el ingreso neto de los contribuyentes, descontando las deducciones legales, sobre la base de la cual deben pagar los impuestos. La tasa legal se define como el porcentaje aplicado sobre una base imponible, que da como resultado la cuota tributaria. La tasa legal puede ser fija o variable, en el primer caso da lugar a un impuesto proporcional, mientras que si aumenta conforme crece la base imponible produce un impuesto progresivo, o regresivo en el caso en que disminuya conforme crece la base imponible. Con relación a la tasa legal del ISR, lo más común es que se aplique una misma tasa para las utilidades de las empresas, así como tasas progresivas a las rentas personales. Esta estructuración de la tasa legal busca lograr una mayor eficiencia distributiva entre los grupos de ingresos de la población.

En una economía con creciente desigualdad en los ingresos, debería promoverse el diseño e implementación de un sistema tributario progresivo. Sin embargo, la desigualdad social puede provocar la creación de grupos elites que buscan minimizar su carga tributaria, controlando el proceso legislativo para que esa carga se traslade a los sectores con menos recursos, lo que se traduce en sistemas tributarios regresivos que tiende a acentuar aún más las disparidades sociales (Gómez Sabaini y Martner, 2010). Uno de los argumentos comúnmente esgrimidos en contra de la progresividad en el cobro de impuestos sobre las rentas personales, consiste en afirmar que puede llegar a disminuir el ahorro, y por lo tanto la inversión futura, además de

desincentivar el esfuerzo personal en el momento en que la acumulación de riqueza se ve menguada cuando la tasa marginal es creciente respecto al nivel de renta. Además de lo anterior, de acuerdo con Jorratt (1998), cuando existe una tasa marginal máxima demasiado alta, el número de contribuyentes que tributa en dicha tasa, suele ser considerablemente inferior a los que efectivamente obtienen rentas de ese nivel, lo que termina promoviendo la evasión fiscal.

La capacidad de implementar políticas a favor de la eficiencia asignativa que el gobierno ejerza con los recursos públicos determinará en gran mediada su nivel de legitimidad y su derecho a demandar más ingresos a los contribuyentes (Levi, 1989). La Red por la Justicia Fiscal (2005) señala que la injusticia fiscal, provoca a su vez que se debilite el contrato implícito entre ciudadanos y Estado en el que se sustenta el sistema fiscal, hecho que ha provocado la vorágine en el que se encuentra el sistema tributario en México, con una baja recaudación, poca legitimación, debilidad institucional tributaria, ineficiencia en la distribución de la riqueza y una deficiencia en la asignación del gasto público.

Un aspecto fundamental a considerar en el fenómeno de la evasión fiscal se encuentra en el papel que juegan las instituciones en la tributación, su influencia en la capacidad recaudadora, y sobre todo, los incentivos que éstas generan en pro de la cooperación y del compromiso que exista por parte de los actores involucrados (Brautigam, 2008).

En la tributación es de particular relevancia la sensación de la obligación moral de pagar impuestos, la percepción de que el sistema tributario es justo o no, la percepción de que el resto de los individuos paga también los impuestos y la creencia de que el gobierno gasta inteligentemente los recursos, y de que estos gastos beneficiarán al que los pagó (Brautigam, 2008). En México, la percepción del desempeño gubernamental no es particularmente favorable, a diferencia de otras economías como Alemania, Noruega, Países Bajos, Suecia o Dinamarca, en donde la mentalidad, las creencias y las tradiciones de pagar impuestos se encuentran más arraigadas, lo que permite a los gobiernos de estos países el contar con mayores recursos para cumplir con sus tareas y poder brindarle a la sociedad bienes y servicios que cumplan con las necesidades y demandas imperantes.

En un esquema dinámico la tributación debe verse influenciada positivamente por el crecimiento y desarrollo económicos, que han de permitir el mantenimiento de altos niveles de ingresos fiscales. Si no incrementa el PIB de las economías, difícilmente pueden incrementarse los impuestos, como el de las rentas personales, es decir, impuestos directos que generalmente son de tipo progresivo. Al no poder captar este tipo de ingresos, las administraciones tributarias suelen compensar los recursos faltantes vía la ampliación de impuestos de tipo indirecto (Di John, 2006).

Por lo tanto, las condiciones económicas imperantes, caracterizadas por un lento crecimiento y marcada concentración del ingreso, el pobre nivel de legitimidad de las instituciones públicas, además de ciertos aspectos culturales e ideológicos que determinan la relación existente entre el Estado y la sociedad presentes en México, tienden a contribuir a la evasión y elusión fiscal, mermando así la capacidad recaudatoria del gobierno mexicano.

El objetivo principal de toda administración tributaria consiste en maximizar el cumplimiento tributario, cuya principal herramienta es la fiscalización, instrumento que permite detectar las conductas de incumplimiento tributario. Por lo tanto la fiscalización es fundamental para contrarrestar la evasión fiscal, toda vez que incrementa la percepción de riesgo de los evasores, en virtud de la probabilidad de detección percibida, lo que garantiza una mayor eficacia por parte de la administraciones tributarias en la recaudación de impuestos (Jorratt, 1998).

Otro elemento que puede hacer disminuir la evasión fiscal se encuentra en la propia simplicidad de la estructura tributaria, en el sentido de que las administraciones tributarias pueden lograr una mayor eficiencia, reduciendo el grado de burocratización en el pago de impuestos, lo que contribuirá positivamente en los ingresos fiscales (Morales, 2006).

La capacidad de la base imponible para propiciar la recaudación depende de dos características; primeramente que la base sea lo más amplia posible y; segundo, que la base esté sujeta a la menor cantidad de exenciones y deducciones, impidiendo que haya lagunas legales, que aprovechen los contribuyentes para evadir y/o eludir el pago de impuestos, los que mina considerablemente la capacidad de los gobiernos para hacerse de los ingresos tributarios. En el mismo sentido, para Jorratt (1998) una base imponible estrecha, influye

considerablemente en la recaudación fiscal, pues el hecho de tener tratamientos especiales, amplias exenciones, franquicias y altos niveles de deducciones, conlleva a minar los ingresos fiscales de todas las administraciones tributarias.

Los esquemas tributarios existentes en América Latina la ubican entre las regiones del mundo con menor presión tributaria, con niveles similares a los de Asia del Este y África sub-sahariana y prácticamente la mitad de los niveles de los países más desarrollados, no obstante que en los últimos veinte años ha venido aumentando paulatinamente llegando en promedio a un nivel de 17,0% en el año 2005. Sin embargo, la presión tributaria en América Latina oscila desde un 33% en Brasil, 27% en Argentina hasta los más bajos niveles, que incluyen a países como Guatemala y México con un 11% (Cetrángolo y Gómez Sabaini, 2007).

De acuerdo con Bergman (2001) el esquema tributario vigente le permitiría a México alcanzar una recaudación del 17% o 18% del Producto Interno Bruto (PIB), si tan sólo el Servicio de Administración Tributaria (SAT), tuviera similar efectividad a la que tiene la agencia recaudadora en Chile.

Un factor determinante en las reformas en América Latina ha sido la presión internacional, es decir, se traduce como el "efecto imitación de lo que hace el vecino", pues ha sido sustancial la influencia del Consenso de Washington para las economías latinoamericanas en materia fiscal, lo que produce en la mayoría de los casos, efectos secundarios y resultados no deseados, puesto que las condiciones políticas, económicas y sociales son bastante distintas entre un país y otro (Mahon, 1997).

En México, de las fuentes de ingresos que el gobierno federal dispone, el cobro de impuestos ha contribuido con un 61.49% en los últimos 25 años, y en este destacan la recaudación del impuesto sobre la renta (ISR) con un 48.23% respecto a los ingresos tributarios, y el impuesto al valor agregado (IVA), con un 34.47% (véase tabla 1).

TABLA 1 Fuentes de ingresos del gobierno federal				
Periodo / porcentaje	Ingresos tributarios / ingresos totales	Ingresos petroleros / ingresos totales	ISR / ingresos tributarios	IVA / ingresos tributarios
1990-1994	63.26%	28.37%	44.43%	27.47%
1995-1999	56.22%	35.06%	42.27%	30.53%
2000-2004	69.60%	21.67%	43.87%	33.01%
2004-2009	59.12%	33.23%	53.09%	41.51%
2009-2014	59.26%	32.71%	57.49%	39.81%
Fuente: elaboración propia con base en: INEGI, *Banco de Información Económica,* disponible en: www.inegi.org.mx/sistemas/bie/, consultado el 02 de junio de 2015.				

3. Especificación del modelo

De la exposición anterior es posible definir que la recaudación del ISR en México depende, de forma directa, de la base imponible y de la tasa legal y, de forma inversa, de la evasión y elusión fiscal. Partiendo de esta hipótesis de trabajo, su validación se plantea en términos de un modelo econométrico que corrobore las relaciones establecidas. Así, el modelo propuesto se especifica de la siguiente forma:

$$\log (R_t) = \beta_0 + \beta_1 \log (B_t) + \beta_2 \log (t_t) + \beta_3 \log (e_t) + u_t \qquad (1)$$
$$u_t \sim N(\sigma,0)$$

Donde:

log = el logaritmo natural

R_t = la recaudación efectiva del impuesto, como proporción del PIB, en el año t,

t_t = es igual a la tasa legal del impuesto en el año t,

B_t = base imponible teórica, como proporción del PIB, en el año t,

e_t = la tasa de evasión y elusión del impuesto en el año t,

β_o, β_1, β_2, β_3 = parámetros a calcular,

u_t = componente aleatorio

Si el modelo definido en (1) implica el empleo de series estadísticas con un grado de integración superior a cero, como suele suceder en el empleo de series de tiempo, la transformación requerida se obtiene mediante la primera diferencia de los logaritmos (Δlog) de las series, quedando la especificación de la siguiente manera:

$$\Delta\log R_t = \beta_0 + \Delta\log \beta_1 B_t + \Delta\log \beta_2 t_t + \Delta\log \beta_3 e_t + u_t \qquad (2)$$
$$u_t \sim N(\sigma,0)$$

Si la ecuación (1) corresponde una relación de cointegración es posible representar la relación de largo plazo en un modelo de corto plazo mediante la siguiente especificación, conocida como mecanismo de corrección de error:

$$\begin{aligned}\Delta\log R_t = {} & \alpha_0 + \alpha_1 \Delta\log R_{t-1} + \phi (R_t - \beta_o - \beta_1 B_t - \beta_2 t_t - \beta_3 e_t) \\ & + \alpha_2 \Delta\log B_t + \alpha_3 \Delta\log B_{t-1} + \alpha_4 \Delta\log t_t + \alpha_5 \Delta\log t_{t-1} \\ & + \alpha_6 \Delta\log e_t + \alpha_7 \Delta\log e_{t-1} + \alpha_8 Z_t + \varepsilon_t \qquad (3) \\ & \varepsilon_t \sim N(\sigma,0)\end{aligned}$$

donde:
$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, a_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ = parámetros a calcular,
ϕ = coeficiente del mecanismo de corrección de error
ε_t = componente aleatorio
Z_t = otras variables exógenas al modelo

Antes de presentar los resultados del análisis econométrico, exponemos la forma en cómo se realizó el cálculo de la evasión y elusión del ISR, para los cual se empleó la siguiente ecuación (Escobar, 2007):

$$R = Bt (1 - e) \qquad (4)$$

Partiendo de la ecuación 4, se procede a despejar *e* quedando de la siguiente manera:

$$e = 1 - (R / Bt) \qquad (5)$$

La base imponible del ISR, fue calculada con base en el valor agregado de los factores, que está integrado tanto por los sueldos y salarios como por el excedente bruto de operación, es decir, los ingresos de las personas y de las empresas, dichos indicadores se encuentran

contenidos en la cuenta de generación del ingreso por rubros del Sistema de Cuentas Nacionales.

La recaudación, es decir, los ingresos del ISR, representan un indicador que refleja el monto de los impuestos que se captaron por parte del fisco federal por concepto de rentas, obteniéndose el monto que se recauda como porcentaje del PIB.

La tasa legal refleja el porcentaje de impuestos que se debe aplicar sobre la base imponible. La tasa del ISR que se utilizó para el cálculo, corresponde a la tasa general para personas morales, misma que se aplica también para la mayoría de las personas físicas inscritas al Registro Federal de Contribuyentes.

Los indicadores que se utilizaron para el cálculo de la base imponible del ISR fueron los siguientes:

Producto Interno Bruto: Se requirió utilizar el monto del PIB a precios corrientes de México durante el períodos de 1980 a 2012.

Sueldos y Salarios: Este indicador, corresponde a todos los pagos que realizaron las unidades económicas para retribuir el trabajo ordinario y extraordinario, antes de cualquier deducción retenida por los empleadores, se utilizó el monto total a precios corrientes, del período 1980 a 2012.

Excedente Bruto de Operación: El excedente bruto de operación, se define como el valor agregado bruto menos la remuneración de asalariados y menos el monto de los impuestos netos de subsidios sobre la producción, para este indicador se tomó el resultado total para cada año del período de estudio a precios de mercado.

Una vez determinado el total al que ascienden los sueldos y salarios y el excedente bruto de la operación, se procede a sumar ambos conceptos para cada período, resultando el valor agregado de los factores, este monto es el que se consideró para establecer la base imponible del ISR, el valor de la base debe calcularse como porcentaje del PIB de conformidad con la metodología de Escobar (2007).

Impuestos, Contribuciones Sociales y Subsidios. Se omitió considerar el monto de lo correspondiente a los impuestos para cada año, que viene considerado en las cuentas nacionales, puesto que esa cifra no forma parte de la base gravable, pues se estaría efectuando un error en la contabilidad respecto al monto de las contribuciones sociales de los empleados, también se omitió considerarla, debido a que son deducibles de impuestos, y por lo tanto no deben considerarse para su contabilidad. Finalmente los subsidios tampoco se tomaron en cuenta, toda vez que representan los tratamientos especiales que existen en la legislación mexicana, y por lo tanto tampoco deben considerarse debido a que no son sujetos de impuestos. De esta manera se logró tener una base imponible más exacta.

Las fuentes de información que se utilizaron son el Sistema de Cuentas Nacionales del Instituto Nacional de Estadística Geografía e Informática (INEGI), las series de los Ingresos Tributarios del Gobierno Federal, publicado por el Centro de Estudios de las Finanzas Públicas (CEFP) de la Cámara de Diputados, las estadísticas oportunas de finanzas públicas de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), así como la ley del ISR que abarca desde el año de 1980 hasta 2012.

4. Análisis de cointegración

Todo análisis econométrico que trabaje con series de tiempo debe iniciar con el análisis de integración de las series estadísticas con las cuales se está trabajando. Para determinar el grado de integración de las series se empleó la prueba de raíz unitaria aumentada de Dickey y Fuller (1979), cuyo número de rezagos se determinó mediante el criterio de Schwarz (1978). Los resultados de las pruebas aplicados al logaritmo de las series se presentan a continuación:

TABLA 2
Pruebas de raíz unitaria ADF de las series en nivel

Variable	Prob.
log (*R*)	0.0084
log (*t*)	0.6676
log (*B*)	0.4549
log (*e*)	0.0568

Fuente: Elaboración propia con base en: INEGI, *Sistema de Cuentas Nacionales*; CEFP, *Ingresos Tributarios del Gobierno Federal*; SHCP, *Estadísticas Oportunas de las Finanzas Públicas;* Empleando en programa *EViews 8.0*.

De la tabla 2 puede establecerse, con un nivel de confianza de 95 y 99%, que la recaudación efectiva del impuesto, como proporción del PIB (R) tiene un grado de integración cero, mientras que la tasa legal del impuesto (*t*), la base imponible teórica, como proporción del PIB (B) y la tasa de evasión y elusión del impuesto (*e*), tienen un grado de integración superior a cero.

En virtud de los resultados obtenidos en las pruebas de raíz unitaria de las series en nivel, se procedió a aplicar las pruebas con la primera diferencia del logaritmo de las series, para poder determinar su grado de integración. Los resultados se muestran a continuación:

TABLA 3

Pruebas de raíz unitaria ADF de la primera diferencia del logaritmo de las series

Variable	Prob.
□log (*t*)	0.0002
□log (*B*)	0.0002
□log (*e*)	0.0017

Fuente: Elaboración propia con base en: INEGI, *Sistema de Cuentas Nacionales*; CEFP, *Ingresos Tributarios del Gobierno Federal*; SHCP, *Estadísticas Oportunas de las Finanzas Públicas;* Empleando en programa *EViews 8.0*.

De la tabla 3 puede establecerse, con un nivel de confianza de 95 y 99%, que la tasa legal del impuesto (*t*), la base imponible teórica, como proporción del PIB (B) y la tasa de evasión y elusión del impuesto (*e*), tienen un grado de integración igual a uno, toda vez que la primera diferencia de sus logaritmos no tiene tener raíz unitaria.

Una vez analizado el orden de integración de las series es posible estudiar la existencia de cointegración en las mismas. Cabe destacar que si bien la variable dependiente, recaudación efectiva del impuesto, como proporción del PIB, tiene un grado de integración cero, es posible encontrar una combinación lineal entre las variables explicativas, de orden de integración uno, que nos den como resultado residuales con un grado de integración cero, lo que nos daría evidencia de cointegración entre las series (Charemza y Deadman, 1999).

En el análisis de cointegración se sigue la metodología de dos pasos de Engle y Granger (1987). Conforme a lo anterior se procede a la especificación de un modelo de variables en nivel con el método de mínimos cuadrados ordinarios, para posteriormente verificar el orden de integración de los residuales. Los resultados del procedimiento se presentan a continuación:

TABLA 4

Análisis de cointegración

Variable dependiente, log (*R*)

Variable	Coeficiente
c	-2.7916**
log (*t*)	1.0026**
log (*B*)	1.0787**
log (*e*)	-5.5218**
Prueba de cointegración	
Estadístico	Prob.
ADF (u)	0.0027

** Significativo al 99% de confianza

Fuente: Elaboración propia con base en: INEGI, *Sistema de Cuentas Nacionales*; CEFP, *Ingresos Tributarios del Gobierno Federal*; SHCP, *Estadísticas Oportunas de las Finanzas Públicas;* Empleando en programa *EViews 8.0*.

En la tabla 4 se presenta la prueba de raíz unitaria de los residuales del modelo, que nos indica que el grado de integración de los mismos es cero, a partir de ello podemos concluir que las variables del modelo cointegran, lo que nos permite identificar el modelo como una relación estable de largo plazo.

Dado que se está trabajando con los logaritmos de las variables es posible interpretar los resultados como elasticidades. Por lo tanto se observa una elasticidad cercana a la unidad entre la recaudación del impuesto sobre la renta como proporción del PIB, la base imponible y la tasa legal, mientras que la elasticidad que guarda con la evasión y elusión fiscal ronda las 5.5 unidades.

Todo modelo de cointegración debe tener una representación de corto plazo mediante una especificación que incluya un mecanismo de corrección de error. Por lo tanto, partiendo del modelo presentado en la tabla 4, que se corresponde con el establecido en la fórmula (1), se representa su versión de corto plazo, siguiendo la especificación de la fórmula (3). Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

TABLA 5 Mecanismo de corrección de error Variable dependiente, □log (*R*)	
Variable	Coeficiente
$\Delta\log(R_{-1})$	0.0822
c	-0.0001
mce_{-1}	-0.7727**
$\Delta\log(t)$	0.9736**
$\Delta\log(t_{-1})$	-0.0787
$\Delta\log(B)$	1.1068**
$\Delta\log(B_{-1})$	-0.0524
$\Delta\log(e)$	-5.5914**
$\Delta\log(e_{-1})$	1.3473
dum92	-0.0385
R^2 Ajustada	0.9924
Pruebas sobre los supuestos	
Estadístico	Prob.

Jarque-Bera	0.4743
Breusch-Godfrey	0.7599
White	0.8665
Ramsey	0.4301

** Significativo al 99% de confianza

Fuente: Elaboración propia con base en: INEGI, *Sistema de Cuentas Nacionales*; CEFP, *Ingresos Tributarios del Gobierno Federal*; SHCP, *Estadísticas Oportunas de las Finanzas Públicas;* Empleando en programa *EViews 8.0*.

Los resultados que se muestran en la tabla 5 corroboran la factibilidad de representar el modelo de largo plazo en uno de corto plazo con el mecanismo de corrección de error, lo que abona validez a la ecuación de cointegración presentada en la tabla 4.

Los resultados del modelo de corto plazo nos indican que, de manera análoga al modelo de largo plazo, los coeficientes de la tasa legal y la base imponible son positivos y tienden a la unidad, mientras que el coeficiente de la evasión y elusión fiscal mantiene su signo negativo y un valor alrededor de las 5.5 unidades. El coeficiente del mecanismo de corrección de error nos indica que los choques externos del modelo se corrigen en aproximadamente un setenta por ciento en el primer año de ocurrencia. La variable binaria empleada en el año de 1992 captura el fenómeno de reversión que sufrió la recaudación del impuesto sobre la renta en ese mismo año. La validez estadística de las pruebas de hipótesis sobre los coeficientes se corrobora mediante las pruebas de diagnóstico, que indican que el modelo se encuentra bien especificado, además de que sus residuales se distribuyen normalmente, son homocedásticos y no se encuentra autocorrelacionados.

5. Conclusiones

La presión tributaria en México es de las más bajas en el mundo, no solo comparándola con economías de un nivel de desarrollo mayor, sino con economías que comparten grados de industrialización análogos. No obstante, la poca efectividad de la administración tributaria en la recaudación de impuestos es tal que una proporción significativa de impuestos deja de

recaudarse, lo que limita considerablemente el financiamiento de los gastos públicos, y las políticas públicas que de estos dependen, si han de buscarse presupuestos equilibrados.

El estudio presentado analiza los principales determinantes de la recaudación del impuesto sobre la renta en México, fuente de aproximadamente el 50% de los ingresos tributarios del gobierno mexicano, y corrobora las hipótesis originalmente planteadas. Al respecto puede establecerse que la recaudación fiscal del ISR, tiene un comportamiento creciente, casi proporcional ante los incrementos de la base imponible y el aumento de las tasas legales, y un comportamiento decreciente, con una proporcionalidad muy superior a la unidad, respecto del crecimiento en la evasión y elusión fiscal.

De estos resultados puede concluirse que si bien una mayor captación del ISR puede lograse vía el aumento de las tasas impositivas o de la base imponible, ampliándola o eliminando exenciones, el mayor impacto recae en la reducción de la evasión y elusión que muestra una elasticidad significativamente mayor a la unidad.

La política tributaria que ha aplicado el gobierno mexicano en los últimos 30 años ha sido la de reducir paulatinamente la tasa legal del ISR, de 42% en 1980 hasta un 30% en el 2012, a la par que la base imponible se ha incrementado, desde un 77% de los ingresos en 1987 hasta 93% en 2012. De acuerdo con nuestro análisis de corto y largo plazo ambas políticas tienen un impacto casi equiproporcional en la recaudación del ISR, al mostrar elasticidades muy cercanas a la unidad.

En razón de la elevada elasticidad que muestra la evasión y elusión fiscal, superior a las cinco unidades, tanto en el corto como en el largo plazo, parece ser la variable en cuya determinación debe enfocarse la política tributaria en el país. En el corto plazo la evasión y elusión pueden reducirse mediante al aumento de la percepción de riesgo que los contribuyentes perciban de no pagar los impuestos a través de una mayor fiscalización del comportamiento tributario. En un horizonte de mediano plazo la política debe de centrase en la simplificación de la estructura tributaria que reduzca las lagunas legales y promueva menores niveles de burocracia en el cobro de impuestos. Finalmente, en el largo plazo, es de fundamental importancia mejorar la percepción de los contribuyentes respecto del desempeño del gobierno y su capacidad de incidir en la eficiencia asignativa que se espera de su actuar en

la economía, ofreciendo mejores bienes y servicios públicos, elevando así su nivel de legitimidad, lo que ha de promover una mayor voluntad de los ciudadanos en contribuir con los gastos públicos.

Bibliografía

Amieva Huerta, J. (2010). *Finanzas Públicas en México*, Ed. Porrúa, México.

Bergman, M. (2001). *La Capacidad de Recaudar Impuestos del Gobierno Mexicano: ¿El Tema Previo a la Reforma Fiscal?* Ed. CIDE - Programa de Presupuesto y Gasto Público, México.

Brautigam, D. (2008). "Introduction", En: Brautigam, D., Fjeldstad, O-H., y Moore, M. (Coordinadores) *Taxation and State Building in Developing Countries*. Ed. Cambridge University Press, Reino Unido.

Cetrángolo, O. y Gómez Sabaini, J.C., (2007) "La tributación directa en América Latina y los desafíos a la imposición sobre la renta", *Serie Macroeconomía del Desarrollo 60*, CEPAL, Chile.

Charemza, W. y Deadman, D. (1999). *New directions in econometric practice: General to specific modeling, cointegration and vector autorregression*, Edward Elgar, Reino Unido.

Di John, J. (2006). "The Political Economy of Taxation and Tax Reform in Developing Countries", *UNU-WIDER Research Paper* No 2006/74, Finlandia.

Dickey, D.A. y Fuller, W.A. (1981). "Likelihood ratio statistics for Autoregressive time series with a unit root", *Econometrica*, Vol. 49 (4), pp. 1057-1072.

Engel, W. y Granger, C. (1987). "Cointegration and Error-Correction: Representation, Estimation, and Testing". *Econometrica*. Vol. 55. pp. 251-276.

Escobar, R. (2007). "La medición y control de la erosión de las bases tributarias: Los gastos tributarios y la evasión tributaria" En: *La recaudación potencial como meta de la administración tributaria,* Ed. Ministerio de Economía y Hacienda, Instituto de Estudios Fiscales, España.

García, A., (2002). *La simple negligencia en la comisión de infracciones tributarias*, Ed. Marcial Pons, España.

Gómez Sabaini, J.C., & Martner, R. (2010). "America Latina: Panorama global de su sistema tributario y principales temas de política" En: Ruiz-Huerta J. (Coordinador), *Gobernanza democrática y fiscalidad*, Ed. Tecnos, España.

INEGI. (2015) *Banco de Información Económica,* disponible en: www.inegi.org.mx/sistemas/bie/, consultado el 02 de junio de 2015.

Jorratt De Luis, M. (1998). Evaluación de la capacidad recaudatoria del sistema tributario y de la evasión tributaria, *Trimestre Fiscal*, Vol. 19 (63), pp. 1-21.

Levi, M. (1989). *Of rule and revenue*, Ed. University of California Press, Estados Unidos de Norteamérica.

Mahon, J. (1997). "Tax reform and its determinants in Latin America, 1977-94: implications for theories of state development", XX Congreso Internacional de la Asociación de Estudios Latinoamericanos, México.

Morales E. (2006). "La reforma fiscal que México necesita" *Con-Ciencia Política*. Vol. 3, pp. 121-136

Red por la Justicia Social. (2005). *Hacednos pagar impuestos si podéis*, Ed. New Economics Foundation, Reino Unido.

Schwarz, Gideon E. (1978). "Estimating the dimension of a model", *Annals of Statistics* 6 (2), pp. 461–464

Tapia Tovar, J. (2000). *Evasión Fiscal. Causas, efectos y soluciones*, Ed. Porrúa, México.

CAPÍTULO XXXV

Modelación del vínculo entre responsabilidad social y beneficio de la empresa: Monopolio Ordinario Lucrativo versus Competencia Perfecta.

Eduardo Macario Moctezuma-Navarro

Universidad Politécnica de Francisco I. Madero

Zoraida Blancas-Olvera

Universidad Politécnica de Francisco I. Madero

Araceli Flores-Eslava.

Universidad Politécnica de Francisco I. Madero

Resumen.

Gradualmente, la filosofía de responsabilidad social corporativa ha ganado adeptos y modificado la operación de las empresas. No obstante, su impacto no forma parte aún de la teoría económica ortodoxa y carece de un ropaje matemático estándar. En este trabajo se propone una forma de hacer tal extensión para los casos del monopolio ordinario lucrativo y de las empresas en competencia perfecta, conservando los resultados analíticos habituales. Como principal resultado, las simulaciones sugieren que, para ambas estructuras de mercado, es posible mejorar las ganancias hasta niveles máximos, pero solo en cierto intervalo de gasto socialmente responsable.

Palabras clave: Responsabilidad social corporativa, monopolio ordinario lucrativo, competencia perfecta, modelación matemática, ganancias máximas.

Clasificación JEL: C0, D4, M0.

1. Introducción.

El enfoque de empresas socialmente responsables considera que "las compañías, además de sus prioridades económicas, tienen que cumplir también con unas obligaciones sociales y ecológicas" (Sandri, 2002: 136). Si bien existen numerosas conceptualizaciones de la responsabilidad social

corporativa (RSC), ver Cuadro 1, comparten un elemento común: asumen un compromiso de tipo voluntario por parte de las organizaciones, de manera tal que su aplicación da lugar a un valor añadido para la sociedad, dejando atrás la perspectiva restringida de únicamente maximizar el beneficio económico (Varian, 1999). Ejemplos de las actividades derivadas de esta visión de responsabilidad social empresarial (RSE) se reúnen en el Cuadro 2.[1]

Cuadro 1. Definiciones de Responsabilidad Social Corporativa (RSC).

No.	AUTOR(ES)	DEFINICIÓN
1	AliaRSE (2007)	Es el compromiso consciente y congruente que asume el empresario y la empresa de cumplir integralmente con la finalidad de la empresa tanto en lo interno, como en lo externo, considerando las expectativas de todos sus participantes en lo económico, social o humano y ambiental, demostrando el respeto por los valores éticos, las personas, las comunidades y la construcción del bien común con justicia social.
2	Vallardez (2004)	Es el compromiso voluntario de las organizaciones de comportarse éticamente y contribuir al desarrollo sustentable, tanto en lo económico como en el mejoramiento de la calidad de vida de los trabajadores, sus familias, las comunidades locales y la sociedad en general.
3	Guédez (2006)	Es un conjunto de estrategias que permite identificar, atender, anticipar y sobrepasar las necesidades, expectativas y capacidades de los grupos de interés (internos y externos). Por lo tanto, la Responsabilidad Social se puede entender como la respuesta de las organizaciones a las expectativas de los sectores y agentes internos y externos con los que interactúa.
4	Chacon (2001)	Es la integración voluntaria por parte de las empresas, de las preocupaciones sociales y morales en sus operaciones comerciales y en las relaciones con sus interlocutores.
5	Drucker (1999)	Cuidar a la sociedad dentro de los límites de sus competencias sin poner en peligro su capacidad de rendimiento.

[1] Como es usual, se utilizan como sinónimos los conceptos cuyas siglas se identifican como RSC y RSE.

Fuente: Material seleccionado de Vargas y Vaca (2005: 245); Alonso, Rodríguez, Cortés y Abreu (2012: 59); así como de Pelekais y Aguirre (2008: 19-24).

Cuadro 1 (continuación). Definiciones de Responsabilidad Social.

No.	AUTOR(ES)	DEFINICIÓN
6	Termes (1995)	Crear riqueza para todos los participantes en la empresa y prestar un verdadero servicio a la comunidad donde se halla ubicada.
7	González (2004)	Cuando además de lograr los objetivos empresariales, aporta beneficios al individuo, a sus colaboradores y a los grupos familiares de los mismos, beneficia su entorno y cuando al hacer una retrospectiva vea que ha cumplido cabalmente con los principios cívicos y ciudadanos, con las reglas éticas y morales, con la normatividad legal a la cual pertenece; en fin, cuando a conciencia puedan estar seguros de que actuaron siempre en la vía correcta y no causaron daño alguno.
8	Guerrero (2001)	Es un modelo de trabajo y organización que permite retribuir a la sociedad lo que ésta toma de ella. Es una forma de hacer negocio de manera sustentable, teniendo una sólida visión de futuro, apostando a la perdurabilidad de la empresa teniendo presente el respeto al medio ambiente a través de políticas sólidas, que generen un adecuado local de trabajo, con condiciones materiales apropiadas; es vincularse a la comunidad, es respetar los derechos humanos, es trabajar con apego a la ética y a los valores.
9	Andrews (1977)	Es el cuarto componente de la estrategia (siendo los otros tres las oportunidades de mercado, las competencias y sus recursos, las aspiraciones y valores del personal de la organización).

Fuente: Material seleccionado de Vargas y Vaca (2005: 245); Alonso, Rodríguez, Cortés y Abreu (2012: 59); así como de Pelekais y Aguirre (2008: 19-24).

Cuadro 2. Ejemplos de iniciativas de responsabilidad social.

No.	ACTIVIDAD
1	* Aportación financiera para ampliar las instalaciones de un centro de atención para enfermos de Alzheimer. * Sostenimiento parcial de centros para la recuperación de drogadictos.
2	* Restauración de bibliotecas públicas. * Asociación con organizaciones no gubernamentales para mejorar los equipos informáticos de los colegios públicos.
3	Donación de una parte de las ventas para organizaciones no gubernamentales promotoras de la reforestación.
4	* Financiamiento de temporadas de conciertos en teatros de ópera lírica. * Patrocinio de una muestra de obras de arte de jóvenes desempleados.
5	Financiamiento de campañas de educación vial buscando que se produzcan menos accidentes.
6	Inversión de dinero (mediante una fundación), para abastecer un museo de cultura indígena.
7	Donación de parte de los ingresos para crear aldeas infantiles en Brasil para niños en situación de abandono.

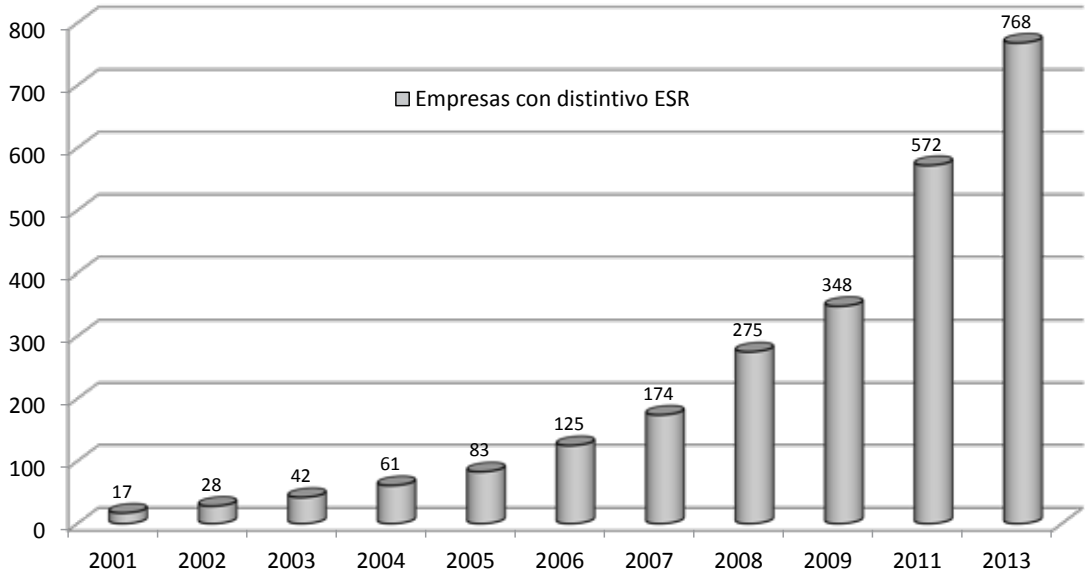
Fuente: Recopilación a partir de Sandri (2002).

Aunque originalmente las actividades de responsabilidad social no persiguen un fin lucrativo, se reconoce que las empresas con este perfil dentro de su operación, también son las que registran el mejor desempeño financiero sobre sus ventas y beneficios (Vaca, Moreno y Riquel, 2007). Claramente, existe una relación entre la reputación de la empresa y su dinámica de ventas (o sus ganancias). En parte, también por este vínculo, las organizaciones tienen un estímulo para adoptar perfiles de responsabilidad social. Una validación de esta concepción pueda encontrarse en Alonso et al. (2012), quienes para el período 2001-2009 encontraron una relación positiva entre el

desempeño financiero de diecinueve empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y el hecho de contar con una acreditación como organizaciones socialmente responsables. Utilizando como indicadores de desempeño financiero las variables rendimientos sobre activos (ROA), rendimiento sobre capital (ROE), utilidades por acción (UPA) y la ratio de precio entre valor de libros (P/VL), estos autores encuentran evidencia estadística de creación de riqueza en las empresas que durante ese período, adoptaron prácticas de RSE.

En México, el CEMEFI (Centro Mexicano para la Filantropía) y la Alianza por la Responsabilidad Social Empresarial (AliaRSE), otorgan el denominado Distintivo ESR como un reconocimiento a las empresas socialmente responsables que cumplen con cuatro ámbitos: (1) calidad de vida en la empresa, (2) ética empresarial, (3) vinculación de la empresa con la comunidad, (4) cuidado y preservación del medio ambiente (CEMEFI, 2015; FESAC, 2011). Como un indicador del interés que esta imagen ha alcanzado en México, en los años recientes se ha incrementado sustancialmente el número de organizaciones empresariales que cuentan con tal certificado (ver Figura 1). Sin embargo, no todo es siempre favorable. En general, los pros y contras del enfoque de responsabilidad social en las empresas pueden resumirse como se muestra en el Cuadro 3. Para fines de esta investigación, el interés radica en analizar el impacto del costo en que se incurre al realizar actividades de responsabilidad social en la organización. En adición a las ideas previamente mencionadas, debe tenerse en cuenta que si se carece de un manejo adecuado, es posible que un esfuerzo desmedido de la empresa en actividades socialmente responsables, termine por provocarle un efecto adverso en sus ganancias, e incluso, pueda propiciar su salida del mercado. Para tratar de abordar tales posibilidades, tanto a favor como en contra, en el presente documento se propone una forma de modelación que incorpora el concepto de responsabilidad social en la teoría microeconómica estándar. En principio, la modelación aquí propuesta podría ayudar a responder la pregunta planteada por Lamb, Hair y McDaniel (2009), la cual sin duda alguna, está en la mente de muchos: "¿Tienden las compañías socialmente responsables a ser más o menos redituables que otras?" (p. 69).

Figura 1. Incremento de las organizaciones con distintivo de Empresa Socialmente Responsable (ESR) en México (período 2001-2013).



Fuente: Elaboración propia con información de: Alonso et al. (2012), FESAC (2011) y Trejo (2013).

2. Materiales y métodos.

Los casos de monopolio y competencia perfecta se consideran situaciones extremas de las posibles estructuras de mercado en una economía o un sector productivo (Varian, 1999). En este artículo, se trabajarán con los casos del monopolio ordinario lucrativo y las empresas en competencia perfecta, para analizar los casos extremos de un mercado antes de abordar escenarios de tipo oligopólico o de competencia imperfecta en general.

De inicio, se considerará un monopolio que produce la cantidad Q de una mercancía, bajo la siguiente curva de demanda: $Q = a + \alpha - P$, donde P es el precio del bien y α es un parámetro que representa el grado de aceptación de los consumidores hacia la empresa, esto es, representa la imagen que perciben de la organización, tal que $\alpha \in [0,1]$ haciendo referencia a una escala porcentual, con uno (100%) como la empresa con "imagen perfecta" y cero (0%) para la organización con la peor imagen posible.

Cuadro 3. Argumentos a favor y en contra de la Responsabilidad Social Corporativa.

A FAVOR	EN CONTRA
Las empresas son parte integrante de la sociedad.	Las empresas deben dedicarse a lo que saben hacer y es su misión: Producir aquello que la gente desea de la forma más eficaz posible.
Las empresas deben recompensar no sólo a propietarios y accionistas, sino a cualquier otra persona involucrada (clientes, consumidores, proveedores, empleados).	Los recursos de la empresa deben dirigirse según el principio del máximo beneficio.
La RSC es rentable a mediano y largo plazo.	Solventar los problemas de la sociedad es competencia de otros órganos e instituciones.
Las empresas tienen personas y medios técnicos calificados para afrontar gran parte de los problemas que afectan a la sociedad.	Los clientes saldrían perjudicados porque se produciría un aumento generalizado de los precios.
Las intervenciones públicas se producirían en la medida que las empresas no asuman sus responsabilidades.	Las empresas tienen ya el poder económico. Si invaden otros campos acabarían poseyendo el poder social y el político.

Fuente: Vargas y Vaca (2005).

Nótese que el efecto de α es el de establecer una relación entre la demanda del producto y la imagen de la empresa. Por otro lado, la imagen empresarial debe responder a un efecto impulsor, que en este trabajo se asumirá corresponde al gasto en actividades de beneficio social, el cual se representará con c_{RS}, tal que: $\alpha = \alpha(c_{RS})$. Concretamente, se propone que tanto el gasto en

actividades de responsabilidad social como el grado de aceptación debido a la imagen empresarial, se vinculan mediante la expresión:

$$\alpha = \chi\left(1 - e^{-\beta c_{RS}}\right)$$

con χ como el grado de eficiencia al difundir al público información sobre la labor social de la compañía y β siendo la valoración (o indiferencia) de los consumidores hacia la responsabilidad social corporativa. Además, se asumirá que la empresa tiene una función de costos totales, CT, dada por: $CT = (c + c_{RS})Q$ donde $c > 0$ tal que $a > c + c_{RS}$; además $c_{RS} \geq 0$. Como ya se mencionó, c_{RS} se refiere al costo en el que la empresa incurre por realizar actividades de responsabilidad social. Se resume algebraicamente el modelo propuesto en el Cuadro 4.

Para el caso de competencia perfecta, se siguen los supuestos habituales (Varian, 1999; González y Martí, 2006) con la excepción de incluir también el efecto del gasto c_{RS} y la imagen percibida por los consumidores (α), como se hizo en la demanda del monopolio.

Cuadro 4. Resumen de la modelación propuesta.

ECUACIONES		No.
Función directa de demanda	$Q = a + \alpha - P$	(1)
Función inversa de demanda	$P = a + \alpha - Q$	(2)
Imagen empresarial percibida	$\alpha = \chi\left(1 - e^{-\beta c_{RS}}\right)$	(3)
Función de costos	$CT = (c + c_{RS})Q$	(4)

RESTRICCIONES	No.
$\alpha \in [0,1]$	(5a)
$\chi \in [0,1]$	(5b)
$\beta > 0$	(6a)
$c > 0$	(6b)
$a > c + c_{RS}$	(7)
$c_{RS} \geq 0$	(8)

Fuente: Elaboración propia.

3. Resultados.

Se presentan en primer lugar las consecuencias de la modelación propuesta sobre las ganancias del monopolio ordinario lucrativo (y otras variables de interés), seguido de un análisis de la dinámica subyacente en el modelo como explicación de los cambios observados respecto a la teoría microeconómica estándar, para continuar con la adecuación del caso de competencia perfecta y cerrar con una comparación entre ambas estructuras de mercado.

Recordando la definición de ganancia para una empresa que maximiza su utilidad[2]:

[2] Se sigue la presentación de González y Martí (2006) así como la de Carrasco, Iglesia, Gracia, Huergo y Moreno (2003) en la resolución del modelo del monopolio.

$$B = I - C = PQ - (c + c_{RS})Q = (a + \alpha - Q)Q - (c + c_{RS})Q$$

Entonces, el beneficio del monopolio ordinario está dado por:

$$B = (a + \alpha - c - c_{RS})Q - Q^2$$

Optimizando esta función, se obtiene un máximo beneficio cuando la producción es de:

$$Q_{opt} = \frac{a + \alpha - c - c_{RS}}{2}$$

La cual se garantiza que será positiva por la restricción dada en (7). En concreto, el mayor beneficio que disfrutará la empresa será:

$$B_{max} = B(Q_{opt}) = \left(\frac{a + \alpha - c - c_{RS}}{2}\right)^2 = \frac{(a + \alpha - c - c_{RS})^2}{4}$$

En el Cuadro 5 se presentan los resultados de equilibrio del modelo y se contrastan con la teoría estándar. Lo primero que puede destacarse es que el nuevo término de imagen empresarial (α) tiene un efecto positivo sobre la ganancia y, antes, sobre la demanda (siempre que la difusión de las actividades sea apropiada, lo cual implica un $\chi \to 1$). El segundo punto a destacar es que el gasto en actividades de responsabilidad social (C_{RS}) es quien impulsa una imagen favorable, pero, dicho elemento tiene un efecto por una parte positivo y por otra parte negativo sobre el beneficio: Como tal, C_{RS} no deja de ser un gasto, por lo que aumenta el costo total de operación del monopolio, no obstante, el impacto positivo de un C_{RS} mayor está en la forma como aporta a través de α, por lo cual, la combinación simultánea de efectos puede generar una respuesta no lineal en el beneficio. A continuación, se explora tal posibilidad con simulaciones representativas realizadas en la hoja de cálculo de Excel. En primer lugar, en la medida que la empresa monopólica dedica más recursos monetarios, consigue una mejora pronunciada en su imagen corporativa ante los consumidores (Figura 2), con lo cual estos últimos incrementarán su disposición a comprar el producto; nótese, sin embargo, que tal tendencia se vuelve decreciente en rendimientos de C_{RS} a partir de cierto nivel de gasto, por lo cual, no debe esperarse que un gasto creciente sea igual de efectivo (en diferentes momentos) como herramienta de mejora de la imagen corporativa. En la Figura 3 se muestra que conforme aumenta el gasto en actividades de responsabilidad social, la ganancia del monopolio se incrementa respecto al caso donde $C_{RS} = 0$ correspondiente a la teoría microeconómica ortodoxa, hasta alcanzar un máximo nivel de beneficio y entonces éste empieza a decrecer; en principio, este comportamiento sugiere que los niveles excesivos de gasto C_{RS} terminan por anular cualquier ventaja derivada de una mejor imagen corporativa; al final de cuentas, la empresa monopólica bajo análisis, sigue siendo

lucrativa y quizá en tales niveles de gasto C_{RS}, se está excediendo en su intención como empresa socialmente responsable. Pese a este detalle, llama la atención el hecho aparente de que aún los niveles excesivos de C_{RS} parecen dar lugar a ganancias superiores respecto al caso de C_{RS} nulo. Siendo tan favorable para el monopolio decidirse por tener un perfil de responsabilidad social, cabría revisar dos aspectos necesarios para que tal decisión tenga éxito: (1) la preferencia (o indiferencia) del consumidor por empresas socialmente responsables al momento de decidir una compra de mercancías; y (2) la eficiencia en la difusión de los logros de la empresa en este rubro; aspectos que en el modelo propuesto se incorporan mediante los parámetros β y χ, y cuyos efectos se muestran en las Figuras 4a y 4b.

Cuadro 5. Equilibrio del Monopolio Ordinario.

MONOPOLIO ORDINARIO (LUCRATIVO)		
	Caso CON actividades de responsabilidad social ($C_{RS} \neq 0$)	Caso SIN actividades de responsabilidad social ($C_{RS} = 0$)
Ganancia máxima	$\frac{(a+\alpha-c-c_{RS})^2}{4}$	$\frac{(a-c)^2}{4}$
Producción óptima	$\frac{a+\alpha-c-c_{RS}}{2}$	$\frac{a-c}{2}$
Precio de equilibrio	$\frac{a+\alpha+c+c_{RS}}{2}$	$\frac{a+c}{2}$
	MODELO EXTENDIDO (en este trabajo)	MODELO ORIGINAL

Fuente: Elaboración propia.

Figura 2. Comportamiento de la imagen empresarial percibida, en función del gasto en actividades de responsabilidad social.[3]

Fuente: Elaboración propia.

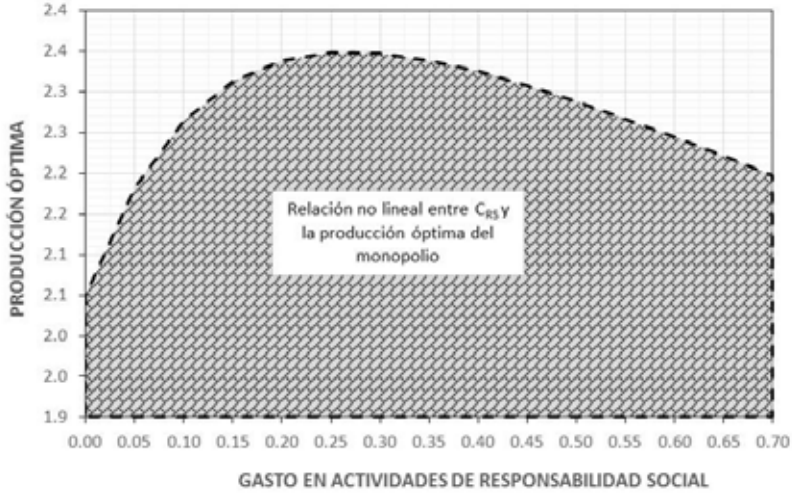
La Figura 4a sugiere que cuando el consumidor es indiferente a las acciones socialmente responsables por parte de las empresas, será infructuoso el esfuerzo presupuestal de la organización. Pero, en la medida que el consumidor tenga mayor interés y aceptación por tales acciones, la empresa tendrá una mayor posibilidad de que la demanda de su producto se incremente como resultado de la mejora en su imagen corporativa. De esta forma, a partir de la Figura 4a podemos ver que el conocimiento del perfil del consumidor respecto a las actividades de responsabilidad social, es de suma importancia y debe tenerse en consideración antes de instrumentar cualquier actividad al respecto. Por otro lado, la Figura 4b reproduce la intuición de que una mala ejecución en la difusión de las actividades de responsabilidad social hace inútil el esfuerzo de la organización por mejorar su imagen corporativa, solamente una difusión apropiada (tal que $\chi \to 1$) hará que el presupuesto C_{RS} sea realmente efectivo en dicho sentido.

En el contexto microeconómico en sí, una posible explicación de los resultados de simulación aquí presentados se reproduce gráficamente en la Figura 5, como la manifestación de la siguiente cadena de efectos: Cuando el agente monopólico emprende acciones socialmente responsables, debe presupuestar un gasto adicional que se sumará a sus costos habituales (parte inferior de la Figura 5). Si la ejecución es apropiada y su difusión es correcta, la realización de tales actividades propiciará una mejor imagen corporativa ante los consumidores (cuando éstos tengan el perfil de

[3] Resultados obtenidos usando $\beta = 1.3$ y $\chi = 1.0$ en la expresión 3.

aceptación de las mismas, no de indiferencia). Tal mejora de imagen, inducirá una mayor adquisición del producto respecto al caso inicial (con $C_{RS} = 0$), con lo cual el monopolista ordinario tendrá una oportunidad para incrementar el precio del bien, aunque esto implique una disminución en la cantidad vendida. La interacción de ambos efectos, el comportamiento de la demanda del bien y el cambio en el precio, puede generar un ingreso más alto. En contraste, paralelamente los costos también están creciendo, pues ahora hay un concepto C_{RS} que antes no formaba parte de la estructura de costos. Con esta combinación de efectos entre ingresos y costos crecientes, la respuesta del mercado manifiesta en la ganancia del monopolio es no lineal y depende fuertemente de qué tan cerca se encuentre el C_{RS} del punto en donde comienza a tener rendimientos cada vez más cercanos a cero (Figura 2); esto es, se podrán alcanzar incrementos continuos en el máximo beneficio posible solo hasta cierto límite de gasto socialmente responsable (C_{RS}), con el peligro de que si tal gasto crece "demasiado", reducirá los beneficios hasta su menor nivel.

Figura 3. Producción y ganancia máxima obtenida por el monopolio en función del gasto dedicado para actividades de responsabilidad social. [4]

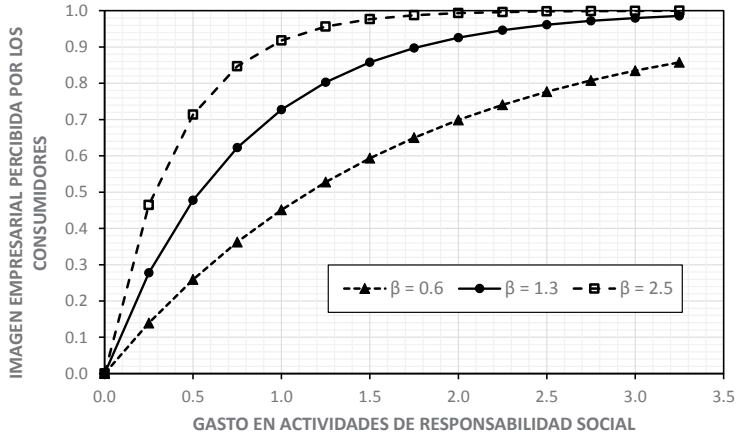


[4] Para hacer esta simulación se tomaron valores de: a = 4.8, c = 0.7, $\beta = 7.5$ y $\chi = 1.0$, en la ecuación de ganancia.

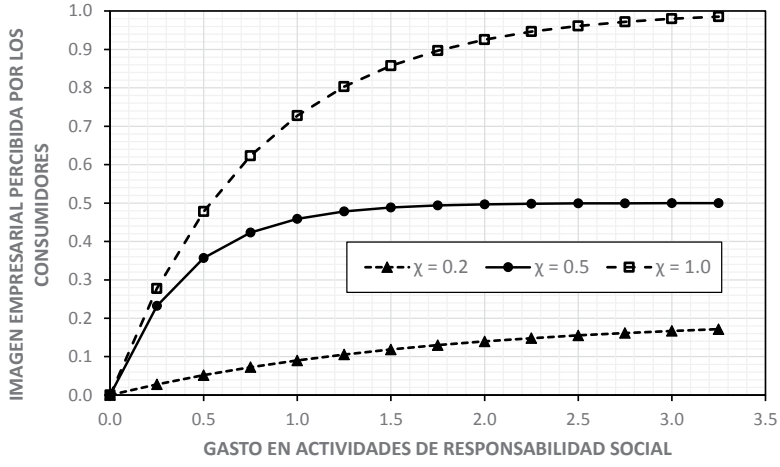
Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Impacto de los parámetros estructurales sobre la imagen corporativa.

(a) Efecto de la importancia que los consumidores dan a la responsabilidad social.



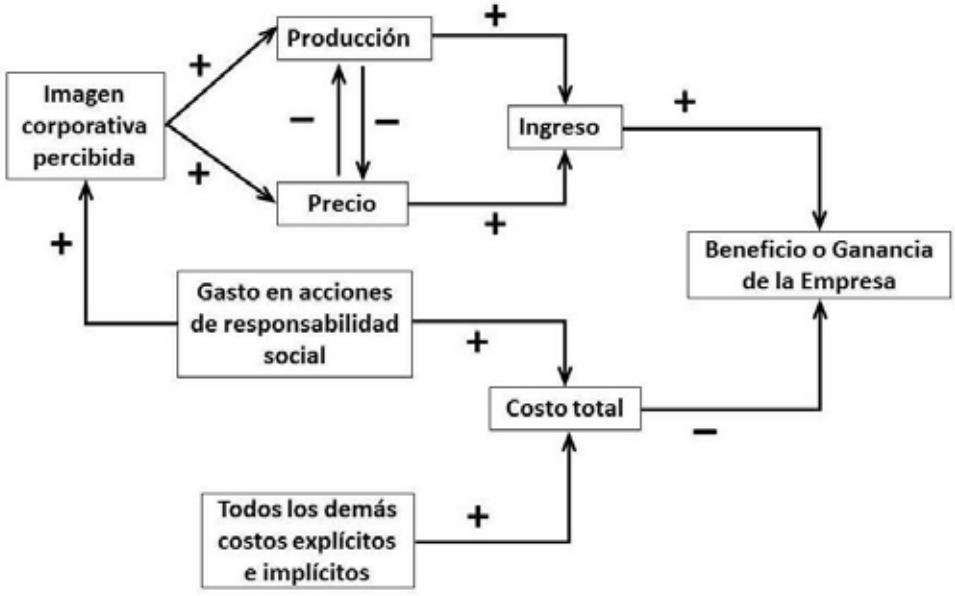
(b) Efecto de la eficiencia en la difusión de los logros en materia de responsabilidad social.



Fuente: Elaboración propia.

Para cerrar el caso del monopolio ordinario lucrativo, se calcularon los excedentes de producción y de consumo así como las funciones de bienestar social (Cuadro 6), posteriormente, se ensayó su comportamiento por simulación, encontrándose también que las acciones de responsabilidad social corporativa pueden generar intervalos de crecimiento máximo en cada una de las tres formas de bienestar, siempre que no se alcancen costos excesivos durante su operación (en la Figura 6 se reproduce un caso representativo). Además, se destaca que el monopolio lucrativo se queda con dos tercios del bienestar social, en tanto, los consumidores alcanzan la mitad del excedente del productor, es decir, un tercio del bienestar total (Cuadro 6 y Figura 6).

Figura 5. Diagrama de la cadena de efectos entre las actividades de responsabilidad social y su financiamiento (C_{RS}), en la dinámica de ganancias.

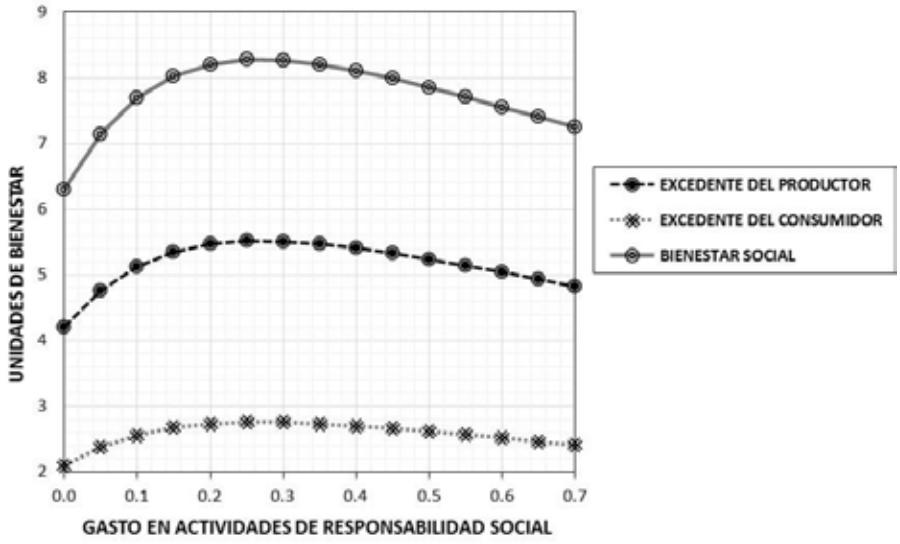


Fuente: Elaboración propia.

Con respecto al escenario de competencia perfecta, el equilibrio del mercado se produce al igualarse las curvas de oferta y demanda de mercado (Carrasco et al., 2003), esto es:

$$\left.\begin{matrix} Q^s: P = CM_g = c + c_{RS} \\ Q^d: P(Q) = a + \alpha - Q \end{matrix}\right\} Q^s = Q^d \Leftrightarrow Q^{CP} = a + \alpha - c - c_{RS}$$

Figura 6. Monopolio y Bienestar social: Comportamiento por sectores. [5]



Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 6. Función de bienestar social obtenido y desagregación por elementos: Monopolio.

MONOPOLIO ORDINARIO (LUCRATIVO)		
	Caso CON actividades de responsabilidad social ($C_{RS} \neq 0$)	Caso SIN actividades de responsabilidad social ($C_{RS} = 0$)
Excedente del Productor	$\frac{(a+\alpha-c-c_{RS})^2}{4}$	$\frac{(a-c)^2}{4}$
Excedente del Consumidor	$\frac{(a+\alpha-c-c_{RS})^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$
Bienestar o Excedente Social	$\frac{3(a+\alpha-c-c_{RS})^2}{8}$	$\frac{3(a-c)^2}{8}$
	MODELO EXTENDIDO (en este trabajo)	MODELO ORIGINAL

Fuente: Elaboración propia.

En el Cuadro 7 se recopilan la totalidad de los resultados para las empresas en competencia perfecta que adoptan una estrategia de responsabilidad social modelada como se propone en este trabajo. Por comparación de los Cuadros 5, 6 y 7, puede observarse que se mantienen los

[5] Se utilizaron los mismos valores para los parámetros que los considerados en la Figura 2.

resultados de la teoría económica estándar: el precio de equilibrio en competencia perfecta es menor al del monopolio; por ende, el monopolista produce una cantidad inferior; el excedente del productor es mayor para la empresa monopólica, pero ocurre lo contrario para el excedente del consumidor; existe una pérdida de eficiencia al operar una estructura de mercado en lugar de la otra: el bienestar social en mercados competitivos supera al del monopolio (Figura 7).

Cuadro 7. Equilibrio y Funciones de Bienestar: Mercado Competitivo.

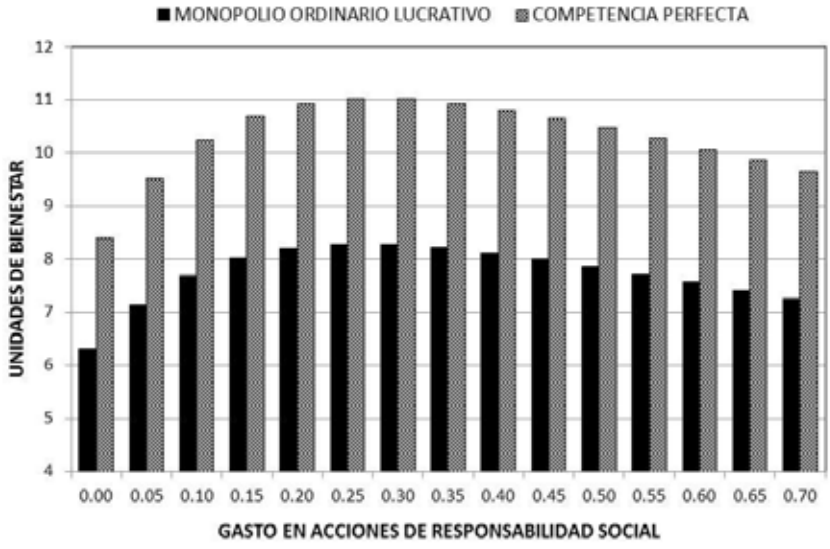
EQUILIBRIO EN COMPETENCIA PERFECTA		
	Caso CON actividades de responsabilidad social ($C_{RS} \neq 0$)	Caso SIN actividades de responsabilidad social ($C_{RS} = 0$)
Ganancia máxima	0	0
Producción óptima	$a + \alpha - c - c_{RS}$	$a - c$
Precio de equilibrio	$c + c_{RS}$	c
BIENESTAR COMPETITIVO		
Excedente del Productor	0	0
Excedente del Consumidor	$\frac{(a + \alpha - c - c_{RS})^2}{2}$	$\frac{(a - c)^2}{2}$
Bienestar Social	$\frac{(a + \alpha - c - c_{RS})^2}{2}$	$\frac{(a - c)^2}{2}$
	MODELO EXTENDIDO (en este trabajo)	MODELO ORIGINAL

Fuente: Elaboración propia.

Con respecto a los cambios en el comportamiento en mercados competitivos debidos a la inclusión de perfil de responsabilidad social, los resultados son similares a los que se presentaron para la organización monopólica, como se muestra en la Figura 7. Finalmente, en la Figura 8 y el Cuadro 8 se muestran los resultados derivados del modelo, en lo que se refiere al poder de mercado aproximado por el índice de Lerner. Cuando se trata del caso de competencia perfecta, el poder de mercado sigue siendo nulo, en concordancia con la teoría estándar, pero en situación de

monopolio ordinario, la firma tiene una buena oportunidad para incrementar sustancialmente el precio del bien a partir de una decidida política de responsabilidad social (Figura 8); sin embargo, nuevamente se manifiesta el comportamiento general visto en las variables previas: las acciones de responsabilidad social no propician un alza permanente en el índice de Lerner; el poder de mercado se ve favorecido por un mayor gasto C_{RS}, pero no para cualquier magnitud de gasto, tal como ocurre cuando la variable dependiente es la ganancia de la firma y/o el nivel de producción (Figura 3).

Figura 7. Bienestar social: Monopolio versus Mercado Competitivo. [6]



Fuente: Elaboración propia.

Figura 8. Dependencia del poder de mercado con el gasto en responsabilidad social para el caso del monopolio ordinario lucrativo.[7]

[6] Se utilizaron los mismos valores para los parámetros que los considerados en la Figura 2.

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro 8. Resultados analíticos sobre la relación entre poder de mercado y responsabilidad social. Casos: Competencia perfecta versus mercado monopólico.

PODER DE MERCADO	RESPONSABILIDAD SOCIAL	
	SI	NO
Competencia Perfecta	0	0
Monopolio Ordinario Lucrativo	$\frac{(a+\alpha)-(c+c_{RS})}{(a+\alpha)+(c+c_{RS})}$	$\frac{a-c}{a+c}$

Fuente: Elaboración propia.

4. Conclusiones.

En la actualidad, no se ha incorporado el enfoque de empresas socialmente responsables en la teoría microeconómica estándar, en buena medida porque el concepto de responsabilidad social y sus alcances siguen en construcción. En este artículo, se ha mostrado una posible extensión de dicho marco teórico utilizando tal concepto. De entrada, el modelo propuesto trata de formalizar algunas ideas básicas que pueden ser útiles para posteriormente abordar aspectos no tan obvios de la dinámica empresarial. En concreto, se muestra que la realización de acciones socialmente

[7] Se utilizaron los mismos valores para los parámetros que los considerados en la Figura 2.

responsables tiene un efecto en general favorable en las estructuras de mercado más extremas: la competencia perfecta y el monopolio ordinario lucrativo. De acuerdo con las simulaciones ensayadas, una adecuada ejecución de tales acciones, aunado a una correcta difusión de las mismas entre los consumidores, tiene un efecto positivo sobre la demanda del bien, y en principio, sobre las ganancias de la empresa, pero este vínculo no presenta siempre el mismo comportamiento: Existen intervalos de "gasto socialmente responsable" (C_{RS}) que dan lugar a los mayores beneficios, aunque si este tipo de gasto es demasiado alto, la empresa termina por colapsar sus ganancias (independientemente de si está en competencia perfecta o si es un monopolio ordinario). De esta forma, el modelo desarrollado ofrece una justificación teórica de la conveniencia de introducir prácticas socialmente responsables pero sin rebasar ciertos límites.

Para trabajos posteriores, en cuanto a la teoría, será conveniente aplicar este enfoque de modelación en otras estructuras de mercado, como los oligopolios, o bien, en aspectos como la diversificación de productos, y analizar sus implicaciones. En lo que se refiere a la parte práctica, deben evaluarse empíricamente los resultados teóricos obtenidos, pues la determinación de intervalos de operación adecuados (variando el "gasto socialmente responsable") solo podrá hacerse para las condiciones particulares de cada empresa.

Bibliografía

Alonso Almeida, M. M., Rodríguez García, M.P., Cortéz Alejandro, K.A., y Abreu Quintero, J.L. (2012). La responsabilidad social corporativa y el desempeño financiero: Un análisis en empresas mexicanas que cotizan en la Bolsa". *Contaduría y Administración*, 57 (1): 53-77.

Carrasco, A., Iglesia, C. de la, Gracia, E., Huergo, E., Moreno, L. (2003). *Microeconomía intermedia: Problemas y cuestiones*. Madrid: McGraw-Hill.

Centro Mexicano para la Filantropía (CEMEFI) (2015, 13 de Marzo). Empresas que obtuvieron el distintivo ESR 2015. Recuperado el 18 de Marzo de 2015, de: www.cemefi.org/esr.

Fundación del Empresariado Sonorense, A. C. (FESAC) (2011). Empresa socialmente responsable. Recuperado el 10 de Marzo del 2015, de: www.fesac.org/empresa.html.

González Moralejo, S.A., y Martí Selva, M.L. (2006), *Microeconomía práctica: Problemas resueltos y cuestiones tipo test*. Valencia: Editorial Universidad Politécnica de Valencia.

Lamb, C. W., Hair, J.F. & McDaniel, C. (2009). *Marketing*. México: Cengage Learning Editores.

Pelekais, C., y Aguirre, R. (2008). *Hacia una cultura de responsabilidad social*. México: Pearson.

Sandri, P. M. (2002). *Dinero ético: La economía alternativa y solidaria*. Barcelona: Plaza & Janés Editores.

Trejo, L. (2013, 9 de Abril). Responsabilidad social se fortalece: CEMEFI. *El Economista*. Recuperado el 6 de Marzo del 2015, de: http://eleconomista.com.mx/industrias/2013/04/09/responsabilidad-social-se-fortalece-cemefi.

Vaca Acosta, R.M., Moreno Domínguez, M.J., Riquel Ligero, F. (2007). Análisis de la responsabilidad social corporativa desde tres enfoques: Stakeholders, capital intelectual y teoría institucional. En J.C. Ayala Calvo (Coords.), *Conocimiento, innovación y emprendedores: Camino al futuro* (pp. 3130-3143). España: Universidad de La Rioja.

Vargas Sánchez, A., y Vaca Acosta, R.M. (2005). Responsabilidad social corporativa y cooperativismo: Vínculos y potencialidades. *Revista de Economía Pública, Social y Cooperativa*, (53): 241-260.

Varian, H. (1999). *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual*. Barcelona: Antoni Bosch Editor.

CAPÍTULO XXXVI

Determinants of Economic Growth in a Small Open Economy with Natural Resource Abundance.

M. Salem Mohamed-Embarek-Sidi

Instituto Politécnico Nacional

Adrian Hernandez-del-Valle

Instituto Politécnico Nacional

Claudia I. Martinez-Garcia

Instituto Politécnico Nacional

Abstract

How can a small open resource wealthy economy avoid the curse of natural resources? We develop a general equilibrium model that finds a transmission mechanism to constant ongoing growth for a fledgling small open economy having access to international markets. The model generates a long-run equilibrium in which a non renewable resource sector of limited amount can coexist with constant ongoing consumption elsewhere. We find a dynamic multiplier mechanism that allows us to analyze the movement of domestic income equilibria.

JEL: F43, O41, Q22

Keywords: Endogenous growth; Renewable resources; Macroeconomic dynamics

1. Introduction

How can a country avoid the curse of natural resources abundance? Literature on the subject explains why economies may incur the curse, but avoid the subject of how a country can dodge it. Extensive empirical evidence suggests that natural resources have an adverse effect on the equilibrium growth rate. Other studies based on the post-war experience have argued that the curse of natural resources abundance is a demonstrable empirical fact.

To explain the negative relationship, several hypotheses have been advanced such that greater abundance of resources may cause economies to shift away from competitive sectors in which externalities necessary for ongoing growth are generated [see, e.g. Sachs and Warner (1995)]. Rodriguez and Sachs (1999) argue that resource-rich countries are likely to live beyond their means during the transitional phase while the stock of its resource is being depleted.

Gylfason et al.(1999) consider that resource intensive economies are likely to be associated with a more volatile exchange rate, which in turn is likely to inhibit investment and growth. Nordhaus (1992) considers that faster population growth increases the pressure on the finite resource, thereby reducing per capita growth. Solow (1974) suggests that introducing a non renewable resource in the neoclassical growth model is unsatisfactory, because it would rely too heavily on the rate of technical change for a model to be plausible.

Farzin (1984) explains that a higher discount rate can slow resource extraction, if the resource process is sufficiently capital intensive. Finally, Chichilnisky (1998), incomplete property rights can create a basis for trade, causing countries with weak institutions of ownership to specialize in production of commodities that use unowned resources intensively. The underlying problem that motivates most of the previous work is a concern with resource scarcity. In general, the curse has to do with some type of pro-cyclical exuberant spending during a commodity price expansion; and spending fails to adjust when prices fall. In spite of the literature and the evidence, there are countries that manage to avoid the curse. Our objective is to provide an explanation on this matter.

An example is Botswana[1], its impressive economic record has been built on a foundation of diamond mining, prudent economic and financial policies. Known for huge reserves of mineral wealth, specially diamonds, which are the main engine of economic development, the country's development path has been steered in a manner that has largely avoided both the resource curse and theòmineral-led economy syndrome known as the Dutch disease.

Its real GDP growth is estimated to have increased to 5.4 per cent in 2013 from 4.2 per cent in 2012. The country´s predominant mining sector registered a rebound in spite of the impact of the sluggish global prospects.

[1] Botswana Central Statistical Office. 2015. External Monthly Trade Digest January. Gaborone. http://www.cso.gov.bw/.

Botswana overcame the threat of the natural resource curse, most significantly by government investment in public goods and infrastructure. The government also took measures to help boost productivity, by limiting state-owned companies and avoiding import substitution policies. The government established savings funds and avoided typical pro-cyclical behavior and real exchange rate volatility.

In this work we establish a positive link between natural resource abundance and the economic growth rate. We develop a model for a small open economy that exports renewable and non-renewable resources to international markets and obtains revenues which are used to purchase capital, consumption goods or invested in international financial markets. This policy has characterized a number of small economies.

Our research is based on the work of Eliasson and Turnovsky (2004). But differs from the previous because it generalizes that work to the use of two kinds of natural resources, renewable and nonrenewable resources. Also, we add a production function of Shell (1966) type. The dynamics of technological progress is taken into account and the optimal solutions and the macroeconomic equilibrium are derived.

Finally, we prove that abundance of natural resources does not impair economic growth when the revenues generated by the sales of natural resources are saved in order to be transformed into augmenting physical capital and future consumption.

The reminder of the paper is structured as follows. In Section 2 we introduce the technologies of natural resources and of final production. Section 3 is an outline of the model. Section 4 presents the model. Section 5 derives the macroeconomic equilibrium and the qualitative analysis; and Section 6 has our conclusions.

2. Technologies

We start by presenting the technologies of natural resources used in an economy, with no natural resource extraction costs and constant elasticity of demand for resources. Then the production function of the final output, Y_t which we consider depends directly on physical

capital, K_{y_t} ---we also call physical capital, capital stock domestic investment---and the stock of technology, A_{y_t} and indirectly on the revenues generated by the sale of exports.

The accumulation of knowledge is explicitly dependent on the amount of resources devoted to inventive activity, Shell (1966).

2.1 Technology of the Renewable Resource

Formally, we assume that the amount of growth of the renewable resource, G_t, is some function of the current stock level, M_t, so that $G_t = [\![G(M]\!]_t)$. Given this, we can write the relationship between the change in the resource stock and the rate of harvesting the resource as:

$$\dot{M}_t = G(M_t) - h_t, \quad M_{t=0} = M_0, \quad \text{with} \quad M_0 \quad \text{given} \qquad (1)$$

$h_t \geq 0$ for all t is the rate of harvesting. In order to maintain its existence for an infinite time, the model stipulates some minimum and maximum acceptable levels of the resource in each instant of time. We consider that is the minimum viable stock size $\underline{M}$ and $\overline{M}$ is the carrying capacity of the environment, or the maximum stock of the resource that the environment can sustain.

We assume that the renewable resource has an intrinsic time-invariant growth rate, the maximal rate at which the resource would grow under ideal conditions, denoted by g. This is the proportional rate at which the resource stock would grow when the size is small relative to the resource size at which growth stops
- carrying capacity of the renewable resource.

Note that g is the natural growth reproduction rate while $[\![G(M]\!]_t)$ is the gross reproduction rate.

Equation (1) may be expressed as

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M}_t = g\left(1 - \frac{M}{\overline{\overline{M}}}\right) M_0 - h_t \tag{2}$$

equation (2) is a logistic equation to represent resource growth. In the logistic equation, the rate of resource growth, $\frac{dM}{dt}$, slows as the interval between $\underline{M}$ and $\overline{M}$ becomes small. The size of the interval is given by the *carrying capacity*---the carrying capacity of a biological species in an environment is the maximum population size of the species that the environment can sustain indefinitely, given the food, habitat, water, and other necessities available in the environment---. We will call the size of the interval the *size of the resource*.

When $\underline{M}$ equals $\overline{M}$ the right side of the equation becomes zero. Therefore, as resource size decreases, the logistic growth rate becomes a smaller and smaller fraction of the exponential growth rate; and when $\underline{M}$ equals $\overline{M}$ resource growth ceases.

The reproduction function below is assumed to be concave in the current stock of the resource M_t, and is typically positive in an interval between $\underline{M}$ and $\overline{M}$.

For simplicity, we shall set $\underline{M} = 0$ and shall assume that the growth of the resource, $G(M_t)$, is governed by the resource renewal function given by

$$G(M_t) = g\left(1 - \frac{M}{\overline{\overline{M}}}\right) M_0, \quad g > 0. \tag{3}$$

In the absence of harvesting at time t, $h_t = 0$, M_t converges to its maximum sustainable stock, $\overline{M}$. This logistic form is a good approximation to the natural growth process of many fish, animal and bird populations; and indeed to some physical systems.

The harvesting of the natural resource requires economic resources and we shall make the assumption that h_t depends upon non-technical labor, L_h, in accordance with the production function

$$h_t = BL_h^{(1-\beta)}, \quad 0 < \beta < 1 \tag{4}$$

where L_h is the amount of labor; the constant, B, reflects the possibility that the renewable resource sector employs a fixed amount of capital. Equation (4) implies that harvest from applying a given effort in the area where the resource is located is independent of the stock size.

2.2 Technology of the Non-Renewable Resource

The non-renewable resource has an initial stock, S_0, and its use over time is constrained to be equal to this fixed initial stock.

Let Ω represent the rate of extraction of the non-renewable resource and S_t be the existing stock at time t; we can write this constraint as

$$S_t = S_0 - \int_0^t \Omega_s \ ds, \quad S_0 \ \text{given}. \tag{5}$$

This equation states that the stock remaining at time t, S_t is equal to the magnitude of the initial stock, S_t, less the amount of the resource extracted, Ω over the time interval from 0 to t.

By differentiating this equation with respect to time, we have

$$\dot{S}_t = -\Omega_t \tag{6}$$

assuming $S_{t=0} = S_0$; T is an arbitrary terminal time, and $\Omega_t \geq 0$, $-\dot{S}_t$ is inversely proportional to the rate of resource stock extraction, Ω_t . The stock, S_t , converges to zero as more and more resource is extracted, i.e. extraction continues until Ω_0 is fully exhausted.

In our model, the extraction of the non-renewable natural resource requires economic resources and we shall make the assumption that Ω_t depends upon the flow supply of the resource that must also be produced using labor and capital. The amount of the resource that can be extracted also depends on the stock of the resource, S_t , available at any time. To capture these effects, and following Smith and Wisley (1983), we assume that the resource is extracted as follows

$$\Omega_t = A_\Omega \left(L_\Omega^{\varphi_1} K_\Omega^{\varphi_2} S_t^{\phi} \right) \quad \text{where} \quad A_{\Omega t}, \varphi_1, \varphi_2, \phi \geq 0 \text{ and } \varphi_1 + \varphi_2 = 1; \ \phi \text{ is a parameter,} \tag{7}$$

where, L_Ω and K_Ω are the amounts of labor and capital devoted to extracting the resource, and $S_t^{\emptyset}$ is the amount of the stock in each time. The extraction function described by (7) is assumed to be a Cobb-Douglas function with constant returns to scale.

After describing the technologies in the resource sectors we assume that the rates of extraction and harvesting are optimal.

2.3 Technology of the Final Production

We assume a homogeneous production function, like in Shell (1966) model

$$Y_t = K_{y_t}^{\alpha_1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2} \quad 0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 1 \tag{8}$$

where production Y_t is dependent upon the amount of capital, K_{y_t} and labor, L_y and upon the current level of technical knowledge, A_{y_t} .

In each time, the economy produces final good, Y_t . Assuming that during an initial stage they are channeled either to domestic capital, K_{y_t} , consumption, C_{y_t} or towards inventive activity,

A_{y_t}. Consumption increases current well-being, while investment increases the capital, K_0, and technology stocks, A_0, respectively, allowing more consumption and greater technological research in the future.

Now, we asign S_i, $i = A, \quad X, \quad K, \quad C$, $0 < S < 1$, and $\delta_t = 1 - \frac{\Omega_t}{\Omega_{-t}}$. The S_i is the fraction of total final output production, Y_t, that is used to exports, S_X, to consume, S_C; and that saved in order to augment technology, S_A, and to augment domestic capital S_K. In particular, S_C, is the marginal propensity to domestic consumption, C_y.

The term $\delta_t \epsilon (-\infty \infty)$ allows us to consider that if in some instant t the extraction of the non-renewable resource Ω_t is larger than in the previous instant Ω_{-t} then the fraction of final output dedicated to exports will be $\delta_t S_X$ and will decrease. If on the contrary Ω_t is smaller than Ω_{-t} then the fraction of final output dedicated to exports will increase and this allows the economy to avoid falling into the trap of import substitution that has historically characterized many countries---in particular, Latin American countries.

Formally,

$$\begin{aligned} Y_t &= S_A Y_t + \delta_t S_X Y_t + S_K Y_t + S_C Y_t \\ S_K Y_t &= K_{y_t} \\ S_C Y_t &= C_{y_t} \end{aligned} \tag{9}$$

2.4 Technological Progress

Technological progress is a direct function of the amount of final production dedicated to augmenting it. In turn, higher technological progress allows the economy to have higher productivity and larger production. Formally, we consider that the dynamics of A_t is

$$\dot{A}_t = \psi(S_A Y_t) A_t \quad \text{where} \quad A_{t=0} = A_0, \tag{10}$$

equation (\ref{ec10}), which is of an endogenous nature, describes the accumulation of technology over time. In (10), $S_{A_t} Y_t$ is the fraction of final output devoted to research activity; $\psi > 0$ is a productivity parameter of scientific research, Romer (1990), and A_t is the stock of technology at time t. For simplicity, we assume that technology does not decay overtime, $\psi \geq 1$.

Our model assumes that there is perfect mobility between the two sectors: the final production sector that uses L_y and the sector of the non-renewable resource that uses L_Ω. This is possible thanks to their high productivity. This suggests that workers can jump from one productive sector to another without difficulty. On the contrary, we assume that renewable resource labor L_h is unskilled.

We consider that the quantity of labor is constant in the economy and time-invariant. Skilled labor may be used not only to produce the final output but also in harvesting and extracting the non-renewable natural resource.

$$L = L_h + L_\Omega + L_y. \tag{11}$$

3. An Outline of the Model

The objective of this study is to provide a theoretical framework to jointly analyze the role of natural resources abundance and capital accumulation in the process of economic growth, addressing a simple mechanism that can explain why natural resource abundance may increase income and economic welfare.

In the model we consider a three sector economy governed by a central planner. There are two tradable natural resource sectors and a tradable manufacturing sector, the domestic final production sector.

During a first stage, production of the domestic good and consumption have a positive relation with natural resource revenue. Exports are concentrated mainly in natural resources rather than manufacturing. By importing capital and consumption goods, $\mathbf{K}_{w_t}$ and $\mathbf{C}_{w_t}$ respectively, the economy's final production good is dependent on the accumulation of physical and technological progress.

In the second stage, mainly when the endowment of non-renewable resource tends to decrease, the economy will begin to export the domestic final production good, in order to maintain imports of capital and consumption goods that are necessary to continue developing the domestic manufacturing sector. Recall that development of the domestic manufacturing sector began during the first stage and is ongoing.

These dynamics allow the natural resource revenues to be exploited efficiently and reinvested into productive assets. Depletion of non-renewable natural resources are offset by investment in augmenting physical capital and by saving in a non-risky financial asset.

More clearly, in the first stage, natural resources are *essential* to the economy---by essential we mean that initially the economy will pull out with difficulty if some positive amount of natural resources in not exploited---. This suggests that in the first stage, production and consumption cannot be sustained if some finite amount of natural resources is not taken advantage of it.

During this first stage, the revenues generated by the exports of the natural resources---both renewable and non-renewable---are used to purchase consumption goods, physical capital and/or saved in a risk-less financial asset. This point is crucial, because it differs from mainstream literature regarding the curse of natural resources where the whole revenue is devoted entirely to consumption, thus, generating an unsurmountable income gap when the natural resources are depleted.

In the second stage, and thanks to this policy of generating revenues, natural resources will become *in-essential* for the economy. That is, when natural resources are exhausted the economy will survive by exporting the domestic good. Thus, the flow of revenues will continue and this will allow consumption to remain constant over time. The situation of

exporting the domestic good when the non-renewable resource begins to decrease will allow the economy to avoid the trap of import substitution

In this context, the central planner maximizes his inter-temporal consumption utility and derives his optimal time path of consumption. Finally, we will derive the macroeconomic equilibrium and we will obtain a dynamic multiplier.

4. The Model

Denote $\mathbf{w_t}$ the total amount of natural resources plus the final production good that the economy will export; $\mathbf{w_t}$ is established according to the carrying capacity of the renewable natural resource and the initial stock of the non-renewable resource

$$w_t = \Omega_t + h_t + \delta_t S_{X_\tau} Y_t.$$

It is desirable for the economy that the amount of exports of the natural resources remains approximately constant, in order to ensure constant revenues.

We assume that exports are net of costs. From net exports the central planner obtains revenues, $\mathbf{\Omega_t + h_t + \delta_t S_X Y_t = a_t}$ which will be devoted to importing capital, $\mathbf{K_{w_t}}$, and consumption good, $\mathbf{C_{w_t}}$; Let $\mathbf{b_t}$ be a portion of the revenues that are invested in an international non risky financial asset, $\mathbf{b_t}$.

Note that $\mathbf{b_t}$ is outcome at time $\mathbf{t}$ that will generate savings at some future time. This can be used to augment capital in the final production, $\mathbf{K_{y_t}}$ and/or to increase consumption, $\mathbf{C_{y_t}}$ when necessary. It is one of the main ideas that will allow us to avoid the natural resource dilemma.

Formally, at time $\mathbf{t}$, revenues $\mathbf{a_t}$ are applied as follows

$$a_t = C_{w_t} + K_{w_t} + b_t \qquad (12)$$

The following equates income and outcome

$$\Omega_t + h_t + \delta_t S_X Y_t = C_{w_t} + K_{w_t} + b_t.$$

This allows us to obtain

$$b_t - \delta_t S_X Y_t = \Omega_t + h_t - C_{w_t} - K_{w_t}. \tag{13}$$

4.1 Dynamics of Capital, $\mathbf{K_{y_t}}$ and Revenues, $\mathbf{a_t}$

Capital stock, $\mathbf{K_{y_t}}$, grows by domestic investment, $\mathbf{K_{y_t}}$ as well as by imported capital, $\mathbf{K_{w_t}}$.

$$\dot{K_{y_t}} = (1 - S_A - \delta_t S_X)Y_t - C_{y_t} + K_{w_t} \tag{14}$$

Where $\mathbf{K_{y_t}} = (\mathbf{1} - S_A - \delta_t S_X)Y_t - C_{y_t}$ and $\mathbf{K_{t=0}} = K_0$; K_0 is given.

For simplicity, we assume that capital does not depreciate.

The dynamics of export revenues

$$\dot{a}_t = r(b_{-t} + a_t - C_{w_t} - K_{w_t}) \tag{15}$$

r is the time-invariant risk-free rate---the savings growth rate---and is considered exogenous.

4.2 Maximization Problem

The central planner's objective is to generate sustainable consumption by choosing his optimal time path of domestic and imported consumption, C_{y_t} , C_{w_t} respectively, over a specified planned period $[0, \infty]$. Specifically, the central planner's problem is to maximize the continuously discounted utility function

$$V(t, C_w, C_y) = \int_t^{\infty} e^{-\rho\tau} U(C_{y_\tau}, C_{w_\tau}) dt, \tag{16}$$

ρ is the subjective discount factor.

Equation (16) is subject to the equations (8), production of final output, (10), the dynamics of technical progress, (14), the dynamics of capital and (15), the dynamics of exports revenue. We considers that the positive time rate preference is $\rho > 0$.

The current-value Lagrangian is

$$\begin{aligned} \pounds_c = U(C_{y_t}, C_{w_t}) + \lambda_a \left[r(b_{-t} + a_t - C_{w_t} - K_{w_t}) \right] \\ + \lambda_K \left[(1 - S_A - S_X) Y_t - C_{y_t} + K_{w_t} \right] + \lambda_A \left[\psi S_A Y_t A_t \right] \\ + \mu \left[K_{y_t}^{\alpha_1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2} - Y_t \right] \end{aligned} \tag{17}$$

And the maximum principle calls for (assuming interior solutions)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pounds_c}{\partial C_{y_t}} &= 0 \\ \dot{U_{C_{y_t}}} &= \lambda_K \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pounds_c}{\partial C_{w_t}} &= 0 \\ \dot{U_{C_{w_t}}} &= \lambda_a r \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pounds_c}{\partial K_{w_t}} &= 0 \\ \lambda_K &= \lambda_a r \end{aligned} \tag{20}$$

where λ_K and λ_a are the shadow values of capital and of export revenues, respectively. The condition (18) equates the marginal utility of consumption of the final good to the shadow value of capital, i.e. for each unit that augments the physical capital in the final production a

one more unit consuming, C_{y_t} , is enjoyed; and (19) equates the marginal utility of consumption of the imported good to the shadow value of export revenues times the risk-free rate, i.e. when revenue grows one unit, one more unit of imported consumption C_{w_t} is also enjoyed. Equation (20) states that the shadow values of domestic capital is equal to marginal utility of consumption of the imported good.

Solving the optimality for the costate variable and computing the time derivative, we have:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_a &= \rho\lambda_a - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial a_t} \\ \dot{\lambda}_a &= \rho\lambda_a - r\lambda_a \\ \dot{\lambda}_a &= \lambda_a(\rho - r)\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_K &= \rho\lambda_K - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial K_t} \\ K_t &= K_{y_t} + K_{w_t} \\ \dot{\lambda}_K &= \rho\lambda_K - \left(-\lambda_a r + \lambda_K + \mu\left(\alpha_1 K_y^{\alpha_1 - 1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\right)\right) \\ \lambda_K &= \lambda_a r \\ \dot{\lambda}_K &= \rho\lambda_K - \mu\left(\alpha_1 K_{y_t}^{\alpha_1 - 1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_A &= \rho\lambda_A - \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial A_t} \\ \dot{\lambda}_A &= \rho\lambda_A - \lambda_A \psi S_A Y_t \\ \dot{\lambda}_A &= \lambda_A(\rho - \psi S_A Y_t) \\ \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} &= \rho - \psi S_A Y_t\end{aligned} \tag{23}$$

Differentiating the first-order conditions, (18) and (19) with respect to time, and inserting the result in (21)-(23) and taking the second derivative of (20) and (21) gives:

$$
\begin{aligned}
\ddot{U}_{C_{y_t}} \dot{C}_{y_t} &= \dot{\lambda}_K \\
\ddot{U}_{C_{y_t}} \dot{C}_{y_t} &= \rho \lambda_{K_t} - \mu(\alpha_1 K_{y_t}^{\alpha_1 - 1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2}) \\
-\frac{\ddot{U}_{C_y} \dot{C}_y}{\dot{U}_{C_y}} &= \frac{\mu \alpha_1 K_{y_t}^{\alpha_1 - 1} L_y^{\alpha_2} A_{y_t}^{1-\alpha_1-\alpha_2}}{\lambda_K} - \rho \\
-\frac{\ddot{U}_{C_y} \dot{C}_y}{\dot{U}_{C_y}} &= \frac{\mu}{\lambda_K} Y_{K_t} - \rho \\
\ddot{U}_{C_{w_t}} \dot{C}_{w_t} &= r p_c \dot{\lambda}_a \\
\ddot{U}_{C_{w_t}} \dot{U}_{C_{w_t}} &= r p_c \lambda_a \rho - r \\
\frac{\ddot{U}_{C_w} \dot{C}_w}{\dot{U}_{C_w}} &= \rho - r \\
-\frac{\ddot{U}_{C_w} \dot{C}_w}{\dot{U}_{C_w}} &= r - \rho
\end{aligned}
\tag{24}
$$

If we assume a logarithmic instantaneous utility function

$$
-\frac{\ddot{U}_{C_y}}{\dot{U}_{C_y}} = \frac{1}{C_y} \qquad \text{and} \qquad -\frac{\ddot{U}_{C_w}}{\dot{U}_{C_w}} = \frac{1}{C_w}
$$

and using the shadow prices of revenue and capital, the Keynes-Ramsey rule would be:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{C}_y}{C_y} &= \frac{\mu}{\lambda_K} Y_K - \rho \\
\frac{\dot{C}_y}{C_y} &= \frac{\mu}{\lambda_a r} Y_K - \rho
\end{aligned}
\tag{25}
$$

This rule provides information about the marginal variations (as opposed to levels) in control variables, C_{y_t} and C_{w_t}.

Equation (25) states that domestic consumption, C_{y_t}, increases when the value (in terms of capital) of the marginal productivity of capital, Y_K, exceeds the time preference rate, ρ ; or when the risk-free rate drops.

$$\frac{\dot{C_w}}{C_w} = r - \rho \tag{26}$$

Equation (26) states that imported consumption, C_w , increases when the risk-free rate is higher than the time preference rate, i.e. a higher interest rate implies---at unchanged consumption levels---a quicker increase in income; and, in turn, a quicker increase in income allows for a quicker increase in future consumption. A higher interest rate would lead to a change in the consumption rate *level*.

Considering the variation in consumption that allows constant total utility, $U_t(C_{y_t}, C_{w_t})$.

$$\dot{U_{C_{y_t}}} dC_y + \dot{U_{C_{w_t}}} dC_w = dU_t(C_{y_t}, C_{w_t}) = 0$$

$$\frac{dC_{y_t}}{dC_{w_t}} = -\frac{\dot{U_{C_{w_t}}}}{\dot{U_{C_{y_t}}}}. \tag{27}$$

Equation (27) is the marginal rate of substitution of the two consumptions. At time t , a greater consumption of the imported good, C_{w_t}, implies a lower consumption of the domestic good, C_{y_t}.

5. The Macroeconomic Equilibrium

We begin by obtaining the aggregate expenditure, E_t^p, which is equal to the sum of aggregate capital, K_t, plus the aggregate consumption, C_t, and spending in technological progress, A_t, plus net exports, NX_t.

Also, a factor of proportionality is derived that measures how much the aggregate production (income), Y_t\$, changes in response to a change in the exogenous variables, e.i. imported capital, K_{w_t}, imported consumption, C_{w_t}, and the saving in a non-risky asset, b_t.

Net exports, NX_t are equal to $\boldsymbol{h_t + \Omega_t + \delta_t S_X Y_t}$ which are equal to expenditures $K_{w_t} + C_{w_t} + b_t$. Recalling equation (13) is given by

$$b_t - \delta_t S_X Y_t = \Omega_t + h_t - K_{w_t} - C_{w_t}.$$

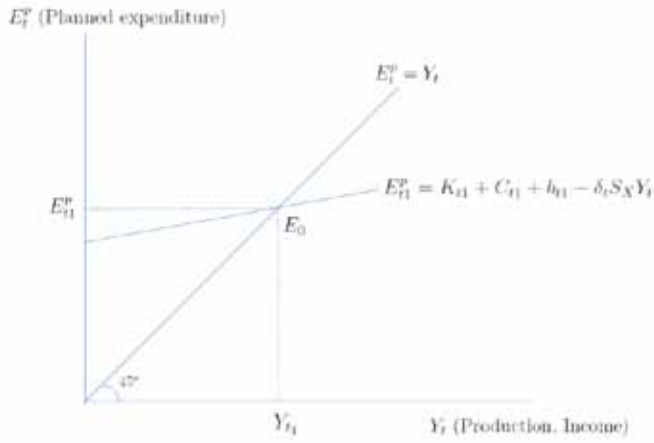
According to equation (9), the domestic income, Y_t, is the sum of the proportion of domestic product (income) channeled to increasing capital, S_K, the marginal proportion to domestic consumption, S_C, the proportion channeled to increasing technological progress, S_A, and the proportion of final production to exports, $\delta_t S_X$.

$$Y_t = S_A Y_t + \delta_t S_{X_t} Y_t + S_K Y_t + S_C Y_t \qquad (9)$$

Now to find the equilibrium condition we equate the aggregate expenditure to the aggregate domestic income, $E_t^p = Y_t$.

Figure 1 explains the equilibrium condition, point E_0. The 45 degree line is the locus of all possible points where $E_t^p = Y_t$. It identifies all possible points of equilibrium where aggregate expenditures equal aggregate income.

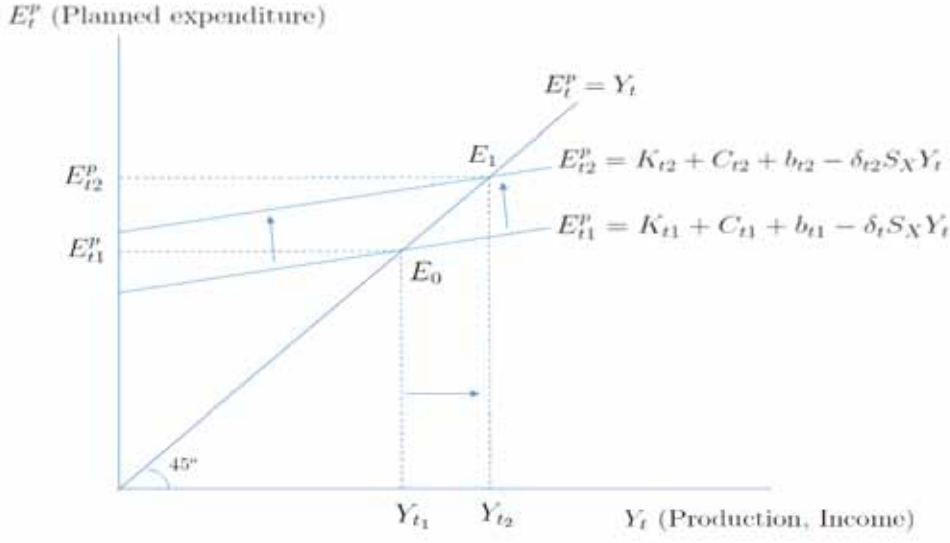
Figure 1. The Equilibrium Value of Aggregate Income



There are four components of aggregate expenditure that we defined as aggregate capital, K_t, aggregate consumption, C_t, saving in non risky asset, b_t, and the fraction of final production channeled to exports, $\delta_t S_X$, the latter now depends on the non-renewable natural resource. All four components are autonomous expenditures.

In particular, they are independent of the level of domestic income. When income is zero, total expenditure is equal to the autonomous level of imported capital, K_t, imported consumption, C_t, and saving in non-risky asset, b_t.

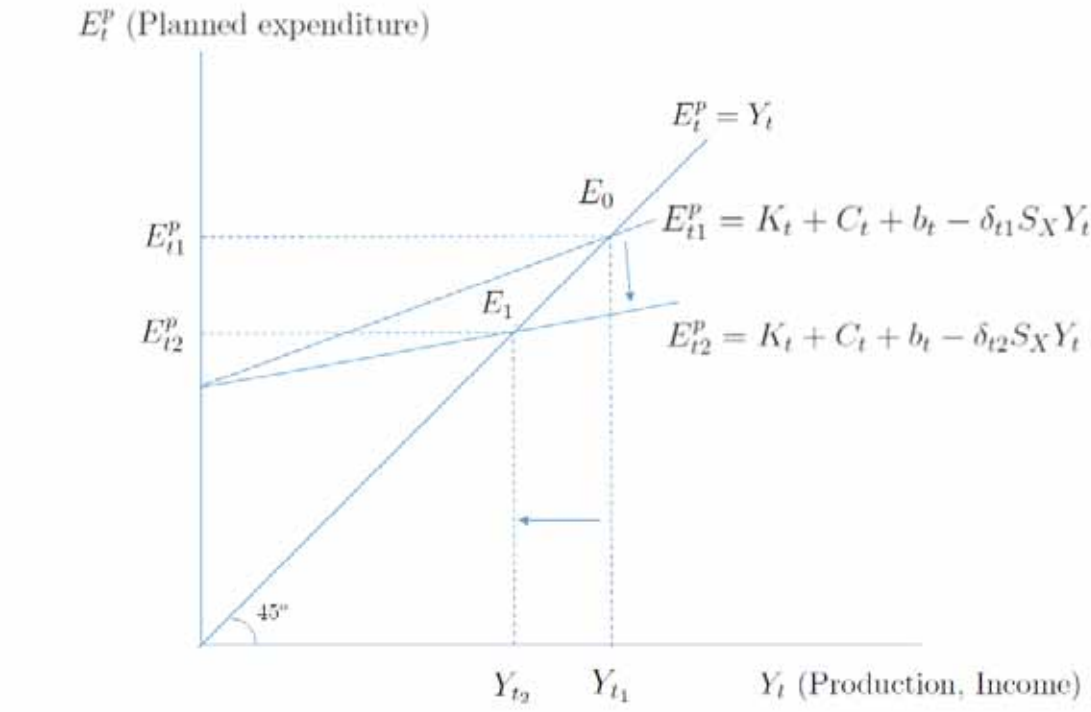
Figure 2. Increase in the Planned Expenditure



An increase or decrease in autonomous spending (the intercept) would shift the aggregate expenditure line up or down, which would lead to an increase or decrease in domestic income.

In this case the line is shifted up when some component of the aggregate expenditure es increased.

Figure 3. Variation of □_t S_X Y_t



Assuming $\delta_t > 0$ ---i.e. exports of non-renewable resource fall from one instant Ω_{-t} to the next Ω_t---, an upward shift in δ_t causes the proportion of domestic product to export, $\delta_t S_X Y_t$, to fall. In turn, this induces a decrease in total planned spending and income. That is, the slope of E_t^p diminishes, causing it to shift downward, given that the intercept is fixed for t .

The final effect of lower a $\delta_t S_X Y_t$ has been the transition to a new equilibrium, the point represented by Y_{e_2} .

5.1 The Dynamic Multiplier

We now obtain the Dynamic Multiplier,

$$
\begin{aligned}
E_t^p &= C_t + K_t + A_t + NX_t \\
C_t &= S_C Y_t + C_{w_t} \\
K_t &= S_K Y_t + K_{w_t} \\
A_t &= S_A Y_t \\
NX_t &= h_t + \Omega_t + \delta_t S_X Y_t = K_{w_t} + C_{w_t} + b_t.
\end{aligned} \tag{28}
$$

By equation (13), $b_t - \delta_t S_X Y_t = \Omega_t + h_t - C_{w_t} - K_{w_t}$.

$$
\begin{aligned}
Y_t &= S_K Y_t + K_{w_t} + S_C Y_t + C_{w_t} + S_A Y_t + b_t - \delta_t S_X Y_t \\
Y_t = E_t^p &= \frac{1}{(1 + \delta_t S_X - S_A - S_K - S_C)} (K_{w_t} + C_{w_t} + b_t)
\end{aligned}
$$

(29)

$$
k = \frac{1}{(1 + \delta_t S_X - S_A - S_K - S_C)} \tag{30}
$$

This Dynamic Multiplier, k , indicates the amount by which income varies to a unit change in one component of the planned expenditure. That is, a reduction of S_K , S_C or S_A increases the denominator. and therefore generates a decrease of the multiplier effect. Also, a $\delta_t S_X Y_t$ increase will cause a drop in income.

The increase in $\delta_t S_X Y_t$ occurs when the non-renewable resource production begins to decay. This fall occurs when in the next instant, a smaller amount of the non-renewable resources is exported.

We can conclude that this dynamic multiplier mechanism, S_K , is a multiplier that analyzes the movement of equilibrium position from one point to another. In a logical sense, there is a time gap between an increase in domestic income, Y_t , with the corresponding increase in autonomous expenditure, E_t^p .

The value of this multiplier depends upon not only on the rate of marginal propensity of domestic consumption, C_{y_t}, but upon the fraction of domestic production to export, $\delta_t S_X$ the fraction channeled to technological progress, S_A, and the fraction spent on capital, S_K, used in the final output.

However, if there is a situation of natural resource scarcity in the economy, then this spending will not be automatically reduced, independently of their imported quantities.

This dynamic multiplier mechanism, k , allows for a diversification in the economy, it allows for a stable consumption path, and reduces the dependence upon natural resource revenues---in this case dependence on the non-renewable resource---, hence allowing the economy to escape the curse of natural resources.

6. Conclusions

This work has introduced a renewable and a nonrenewable resource sector into an endogenous growth model of a small open economy having access to financial international markets. We have shown how the macroeconomic equilibrium can be represented by a dynamic system in four variables, the aggregate income, Y_t, the aggregate capital, K_t, aggregate consumption, C_t and natural resources net exports, NX_t, obtaining a dynamic multiplier mechanism that analyzes the movement of domestic income equilibrium position from one point to another.

The model generates an equilibrium in which one of the resource sectors of limited size can coexist in an economy that experiences constant continuing growth in final production sectors.

More importantly, the model very naturally yields the result that the equilibrium growth rate in an economy endowed with a natural resource is much better than it would be in the absence of such resource. This provides an explanation for the observed long-run positive relationship between resource abundance and growth.

The accumulation of a larger equilibrium in response to greater resource abundance requires that the revenue generated by the sale of natural resources would be transformed into augmenting physical and saving. The compatibility of a finite amount of natural resource with a continually increasing capital entails non decline in the final output and cessation of growth.

Especially, if it kept exporting the same amount of natural resources, a constant optimum rate over time, would allow to obtain constant revenues from exports along time and extend the time in favor of domestic economy. This means, the fact that good management of natural resources leads to greater economic growth, and does not imply that natural resources harm the economy.

That is, consumption is improved and constant not only at the expense of future natural resources exploitation.

A resource-rich country should exploit its natural resources stock with which it is endowed and at the same time would exploit the increasing returns to scale in the final output sector and thus increasing its economic growth rate.

Finally, we proved that the abundance of natural resources does not restraint economic growth when the income generated by the sale of natural resources is transformed into physical capital, augmenting technological progress and saving.

Notation

E_t^p the planned expenditure,

Y_t is the Domestic final production (Income),

K_t Aggregate capital,

K_{w_t} Imported capital,

K_{y_t} Domestic capital,

C_t Aggregate consumption

C_{w_t} Imported consumption,

C_{y_t} Domestic consumption,

Bibliography

Botswana Central Statistical Office. “Botswana International Merchandise Trade Statistics, No. 2015/03, Monthly Digest-January 2015. http://www.cso.gov.bw/images/bimts_jan.pdf

Chichilnisky, Graciela (1998). “Sustainable development and North-South trade." MPRA Paper 8894, University Library of Munich, Germany.

Eliasson, Ludvik and Stephen J. Turnovsky (2004). “Renewable resources in an endogenously growing economy: balanced growth and transitional dynamics." Journal of Environmental Economics and Management, Vol. 48, Issue 3, November, pp. 1018-1049.

Gylafson, Thorvaldur, Tryggvi Thor Herbertsson, and Gylvi Zoega (1999),. “A mixed blessing: natural resources and economic growth”. Macroeconomic Dynamics 3, pp. 204-225.

Farzin, Y. Hossein (1984). “The Effect of the Discount Rate on Depletion of Exhaustible Resources.” Journal of Political Economy, Vol. 92, No. 5, October, pp. 841-851.

Nordhaus, William D. (1992). “Lethal Model 2: The Limits to Growth Revisited.” Brookings Papers on Economic Activity. Vol. 23, Issue 2, pp. 1-60.

Rodriguez, Francisco and Jeffrey D. Sachs (1999). “Why Do Resource-Abundant Economies Grow More Slowly?” Journal of Economic Growth, Vol. 4, No. 3 (Sep., 1999), pp. 277-303.

Romer, Paul M. (1990). “Endogenous Technological Change." The Journal of Political Economy, Vol. 98, Issue 5, pp. S71-102.

Sachs, Jeffrey D. and Andrew M. Warner (1995). “Natural resource abundance and economic growth." NBER Working Paper No. 5398, December.

Shell, Karl (1966). “Toward A Theory of Inventive Activity and Capital Accumulation." American Economic Review, Vol. 56, No. 1/2, March, pp. 62-68.

Smith, Paul E. and Thomas O. Wisley (1983). “On a Model of Economic Growth Using Factors of Production to Extract an Exhaustible Resource.” Southern Economic Journal, Vol. 49, No. 4 April, pp. 966-974.

Solow, Robert M. (1974). “Intergenerational Equity and Exhaustible Resources." Review of Economic Studies, Vol. 41, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, pp. 29-45.

CAPÍTULO XXXVII

Métodos para el cálculo de la prima de Opciones Asiáticas.

Nora Gavira Durón

Universidad de las Américas Puebla

Julio Irving Aguilar Galindo

Fideicomiso de Fomento Minero

Resumen

En el presente trabajo se presentan las características y aplicaciones de algunos modelos empleados para la valuación de las opciones asiáticas. Se incluyen modelos de valuación y métodos numéricos para los tipos de opciones asiáticas que no se pueden valuar con fórmulas cerradas. Se describen ventajas y desventajas de los modelos y se hace una comparación, siempre y cuando las características de los modelos lo permitan; los modelos suponen una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal.

Palabras Clave: Opciones asiáticas, precio de la opción, métodos numéricos.

Clasificación JEL*:* C02, C13, C63, G13

1. Introducción

En los principales mercados financieros del mundo, desde finales de los sesenta se negociaban en mercados Over The Counter (OTC) las opciones exóticas; sin embargo, es hasta los noventa, cuando su negociación comienza a ser relevante. Fernández (1996, pp. 497-498), denomina a todas aquellas opciones no tradicionales como exóticas; y nacen de la necesidad de disminuir el costo de las primas de las opciones tradicionales; así como para ajustarse mejor a determinadas situaciones. También se conocen como opciones de segunda generación, ya que pretenden superar las limitaciones de las opciones tradicionales; con base una opción vainilla y bajo ciertas condiciones, se efectúan modificaciones y se pueden diseñar distintos tipos de opciones exóticas.

Una opción asiática es una modalidad de opción exótica (Clewlow y Strickland (1997, pp.11-15) cuya remuneración depende del promedio del precio del subyacente a lo largo de la vida de la opción, o de parte de ella., también se conocen como opciones promedio. Se emplean para hacer frente a cambios bruscos en los precios del activo subyacente y en diversas situaciones caracterizadas por su regularidad en el tiempo. El costo de la prima es menor al de las opciones tradicionales debido a que en la valuación de las opciones tradicionales se considera la volatilidad del activo subyacente sobre el que esté hecha la opción, mientras que en las opciones asiáticas se considera la volatilidad como la media de los precios que alcanza el activo subyacente a lo largo de la vida de la opción; esta volatilidad de la media siempre será menor a la volatilidad del subyacente. En el cálculo de la prima de una opción a menor volatilidad menor precio a pagar.

El estudio y manejo de las opciones asiáticas, puede generar un gran impacto en los diversos mercados internacionales de capitales, ya que son un instrumento muy útil tanto para la gestión de riesgos, como para la especulación. No obstante, hasta el momento su uso no se ha extendido en nuestro país; debido entre otras causas al desconocimiento sobre su existencia, la dificultad de establecer el precio de sus primas y a la poca o nula difusión que los investigadores han hecho de las ventajas que representan estas opciones.

2. Opciones Asiáticas

Las opciones asiáticas poseen la característica de que su valor al vencimiento depende de la trayectoria del subyacente en el periodo de vigencia, es decir, depende también de su evolución. Las opciones de promedio son particularmente eficaces para negocios en los mercados en los cuales se lleven a cabo intercambios comerciales de productos primarios recién cotizados y su uso puede evitar la manipulación del precio cuando se acerca el fin del periodo de vigencia de una opción ordinaria; así mismo cuando las entidades financieras realizan negociaciones en las que reciben pagos en otras divisas; la media de los valores de la cotización de esas divisas es una forma de protegerse a grandes variaciones del tipo de cambio.

La mayoría de las opciones asiáticas que actualmente se negocian en los mercados financieros son de tipo europeo, ya que una opción de tipo americano se puede ejercer de manera tan adelantada como desde el comienzo del periodo y perder la posibilidad de protegerse el tiempo restante. Las más negociadas son las que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio medio del activo subyacente durante el periodo predeterminado y el precio de ejercicio. Su utilización tiene numerosas ventajas en

situaciones caracterizadas por la regularidad en el tiempo; como son las situaciones de aprovisionamientos periódicos de materias primas y otros suministros y, las operaciones de importación y exportación que tengan la misma característica de regularidad temporal. Las opciones asiáticas también reducen la exposición a movimientos repentinos en el subyacente justo antes de expirar; algunos esquemas de pensiones tienen tal característica.

2.1 Tipos de Payoff

El promedio del subyacente puede reducir significativamente el precio de una opción asiática, comparada con una opción ordinaria similar o vainilla, debido a que la diferencia que se encuentra en el precio de ejercicio (ya sea $|S_A - K|$ *o* $|S_A - S_T|$) es menor que $|S_T - K|$ (vainilla), la volatilidad será la media de los valores que alcance el activo subyacente de la opción a lo largo de la vida de la misma. Esta volatilidad de la media siempre será inferior a la volatilidad del activo porque depende del promedio acumulado del precio; así, el costo de las opciones asiáticas será menor que el de las tradicionales. Así como existen opciones *put* y *call,* americanas y europeas, el *Payoff* también se clasifican en *strike* y *rate*, también llamado a éste último *price*. Si tomamos el precio de ejercicio de una opción vainilla,

$$\max(S - K, 0)$$

al reemplazar el precio *strike K* con un promedio, se tendrá una opción *average strike call*, con el siguiente *payoff*

$$\max(S - S_{ave}, 0)$$

De igual forma, el *payoff* de una *average strike put* su *payoff* es:

$$\max(S_{ave} - S, 0)$$

Ahora, si tomamos el *payoff* de una opción vanilla y en vez de reemplazar el precio *strike*, sustituimos el precio del subyacente al momento de ejercerla por el promedio, lo que obtenemos es una *rate* option. Una *average rate put* tendría un *payoff* igual a:

$$\max(S_{ave} - K, 0)$$

y una *average rate put* con *payoff:*

$$\max(K - S_{ave}, 0)$$

La diferencia en el grado de dificultad del cálculo de los precios de opciones *calls* y *puts* no es relevante debido a que solo se cambia un signo, pero la distinción entre *strike* y *rate* pueden hacer una gran diferencia. Las opciones *strike* se pueden valuar numéricamente.

2.2 Tipos de determinación de promedios

Los tipos más comunes de opciones asiáticas son aquellas cuyo valor depende del promedio de los valores que ha tomado el subyacente, durante la vida (o parte de ella) de la opción. Su valor a la fecha de ejercicio es:

Call asiática: Max (0; $S_{promedio}$ -K), Put asiática: Max (0;K-$S_{promedio}$)

También se negocian, aunque en menor volumen, opciones que al vencimiento ofrecen una remuneración igual a la diferencia, si es positiva, entre el precio del activo subyacente en la fecha de vencimiento de la opción y la media de los precios que el activo subyacente ha alcanzado durante el periodo de tiempo especificado. A este tipo de opciones se les conoce como opciones de precio de ejercicio promedio (OEP) (average strike options) o pseudo-asiáticas (Fernández 1996, página 23). Estas opciones pueden garantizar que la media de los precios pagados por un activo sobre un periodo de tiempo no es mayor que el precio final o para el caso del *Put*, garantiza que la media recibida no es menor que el precio final. Considerando el tipo de media que podemos utilizar, se pueden tener opciones de media aritmética y opciones de media geométrica.

Otra clasificación separa las opciones asiáticas en función del periodo de tiempo en que se calcula la media; de acuerdo a lo anterior, se llaman:

1. *Forward-starting options* si el periodo de tiempo entre el que se calcula el precio de opción, la media se encuentra en el futuro.
2. *Backward-starting o plain vanilla* cuando el tiempo que resta para el vencimiento de la opción, es menor o igual que el intervalo de tiempo en el que se calcula la media.

3. Modelos de valuación de Opciones Asiáticas

En esta sección se describirán los modelos matemáticos aplicados a la valuación de opciones asiáticas de tipo europeo con precio promedio.

3.1 Opciones asiáticas de tipo europeo con precio promedio de tipo geométrico *put* y *call*

Consideremos el promedio geométrico discreto de los precios del activo con tiempo distribuido uniformemente $t_i = T_0 + i\Delta t,\ \ i = 1,2,...,n,$ donde Δt es el intervalo de tiempo uniforme entre componentes, T_0 fecha de inicio y $t_n = T$ es el tiempo de expiración. Definimos el promedio geométrico como:

$$G_k = \left[\prod_{i=1}^{k} S(t_i)\right]^{\frac{1}{k}},\ \ k = 1,2,...,n.$$

El precio promedio de una *European average price call* con promedio geométrico discreto está dado por $\max(G_n - X, 0)$, donde X es el precio *strike*. Supongamos que el precio del activo sigue una distribución lognormal con varianza σ^2. Entonces, la razón del precio $R_i = \dfrac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$, $i = 1,2,...,n$, también se distribuye lognormal. Específicamente, en el mundo del riesgo neutral, se tiene lo siguiente:

$$\ln R_i \sim N\left(\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right), \; i = 1,2,...,n,$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo, q la tasa de dividendos y $N(\mu, \sigma^2)$ representa una distribución normal estándar con media μ y varianza σ^2.

Para una opción *European average price value call option, t*enemos:

$$\frac{G_n}{S(t_0)} = \frac{S(t_0)}{S(t_0)}\left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\left[\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right]^2\left[\frac{S(t_{n-2})}{S(t_{n-3})}\right]^3 \cdots \left[\frac{S(t_1)}{S(t_0)}\right]^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{G_n}{S(t_0)} = \left(\frac{S(t_n)}{S(t_{n-1})}\left[\frac{S(t_{n-1})}{S(t_{n-2})}\right]^2\left[\frac{S(t_{n-2})}{S(t_{n-3})}\right]^3 \cdots \left[\frac{S(t_1)}{S(t_0)}\right]^n\right)^{\frac{1}{n}},$$

ó

$$\ln \frac{G_n}{S(t_0)} = \frac{1}{n}\left[\ln R_n + 2\ln R_{n-1} + 3\ln R_{n-2} + \ldots + n \ln R_1\right].$$

Debido a que $\ln R_i$, $i = 1,2,...,n$ se distribuyen normal y son independientes, entonces: $\ln \dfrac{G_n}{S(t_0)}$ es normalmente distribuido con cierta media, si se tiene que:

$$\left(\mu_G - \frac{\sigma_G^2}{2}\right)T = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\Delta t \sum_{i=1}^{n} i\right) = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\Delta t \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

por lo tanto:

$$\left(\mu_G - \frac{\sigma_G^2}{2}\right)T := \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T,$$

entonces su media y varianza son:

$$\sigma_G^2 T = \frac{1}{n^2}\sigma^2 \Delta t \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sigma^2\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)T\,.$$

$$\Rightarrow \mu_G = \left(\mu_G - \frac{\sigma_G^2}{2}\right)T + \frac{\sigma_G^2 T}{2}$$

$$= \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2(n+1)}{2}\left[-\frac{1}{2n} + \frac{2n+1}{6n^2}\right]T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2(n+1)}{2}\left[\frac{-3n+2n+1}{6n^2}\right]T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2(n+1)}{2}\left[\frac{-n+1}{6n^2}\right]T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2\left(-n^2+1\right)}{12n^2}T$$

$$= (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2\left(-n^2+1\right)}{12n^2}T$$

La función de densidad de G_n al tiempo T, dado el precio del activo $S(t_0)$, dados su media y varianza anteriores, puede ser expresada como la siguiente función de densidad lognormal:

$$\psi(G_n, S(t_0)) = \frac{1}{G_n\sqrt{2\pi\sigma_G^2 T}}\exp\left(-\frac{\left(\ln G_n - \ln S(t_0) + \left(\mu_G - \frac{\sigma_G^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma_G^2 T}\right).$$

El precio de la *European average value call* con promedio discreto geométrico está dado por:

$$c_G(S(t_0),T) = e^{-rT}E_{G_n}\left[|G_n - X|\right] = e^{-rT}\int_X^{\infty}(G_n - X)\psi(G_n; S(t_0))dG_n$$

$$= e^{-rT}\left[S(t_0)e^{\mu_G T}N(d_1) - XN(d_2)\right],$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t_0)}{X} + \left(\mu_G + \frac{\sigma_G^2}{2}\right)T}{\sigma_G \sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma_G \sqrt{T}\ .$$

Consideremos:

$$\sigma_G^2 T = \sigma^2 \left(\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right)T$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\right)T$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)T$$

y cuando $n \to \infty$

$$\sigma_G^2 T = \frac{\sigma^2 T}{3}$$

Ahora como:

$$\mu_G = (r-q)\left(\frac{n+1}{2n}\right)T + \frac{\sigma^2\left(-n^2+1\right)}{12n^2}T\ = (r-q)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)T + \sigma^2\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{12n^2}\right)T$$

cuando $n \to \infty$

$$\mu_G = (r-q)\left(\frac{1}{2}\right)T + \sigma^2\left(-\frac{1}{12}\right)T = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}$$

entonces:

$$c_G(S(t),T) = e^{-rT}\left[S(t_0)e^{\mu_G T}N(d_1) - XN(d_2)\right]$$

$$= e^{-rT}\left[S(t_0)e^{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}N(d_1) - XN(d_2)\right]$$

$$= e^{-rT}S(t_0)e^{\left(r-q-\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}N(d_1) - e^{-rT}XN(d_2)$$

$$= S(t_0)e^{-\left(r+q+\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}N(d_1) - e^{-rT}XN(d_2)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S(t_0)}{X} + \left(\left(r - q - \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{1}{2} + \frac{\sigma^2}{2\cdot 3}\right)T}{\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\sqrt{T}} = \frac{\ln\frac{S(t_0)}{X} + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}$$

3.2 Opciones asiáticas de tipo europeo con precio promedio de tipo aritmético put y call

3.2.1 Aproximación *Turnbull y Wakeman*

Dado que no existe una fórmula cerrada para el precio de las opciones con promedio aritmético, han surgido métodos numéricos para aproximarlo. Turnbull y Wakeman (1991) considerann que la distribución bajo el promedio aritmético es aproximadamente lognormal, y utilizan el primer y segundo momentos del precio promedio aritmético.

$$c \approx S_0 e^{(r_A - r)T} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$p \approx Xe^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{(r_A - r)T} N(-d_1)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{T} + \left(r_A + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}},$$

y

$$d_2 = d_1 - \sigma_A\sqrt{T}$$

La volatilidad y la tasa de interés libre de riesgo del promedio están dados por:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\ln M_2}{T} - 2r_A}$$

$$r_A = \frac{\ln M_1}{T}$$

El primer y segundo momento del promedio aritmético son

$$M_1 = \frac{e^{rT} - 1}{rT}$$

$$M_2 = \frac{2e^{(2(r-q)+\sigma^2)T}}{((r-q)+\sigma^2)(2(r-q)+\sigma^2)T^2} + \frac{2}{(r-q)T^2}\left(\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{(r-q)+\sigma^2}\right)$$

3.2.2 Aproximación de Levy's

$$c \approx S_E N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2),$$

donde

$$S_E = \frac{S_0}{(r-q)T}\left(e^{-qT} - e^{-rT}\right)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{V}}\left[\frac{\ln D}{2} - \ln X\right],\ d_2 = d_1 - \sqrt{V}$$

$$V = \ln D - 2[(r-q)T + \ln S_E]$$

$$D = \frac{M}{T^2}$$

$$M = \frac{2S_0^2}{(r-q)+\sigma^2}\left[\frac{e^{(2(r-q)+\sigma^2)T}}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)}\right]$$

La opción *put* podemos encontrarla usando la siguiente paridad *put-call*

$$p = c - S_E + Xe^{-rT}$$

3.3 Métodos numéricos aplicados a la valuación de opciones asiáticas

En esta sección se describirán los siguientes métodos numéricos para la valuación de opciones asiáticas:

3.1 Método Binomial

3.2 Método Simulación Monte Carlo

3.3 Método Explícito Diferencial-Finito con Condición de Salto

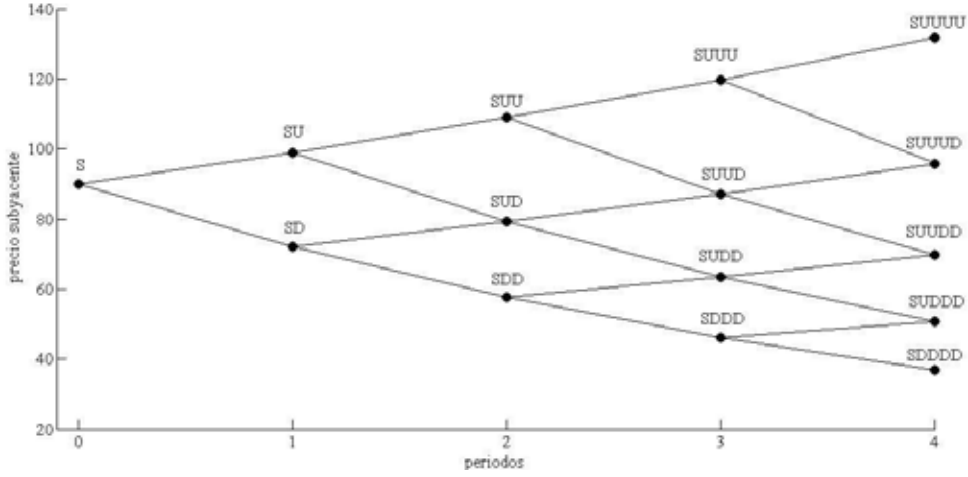
3.3.1 Método binomial

A partir de las opciones vainilla, se utiliza del método binomial y se realizan modificaciones para poder valuar opciones asiáticas. Este método tiene como desventaja, la lentitud de ejecución dada una partición del tiempo relativamente pequeña como lo es de 15 periodos, por lo que se describirán dos formas de aplicar el algoritmo y una variación del método llamado Método Binomial Alternativo.

El modelo binomial simula que la serie de precios se mueve hacia arriba o abajo. Si el precio *stock* comienza con valor *S* entonces éste podría tomar cualquier valor entre *US* o *DS* ($U > 1$ y $D < 1$) en el siguiente periodo de tiempo, esto es, como una caminata aleatoria. Si suponemos

una tasa libre de riesgo constante, volatilidad constante y una distribución de precios lognormal, podemos extender la caminata aleatoria para otro periodo de tiempo. Después de dos periodos de tiempo el valor del subyacente podría ser U^2S, si hacen dos movimientos hacia arriba, UDS, si hace un movimiento hacia arriba seguido de uno hacia abajo o viceversa, o D^2S, si hace dos movimientos consecutivos hacia abajo. Después de tres periodos el precio del subyacente puede ir al U^3S, U^2DS, etc. El resultado de la estructura de la caminata aleatoria, se puede ver en la figura 1, donde los nodos representan el valor tomado por el subyacente.

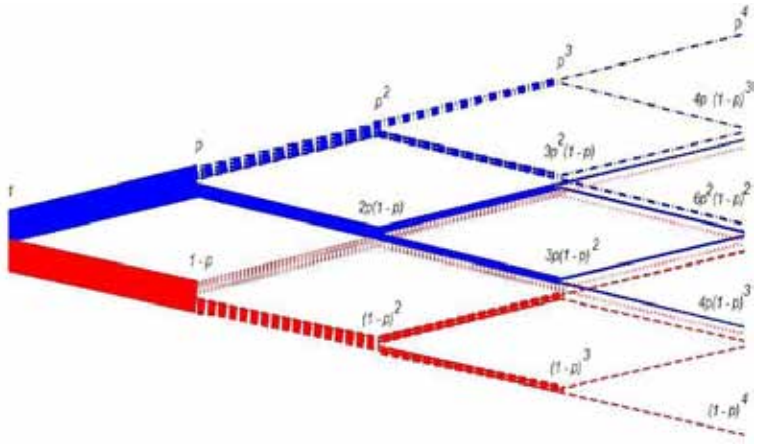
Figura 1. Simulación del movimiento de los precios con $S = 90$, $U = 1.1$, $D = 0.8$ y 4 periodos.



El nodo superior e inferior del árbol, en el momento de expiración, pueden ser alcanzados por un solo camino (todos los movimiento hacia arriba o hacia abajo). Por lo tanto, los valores intermedio son más probables a ser alcanzados que el valor final si se está haciendo una simulación.

En la siguiente figura se muestra el número de caminos de cada nodo después de cuatro periodos de tiempo y la probabilidad de obtener cada uno.

Figura 2. Árbol con las diferentes probabilidades de riesgo neutral de cada nodo.



Ecuación para el valor de una opción: Suponiendo que se conoce el valor de una opción en el tiempo $t+\delta t$ (por ejemplo este tiempo puede ser el momento de expiración de la opción), se construye un portafolio en el tiempo t consistente en una opción y una posición corta en una cantidad Δ del subyacente. En el tiempo t este portafolio vale:

$$\Pi = V - \Delta S ,$$

donde el valor V es ya determinado.

En el tiempo $t+\delta t$ el portafolio toma uno de dos valores, ya sea que aumente o disminuya el precio del subyacente. Estos dos valores son

$$V^+ - \Delta US \text{ y } V^- - \Delta DS .$$

Debido a que suponemos que conocemos V^+, V^-, U, D, S y Δ, los valores de ambas expresiones son conocidos y, en particular, dependen de Δ. Teniendo la libertad de elegir Δ, podemos tener el mismo valor de este portafolio, ya sea que el precio del activo suba o baje. Esto se asegura si hacemos:

$$V^+ - \Delta US = V^- - \Delta DS$$

Esto nos da a elegir:

$$\Delta = \frac{V^+ - V^-}{(U-D)S} ,$$

cuando el valor del nuevo portafolio es:

$$\Pi + \delta\Pi = V^+ - \frac{U\left(V^+ - V^-\right)}{U-D} = V^- - \frac{D\left(V^+ - V^-\right)}{U-D} .$$

Debido a que el valor del portafolio ha sido garantizado, podemos decir que este valor debe coincidir con el valor del portafolio original más un interés cobrado con la tasa libre de riesgo; este es el argumento del no arbitraje. Por lo tanto:

$$\delta\Pi = r\Pi\delta t .$$

Después de una manipulación esta ecuación llega a ser:

$$V = \frac{V^+ - V^-}{U - D} + \frac{UV^- - DV^+}{(1 + r\delta t)(U - D)}.$$

Es una ecuación para V dados V^+ y V^-, el valor de la opción en el siguiente periodo de tiempo, y los parámetros U y D describen la caminata aleatoria del activo.

Podemos escribir la anterior ecuación como:

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-,$$

donde:

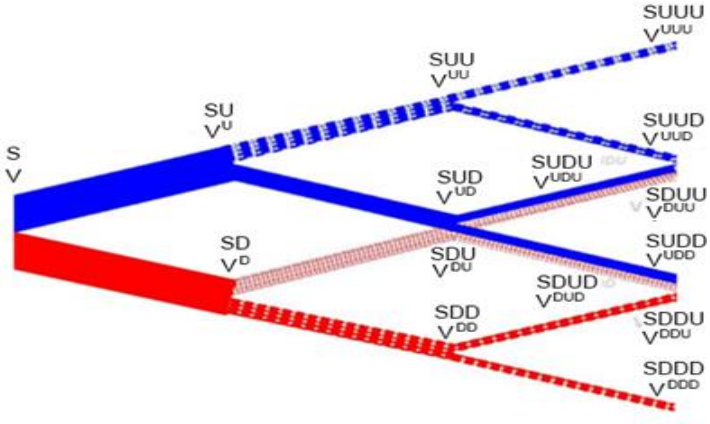
$$p' = \frac{e^{r\delta t} - D}{U - D}.$$

Se interpreta p' como una probabilidad de riesgo neutral y la expresión $e^{r\delta t}V$ es el valor esperado de la opción en el tiempo t calculado con las probabilidades neutrales al riesgo y sus respectivos valores posibles de la opción como variable aleatoria. Suponiendo que conocemos V^+ y V^- entonces podemos encontrar V. Si conocemos el valor de la opción en el momento de expiración podemos usar la ecuación para encontrar el valor de la opción en el tiempo $T - \delta t$ para todos los valores de S en el árbol, lo que implica que podemos encontrar el valor de la opción un periodo atrás en el tiempo. Podemos trabajar el camino hacia atrás en el árbol, usando la ecuación:

$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1 - p')V^-$$

dados V^+ y V^- deben regresar por el camino por el cual sus subyacentes asociados llegaron un paso antes, como lo indica la figura y así hasta lleguar a la raíz que es el tiempo cero, y de ese modo encontramos el valor de la opción al día de hoy.

Figura 3. Árbol binomial. Para "regresar" al precio *V* o tronco es necesario seguir el camino por el cual se llegó a los nodos o ramas finales.



Opción americana: El procedimiento para analizar las opciones americanas usando el árbol binomial es trabajar de regreso a través del árbol desde el final hasta el comienzo, evaluando en cada nodo para ver si adelantar el ejercicio de la opción es óptimo. El valor de la opción en el nodo final es el mismo de la opción Europea. En nodos anteriores el valor de la opción es el mayor de:

1. El valor traído a valor presente, V, a partir V^+ y V^- en la ecuación
$$e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1-p')V^-$$
2. El *payoff* de ejercer temprano tomando en cuenta la trayectoria que siguió el subyacente para llegar a ese nodo. $\max(e^{r\delta t}V = p'V^+ + (1-p')V^-, payoff)$

Para el **algoritmo Binomial Recursivo**, sean:

S_0 = precio inicial del activo subyacente.

X = precio de ejercicio.

S_{ave} = precio promedio del subyacente.

r = tasa de interés libre de riesgo.

q = tasa de dividendos.

T = tiempo faltante para la finalización del contrato.

periodos = número de fracciones de tiempo en que fue dividido el periodo total.

U = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo superior.

D = número por el cual se multiplica al valor del subyacente actual para obtener el valor del siguiente periodo inferior.

contador = cuenta en número de periodos transcurridos.

El algoritmo de una función recursiva para el método binomial, está dado por:

1. Se crea una función *f* con los siguientes parámetros: S_0, X, S_{ave}, r, q, T, *periodos*, U, D y *contador*.
2. Obtener el *payoff* del respectivo tipo de opción y se asigna a V_{T,S_0}.
3. Si *periodos* > 0 pasamos al paso 4, si no pasamos al paso 6
4. Obtenemos $p = \dfrac{e^{(r-q)\frac{T}{periodos}} - D}{U - D}$
5. Obtenemos en valor de la opción V_{T,S_0} de ese periodo:

$$V_{T,S_0} = \max(e^{-r\frac{T}{periodos}}(pV_{T-1,U} + (1-p)V_{T-1,D}), V_{T,S_0} * americana)$$

donde $V_{T-1,U}$ es la misma función declarada en el paso 1 pero con los siguientes cambios en los parámetros:

$S_0 \rightarrow S_0U$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio S_0U, por ejemplo $S_{ave} = \frac{(t-1)S_{ave} + S_0U}{t}$.

$T \rightarrow T - \frac{T}{periodos}$

$periodos \rightarrow periodos - 1$

$contador \rightarrow contador + 1$

y $V_{t-1,D}$ también es la misma función declarada en el paso 1 con los siguientes cambios en los parámetros:

$S_0 \rightarrow S_0D$

$S_{ave} \rightarrow$ El nuevo promedio ya sea geométrico o aritmético dado el promedio anterior y nuevo precio S_0D.

$T \rightarrow T - \frac{T}{periodos}$

$periodos \rightarrow periodos - 1$

$contador \rightarrow contador + 1$

y la variable *americana* es cero si queremos una opción europea y 1 si queremos una opción americana.

6. Por último, hacemos que la función *f* devuelva el valor de V_{t,S_0}.

Una ventaja de este método es que se pueden valuar todos los tipos de opciones asiáticas, ya sean opciones de tipo europeo o americano, *average strike* ó *average price*, *put* o *call* y con promedio geométrico o aritmético. Otra ventaja es que el código del programa es el más corto y más sencillo comparado con los que se verán más adelante. La gran desventaja de este método es que al elegir particiones o ciclos de recursividad más finos, el programa tiende a hacerse rápidamente más lento.

Para el **Método binomial con matrices**:

1. Se crea una función con los siguientes parámetros: S_0, X, S_{ave}, r, q, T, *periodos*, U, D y *contador*.

2. Se declaran dos matrices de tamaño $(2^{periodos}) \times (periodos + 1)$ cada una, que representan $periodos + 1$ el número de periodos y $2^{periodos}$ el número de trayectorias, una matriz se utilizará para llenar los valores del subyacente y la otra para el precio de la opción de cada trayectoria en el tiempo, sean S y F respectivamente.
3. Igualamos todas las entradas de la matriz S a S_0.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix}$$

4. Se hace un ciclo desde que i = 2 hasta que i = periodos + 1 que va a recorrer cada periodo.

$$i=1 \quad i=2 \qquad i=periodos+1$$

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix}$$

5. Sea el caso $i=2$, dividimos los renglones de esa columna en dos partes, notando que $2^{periodos}$ es un número par, tomamos desde el renglón 1 hasta el renglón $2^{periodos-1}$, que son la primera mitad de los renglones y los multiplicamos por U y desde $2^{periodos-1} + 1$ hasta $2^{periodos}$, que son la segunda mitad de renglones, los multiplicamos por D.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{periodos-1} \\ 2^{periodos-1}+1 \\ 2^{periodos-1}+2 \\ \vdots \\ 2^{periodos} \end{matrix}$$

6. Para el caso $i = 3$ igualamos la columna 3 con la anterior

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0U & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0D & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{periodos-1} \\ 2^{periodos-1}+1 \\ 2^{periodos-1}+2 \\ \vdots \\ 2^{periodos} \end{matrix}$$

7. Dividimos la columna 3 entre cuatro partes y al primer cuarto lo multiplicamos por *U* al segundo por *D* al tercero por *U* y al cuarto por *D*.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_0U & S_0UU & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0U & S_0UU & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0U & S_0UD & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0DU & S_0 & \cdots & S_0 \\ S_0 & S_0D & S_0DU & S_0 & \cdots & S_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0 & S_0D & S_0DD & S_0 & \cdots & S_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2^{periodos-1} \\ 2^{periodos-1}+1 \\ 2^{periodos-1}+2 \\ \vdots \\ 2^{periodos} \end{matrix}$$

8. A la cuarta columna la volvemos a copiar por la anterior la dividimos entre 8 partes y la multiplicamos a cada parte comenzando por *U* después por *D* y así sucesivamente hasta la última octava parte.
9. En general nos ubicamos la *n*-ésima columna, la igualamos a la anterior columna, la dividimos entre 2^{n-1} partes y multiplicamos la primera parte por U la segunda por *D* la tercera por *U* la cuarta por *D* y así intercalando *U* y *D* hasta completar la columna.
10. Se completa el llenado de las columnas hasta llegar a la columna $i = periodos + 1$.
11. Una vez llena la matriz se igualan las entradas de la matriz *F*

$$V_{i,perioodos+1} = payoff\left(S_{i,perioodos+1}\right),\ i=1,\ldots,2^{periodos}$$

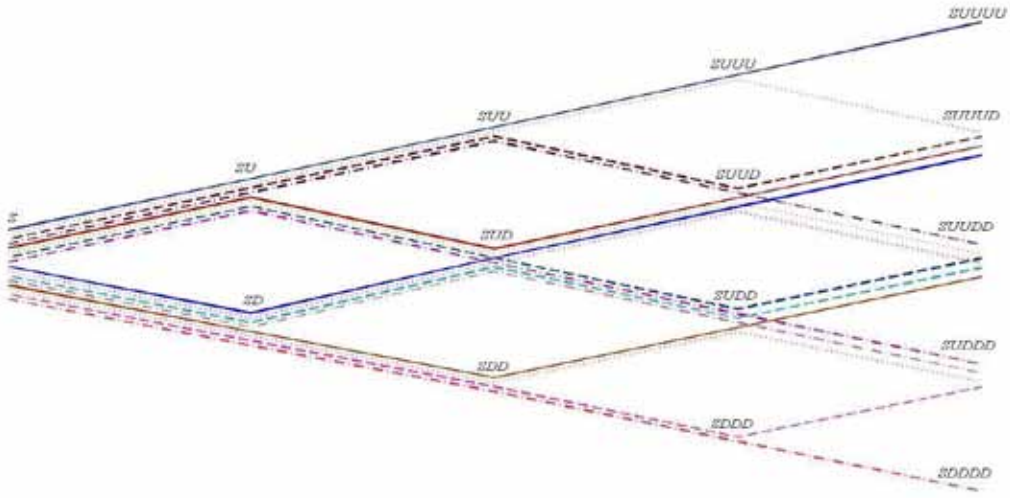
12. Dados los valores del nodo final se procede a regresar a través del árbol tomando de la última las entradas 1 y 2 que son V^+ y V^- respectivamente para obtener *V* y ponerlo en la columna *periodos* en las entradas 1 y 2, tomamos ahora los pares 3 y 4 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener *V* y ponerlo en la columna *periodos* en las entradas 3 y 4, y así sucesivamente hasta llenar la columna *periodos*.
13. Para la columna *periodos* – 1 tomamos los pares 1 y 3 que son V^+ y V^- respectivamente para obtener *V* y ponerlo en la columna *periodos* – 1 en las entradas 1 hasta 4, tomamos ahora los pares 5 y 7 para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V y ponerlo en la columna *periodos* –

1 en las entradas desde la 5 hasta la 8, y así sucesivamente tomamos las entradas $1+4j$ y $3+4j$ para ser V^+ y V^- respectivamente y obtener V y ponerlo en la columna *periodos* – 1 en las entradas desde la $1+4j$ hasta la $4+4j$ con $j=0,...,\frac{2^{periodos}}{4}-1$ hasta llenar la columna *periodos*.

14. En general al tomar la columna n se toman las entradas $1+2^{periodos+2-n}j$ y $\left(2^{periodos+1-n}+1\right)+2^{periodos+2-n}j$ que son V^+ y V^- respectivamente para obtener V y ponerlo en la columna n en las entradas desde $1+2^{periodos+2-n}j$ hasta $2^{periodos+2-n}+2^{periodos+2-n}j$ con $j=0,...,\frac{2^{periodos}}{2^{periodos+2-n}}-1$ hasta llenar la columna.
15. Se va de atrás para adelante hasta llegar a llenar la columna 1 y el valor de la opción es cualquier valor de la columna 1.

En la siguiente figura se puede apreciar la matriz S, cada línea representa un renglón y cada periodo de tiempo representa una columna e igualmente el recorrido del camino de ida para llegar a los nodos finales debe recorrerse el camino de regreso para obtener el valor de la opción en $t=0$.

Figura 4. Cada línea representa los valores que toma cada vector de la matriz



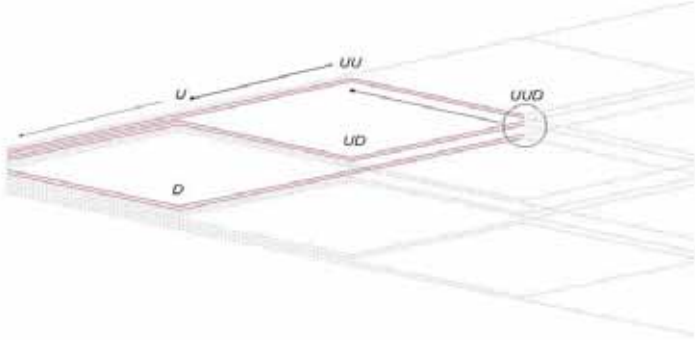
.

Método binomial alternativo: En éste método al considerar un mayor número de particiones, el valor de la opción tiende a alejarse del valor que arrojan los otros modelos. El enfoque es computacionalmente factible cuando el número de valores alternativos de la función del

camino *F*, en cada nodo no alcanza a crecer tan rápido como el incremento de número de pasos en el tiempo. La primera etapa es hacia delante a través del árbol estableciendo los valores máximos y el mínimos del camino en cada nodo, suponiendo que el valor de trayectoria en el tiempo $\tau + \Delta t$ depende sólo del valor de la función de la trayectoria al tiempo τ y el valor de la variable del subyacente al tiempo $\tau + \Delta t$, los valores máximos y mínimos de la función de la trayectoria para los nodos al tiempo $\tau + \Delta t$ pueden ser calculados en un sencillo camino de esos para los nodos al tiempo τ. La segunda etapa consiste en escoger valores representativos de la función de la trayectoria en cada nodo, se eligen los valores representativos como el valor máximo, valor mínimo y un grupo de otros valores que son igualmente espaciados entre el máximo y el mínimo. Como se tiene que regresar a través del árbol, valuamos el derivado para cada valor representativo de la función de la trayectoria.

Fórmula para el promedio más grande y más pequeño que alcanza un nodo: Los nodos que componen los promedios que llegan a un nodo deben estar contenidos en una zona como lo indica la figura 5, si para llegar a ese nodo se utilizó el camino *UUD*, entonces los demás caminos son las combinaciones que se pueden hacer con *UUD*, que son *UDU* y *DUU*. La trayectoria que representa el promedio máximo será aquella que tenga en cada nodo que lo compone un valor de nodo más grande que los demás nodos que componen a los otros promedios de las trayectorias. Para determinar la trayectoria que representa el promedio mayor es comenzar el nodo e ir hacia atrás y arriba hasta llegar a la orilla del árbol y después ir hacia atrás y hacia abajo, asegurándo así encontrar el valor más grande para cada nodo y así el promedio más grande.

Figura 5. Trayectoria de promedio más grande.



Análogamente con el mínimo, en este caso hay que recorrer el camino hacia atrás y hacia abajo hasta llegar a la orilla y después atrás y arriba hasta llegar a la raíz, obteniendo los nodos más pequeños posibles para encontrar la trayectoria con el promedio más pequeño. Dado el nodo U^iD^j el promedio aritmético más grande alcanzado por alguna trayectoria es:

$$\frac{1+U+U^2+\ldots+U^i+U^iD+U^iD^2+U^iD^3+\ldots U^iD^j}{i+j+1}=\left[\frac{1-U^i}{1-U}+\frac{1-D^{j+1}}{U^i(1-D)}\right]\frac{1}{i+j+1}$$

y para el mínimo:

$$\frac{1+D+D^2+\ldots+D^j+UD^j+U^2D^j+\ldots+U^iD^j}{i+j+1}=\left[\frac{1-D^j}{1-D}+\frac{1-U^{i+1}}{D^j(1-U)}\right]\frac{1}{i+j+1}$$

y para el promedio máximo del promedio geométrico:

$$\left[(U)(U^2)\cdot\ldots\cdot(U^i)(U^iD)(U^iD^2)(U^iD^3)\cdot\ldots\cdot(U^iD^j)\right]^{\frac{1}{i+j}}=U^{\frac{i(i+1)+2ij}{2(i+j)}}D^{\frac{j(j+1)}{2(i+j)}}$$

por último el promedio mínimo:

$$\left[(D)(D^2)\cdot\ldots\cdot(D^j)(UD^j)(U^2D^j)(U^3D^j)\cdot\ldots\cdot(U^iD^j)\right]^{\frac{1}{i+j}}=U^{\frac{i(i+1)}{2(i+j)}}D^{\frac{j(j+1)+2ij}{2(i+j)}}$$

y así tenemos las fórmulas para el promedio más grande de cada nodo.

Algoritmo para el método binomial alternativo:

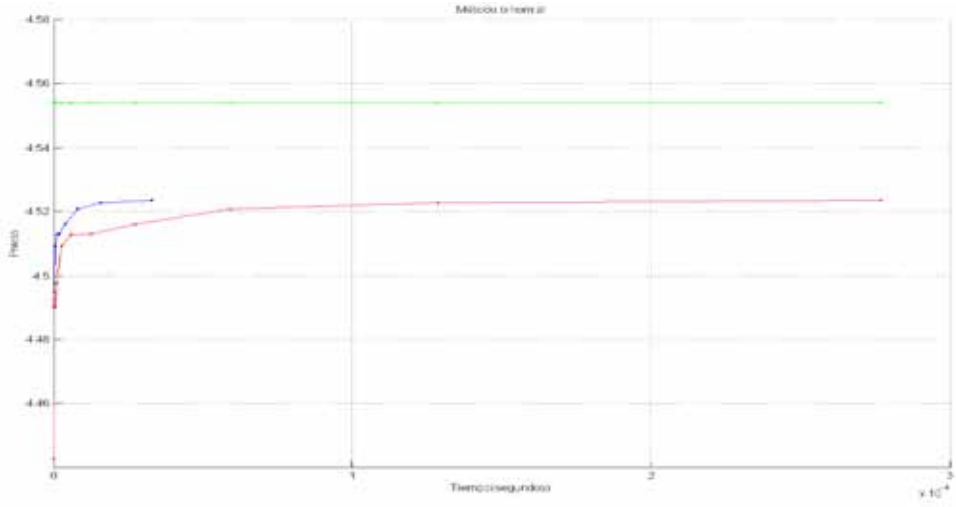
1. Se obtienen los valores más grandes y más pequeños del promedio que alcanzan los nodos, y después obtener una cantidad n – 2 con $n\geq 2$ entre el máximo y el mínimo espaciados entre sí con igual magnitud, estos n – 2 números más el máximo y el mínimo forman *n* números representativos de los promedios que puede llegar a tener un nodo.
2. A los *n* número representativos del periodo de maduración les calculamos el *payoff*.
3. Tomamos un nodo cualquiera de un periodo antes al de maduración, tomamos uno de los *n* valores representativos del promedio de ese nodo, sea S^i_{ave} nuestro número y sea S el subyacente asociado a ese nodo. Con ese valor y con SU formamos un nuevo promedio, del cual, interpolaremos su precio de la opción, en este caso el *payoff*, con ayuda de los valores representativos de ese periodo, sea V^i_+, de igual manera obtenemos el valor de la opción del nuevo promedio formado por nuestro valor S^i_{ave} y *SD*, sea V^i_- éste valor.
4. Con esto dos valores obtenemos la aproximación del precio de la opción correspondiente a S^i_{ave}, sea V^i. Entonces: $V^i=e^{-r\Delta t}\left(pV^i_+ +(1-p)V^i_-\right)$.
5. Se hace el mismo procedimiento para $i=1,\ldots,n$, es decir, toda la *n* valores representativos.
6. Se realizan los pasos 3 al 5 para los demás nodos del periodo.

7. Se realizan los pasos 3 al 6 para dos periodos antes de la maduración, utilizando los precios de la opción ya obtenidos del siguiente periodo.
8. Se repite el paso 7 para los periodos restantes siguiendo el orden de atrás hacia adelante.

3.3.1.1 Aplicaciones del Método binomial

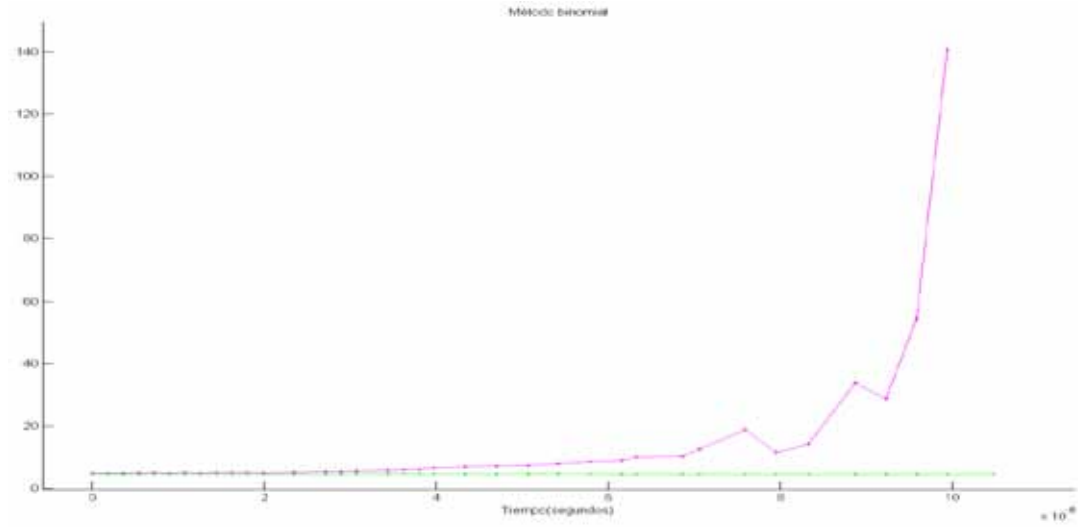
Considerando una opción de precio promedio, europea, con precio de subyacente 100, precio de ejercicio 100, periodo de 1 año, call, promedio geométrico y volatilidad de 15%, se compararán el método binomial recursivo, binomial alternativo y binomial con matrices.

Figura 6. Gráfica de tiempo contra precio del método binomial con matrices (azúl), binomial con recursividad (rojo) y el precio obtenido con fórmula (verde).



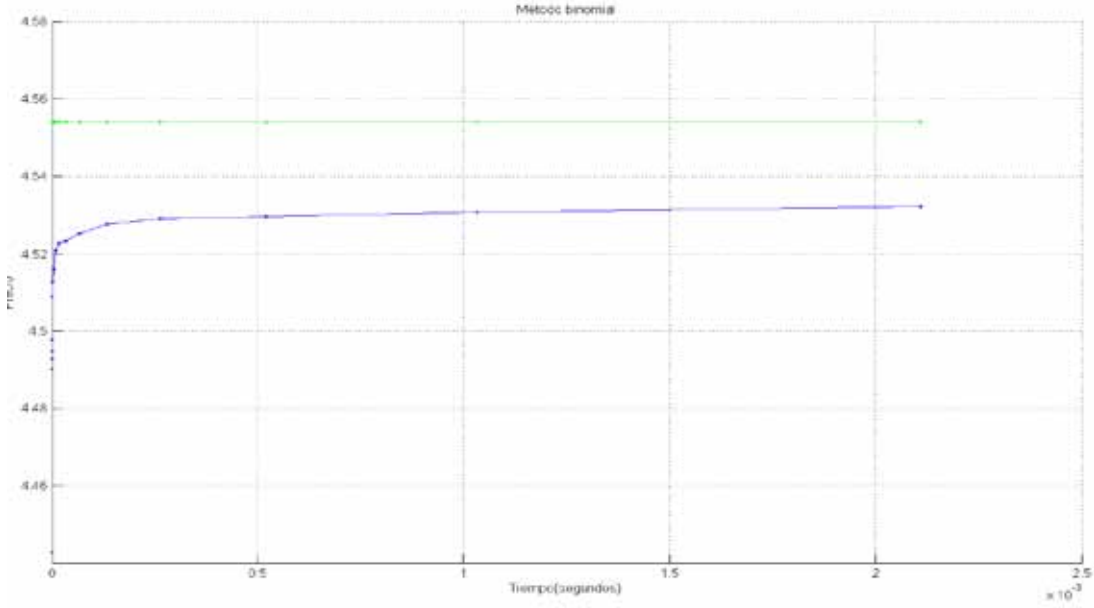
Los precios de la opción obtenidos por el método binomial con matrices y con recursividad son los mismos pero el resultado por el método binomial con recursividad tardó menos tiempo en calcularse. La línea que representa el precio por fórmula, es para fines de comparación y el valor obtenido es casi instantáneo para esta última y las demás gráficas.

Figura 7. Precios contra tiempo del método alternativo (rosa) y el precio con fórmula (verde).



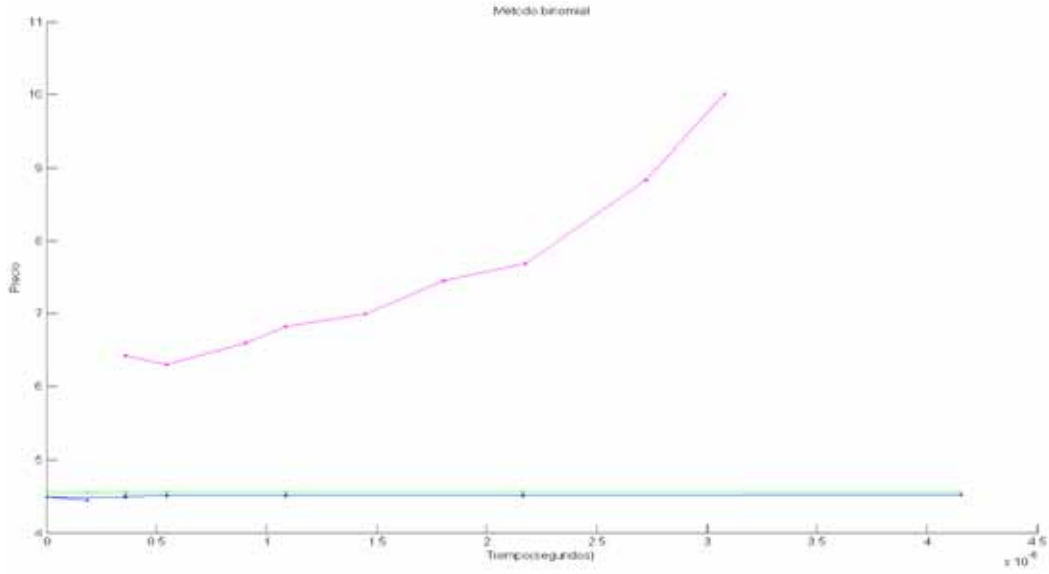
Se puede apreciar que se sobre valúa el precio de la opción, conforme aumentan el número de periodos, se emplearon de 4 a 45 periodos; el precio diverge pero parte de valores cercanos al obtenido con la fórmula.

Figura 8. Precio contra tiempo del modelo binomial recursivo (azúl) y el precio con fórmula (verde).



Se tomó de 4 a 24 particiones de tiempo (izquierda a derecha) conforme se va refinando las particiones el precio del binomial recursivo tiende al valor del precio de la fórmula, pero en cada nuevo valor se tarda el doble y se acerca con mayor lentitud.

Figura 9. Precio contra tiempo del método binomial alternativo (rosa), el método binomial recursivo (azúl)y el precio con fórmula (verde).



Por lo tanto para futuras comparaciones se empleará al método binomial recursivo.

3.3.2 Método Simulación Montecarlo

Este método se aplica al caso de las opciones de tipo europeo, ya sea *average strike* o *average price, put call* y promedio geométrico o promedio aritmético. Éste método es fácil de implementar, pero es necesario un buen generador de números aleatorios.

Se simulan trayectorias múltiples, en cada una, se obtiene el promedio final y se emplea según sea el tipo de opción *(average price ó average strike*), se trae a valor presente con la tasa libre de riesgo, esto se repite para todas las trayectorias y al final se obtiene el promedio de los valores presentes de las trayectorias. Se considera la muestra de trayectorias para obtener el valor esperado del *payoff* y se descuenta con la tasa libre de riesgo. Suponiendo un derivado dependiente de una sola variable de mercado *S* que proporciona un *payoff* al tiempo *T*. Asumiendo que la tasa de interés es constante, se puede valuar el derivado como sigue:

1. Modelar un camino aleatorio para *S* con una formulación de riesgo neutral.
2. Calcular el *payoff* del derivado.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para obtener varias muestras del valor del *payoff* del derivado con la formulación de riesgo neutral (la cantidad depende de la capacidad del la computadora donde se ejecue el programa).
4. Calcular el promedio de la muestra de *payoff*'s obteniendo un estimado del valor esperado del *payoff* con la formulación de riesgo neutral.
5. Descontar al valor esperado del *payoff* a la tasa de riesgo neutral para obtener un estimado del valor del derivado.

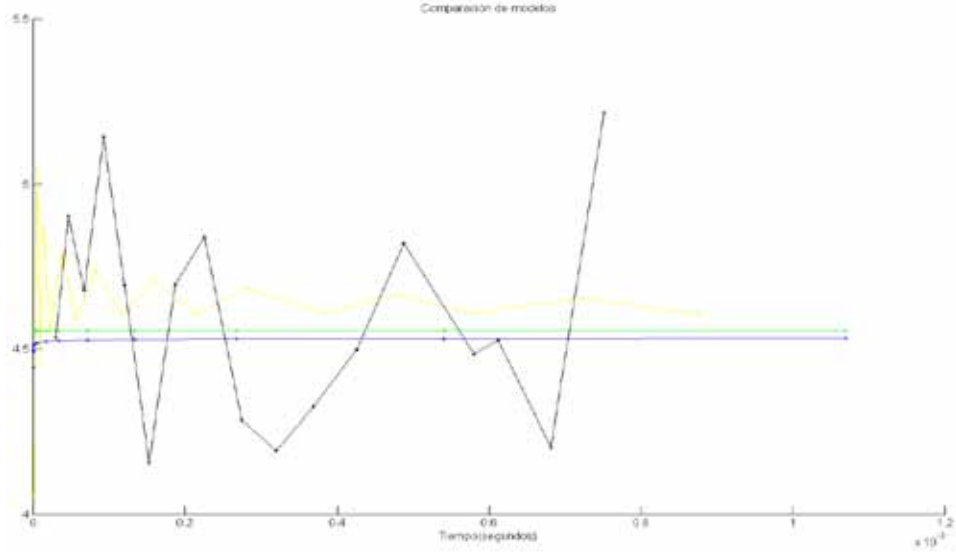
metodologías y los recursos computaciones con los que se cuentan, esto se ve expresando en tiempo de ejecución y uso de la memoria de la computadora.

Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio geométrico, ya sean *put* o *call* tienen una fórmula cerrada la cual no consume recursos significativos, por lo que resulta más eficiente calcular mediante la fórmula. Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio aritmético, ya sean *put* o *call,* tienen dos fórmulas cerradas que suponen lognormalidad, lo que puede resultar que sean menos precisas; sin embargo, con los mismos parámetros arrojan resultados similares, como se puede apreciar a continuación:

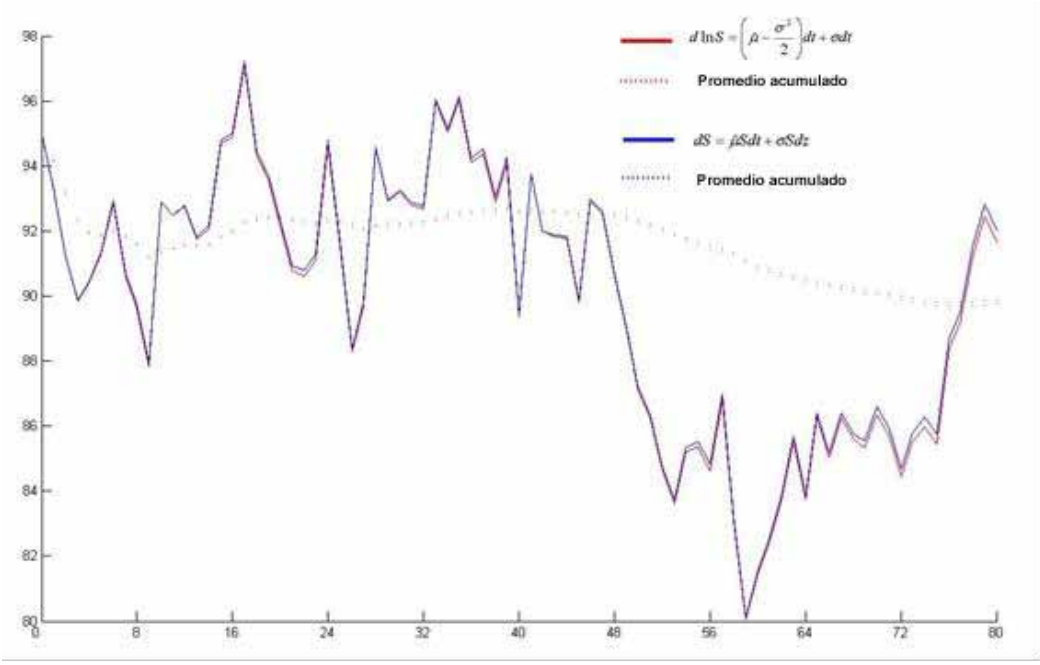
Aproximación ***Turnbull y Wakeman***	**Levy's**	**Binomial**
21.447643114349148	21.447688799406635	21.445250161954878

En las opciones restantes se puede emplear el modelo alternativo, el cual es rápido y arroja una buena aproximación en poco tiempo de ejecución, pero con más tiempo de ejecución el resultado no es tan preciso es decir, entre más particiones tenga el tiempo, el precio tiende a ser impreciso y tiende a divergir. El modelo Montecarlo es de fácil implementación y es un modelo que arroja un resultado más confiable pero solo sirve para opciones de tipo europeo.

Figura 14. Comparación de modelos entre el modelo diferencial (amarillo), binomial recursivo (azul), Montecarlo (negro) y el valor de la fórmula (verde).



El modelo binomial y el modelo diferencial calculan todos los tipos de opciones, pero la forma en la que están implementados ocasiona que el modelo binomial en un mismo tiempo



La ventaja de usar $\ln S$ es que esto sigue una generalización del proceso de Wiener. Esto se refiere a que la ecuación:

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}$$

es cierta para todo T, a diferencia de la primera ecuación que sólo es cierta si Δt tiende a cero. Esto significa que:

$$S(T) = S(0)e^{\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}}$$

$$\Rightarrow S(T) = S(0)e^{\left((r-q) - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\varepsilon\sqrt{T}}$$

Se necesita conocer la trayectoria desde *S(0)* hasta *S(T)*, en particular en las opciones de tipo asiático debido a que es necesario conocer el camino seguido por el activo subyacente. Cualquier proceso estocástico para S puede ser acomodado. La desventaja de la simulación Monte Carlo es que consume desde algunos segundo hasta horas en la computadora por que entre más simulaciones es más precisa la valuación y no es tan operable en situaciones donde hay oportunidades de ejercer tempranamente, es decir, no contempla las opciones de tipo americano.

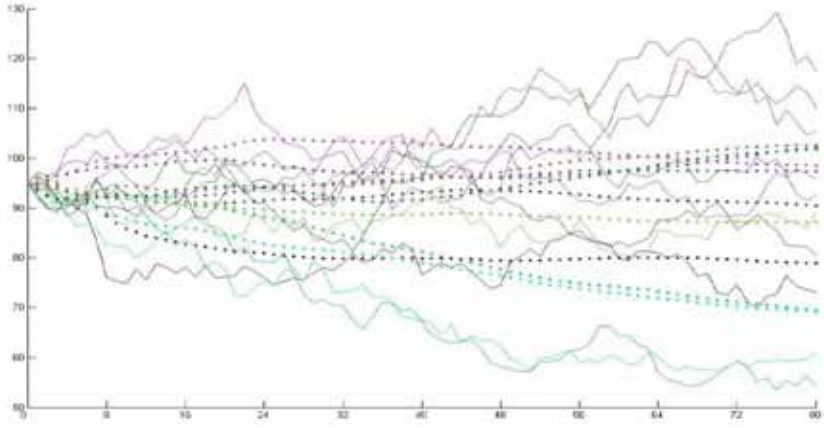
Algoritmo Simulación Monte Carlo:

1. Se crea la función con los siguientes parámetros: $S_0, X, T, periodos, trayectorias, r, q, \sigma$.
2. Se inicializa un contador $cont = 0$ que va a sumar los *payoff's*.
3. Del paso 4 al 8 se hace un ciclo desde 1 hasta *n trayectorias*.

4. Se inicializa la variable $s=S_0$ y $S_{ave}=S_0$.
5. Del paso 6 al paso 7 se hace un ciclo desde 1 hasta *m* periodos
6. Se iguala $s = s(r-q)\left(\frac{T}{periodos}\right) + s\left(\sigma\sqrt{\frac{T}{periodos}}\right)\left(aleatorioNormal(0,1)\right)$

   donde la función *aleatorioNormal*(0,1) es un generador de números aleatorios normales con media 0 y varianza 1.
7. Obtenemos el nuevo promedio S_{ave} obteniéndolo con el promedio anterior y el nuevo precio de s. Por ejemplo $S_{ave} = \frac{S_{ave} * (periodo - 1) + s}{periodo}$ para el promedio aritmético, siendo *periodo* el número que indica en qué periodo va del ciclo que se inició en el paso 5.
8. Se obtiene el *payoff* y se acumula en la variable *contador*. Entonces *contador = contador + payoff*.
9. Por último hacemos que la función regrese el valor $\frac{contador}{trayectorias}e^{-rT}$.

Figura 11. Simulación de diez trayectorias (líneas), tienen el mismo color que el de su respectivo promedio acumulados (líneas punteadas).



Método explícito diferencial finito: Se aproxima la ecuación diferencial parcial, por medio de aproximaciones de las letras griegas.

Aproximación de θ: Se define como la derivada de *V* respecto a *t* cuando $t = T - k\Delta t$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \lim_{h\to 0} \frac{V(S,t+h) - V(S,t)}{h},$$

se puede aproximar la derivada para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) \approx \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\partial t}.$$

Aproximación de Δ: Se define como la derivada de *V* respecto a *S*, y se puede aproximar para el valor de la rejilla usando:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\partial S}$$

Aproximación de Γ: Se define como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\partial S^2},$$

Entonces, se puede aproximar la ecuación de *Black-Scholes*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Como:

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\partial S^2} + rS\frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\partial S} - rV_i^k = O(\partial t, \partial S^2)$$

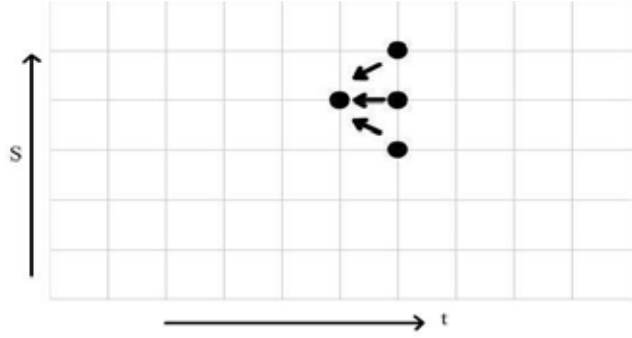
donde $O(\partial t, \partial S^2)$ es el error de la ecuación.

Al despejar el valor que nos interesa tenemos:

$$V_i^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\partial S^2} + rS\frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\partial S} - rV_i^k\right)\partial t + V_i^k$$

y así podemos obtener el valor de la opción de un periodo anterior:

Figura 12. Obtención de V_i^{k+1} a partir de V_{i-1}^k, V_i^k y V_{i+1}^k.



Condición de salto: El primer paso en la derivación es la observación de que la ecuación diferencial estocástica para *I* es degenerada $\partial I = 0$. Esto se debe a que la variable *I* pude solo cambiar en el sistema discreto de datos t_i. Esto es cierto si $t \neq t_i$ para toda *i*. La ecuación del precio es la ecuación de Black-Scholes básica:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

Ahora *V* es una función de tres variables, donde *I* es un parámetro. La muestra de datos del precio del subyacente no muestra fuertes cambios. Mientras el resultado de la muestra de datos es conocido y el dinero no cambie de manos no se puede realizar cualquier salto en el valor de la opción. Sea t_i^- el tiempo infinitesimal antes de la muestra de datos en t_i y t_i^+ el tiempo infinitesimal después de la muestra de datos, la continuidad del valor de la opción es representada matemáticamente por:

$$V\left(S,I_{i-1},t_i^-\right)=V\left(S,I_i,t_i^+\right),$$

en otras palabras, tenemos:

$$V\left(S,I,t_i^-\right)=V\left(S,F\left(S,I,i\right),t_i^+\right),$$

la cual es llamada **condición de salto**.

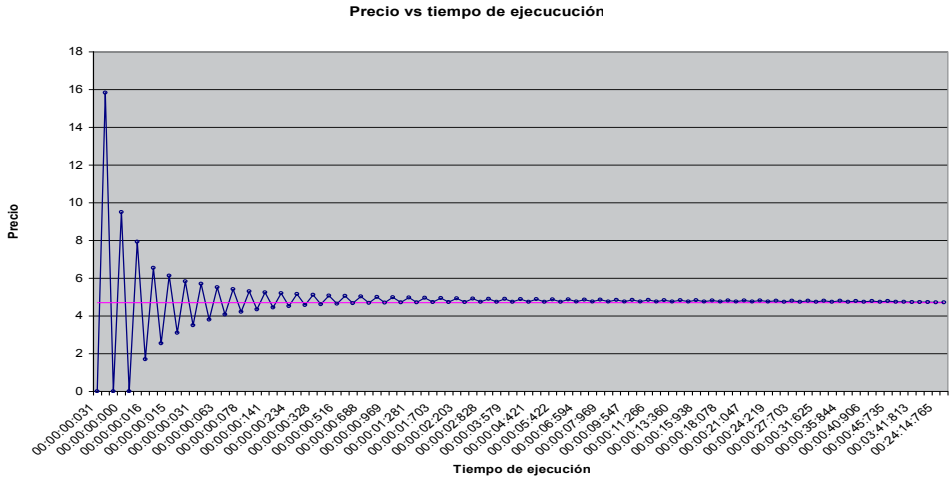
Cuando el dinero cambia de manos en un dato en especial, aquí ocurrirá un cambio repentino en el valor de la opción en ese tiempo. Si nosotros seguimos el camino de *S* en el tiempo, veremos que es continuo. Sin embargo, el camino para *I* es discontinuo. Allí es salto determinista en *I* a través de la muestra de datos. Si nosotros graficamos *V* como una función de *S* e *I* justo antes la muestra de datos podemos ver que para mezclar a *S* e *I* el precio de la opción será discontinua. Pero esta grafica tendrá que ser interpretada correctamente; $V(S,I,t)$ puede ser discontinuo como una función de *S* e *I;* así como *V* es continuo a lo largo de cada camino realizado de *S* e *I*. En particular, en el caso de las opciones asiáticas con promedio aritmético en el tiempo t_i se soluciona la ecuación de Black-Scholes para $V(S,A,t)$ con:

$$V(S,A,t_i^-)=V\left(S,\frac{i-1}{i}A+\frac{1}{i}S,t_i^+\right),$$

y una conveniente condición final representando el *payoff*.

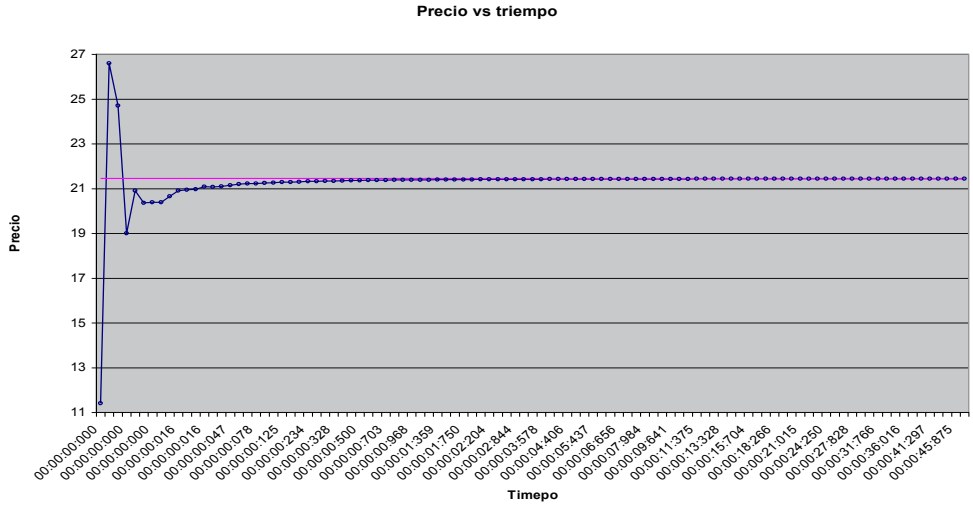
3.3.2.1 Aplicaciones del Método Simulación Montecarlo

Figura 12. Simulación de precio promedio, call, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 100, r = 0.05, sigma = 0.15.



Tipo: precio promedio, call, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 100, r = 0.05, sigma = 0.15.

Figura 13. Simulación de precio promedio, call, europea, promedio aritmético, precio del subyacente: 100, tiempo del periodo: un año, precio strike: 80, r = 0.05, sigma = 0.15.



4. Conclusiones

Sin lugar a dudas, la mejor forma de valuar opciones es mediante fórmulas cerradas, pero debido a que no necesariamente existen, para todos los tipos de opciones, se hace necesario, implementar algunos modelos numéricos. La eficiencia de los modelos depende de las

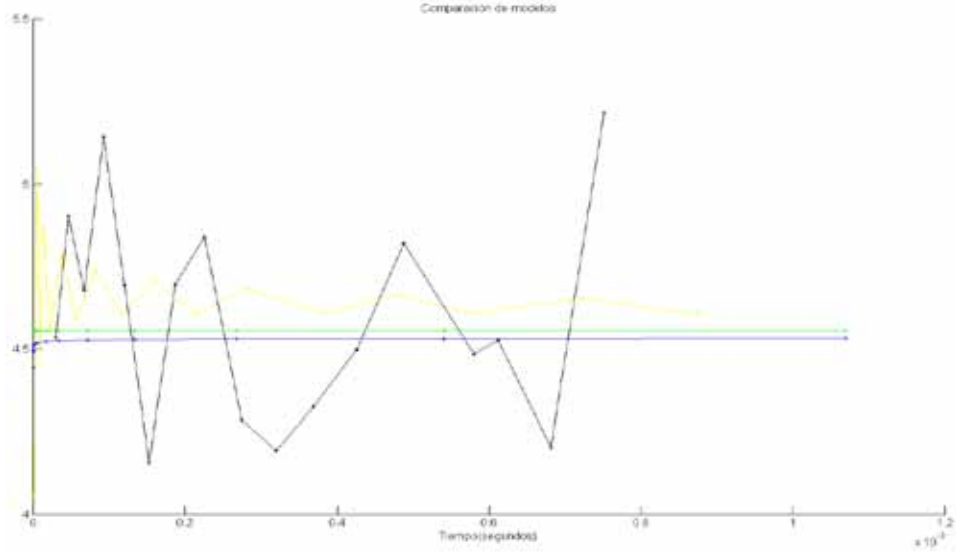
metodologías y los recursos computaciones con los que se cuentan, esto se ve expresando en tiempo de ejecución y uso de la memoria de la computadora.

Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio geométrico, ya sean *put* o *call* tienen una fórmula cerrada la cual no consume recursos significativos, por lo que resulta más eficiente calcular mediante la fórmula. Las opciones de tipo europeo con precio promedio y de promedio aritmético, ya sean *put* o *call,* tienen dos fórmulas cerradas que suponen lognormalidad, lo que puede resultar que sean menos precisas; sin embargo, con los mismos parámetros arrojan resultados similares, como se puede apreciar a continuación:

Aproximación ***Turnbull y Wakeman***	**Levy's**	**Binomial**
21.447643114349148	21.447688799406635	21.445250161954878

En las opciones restantes se puede emplear el modelo alternativo, el cual es rápido y arroja una buena aproximación en poco tiempo de ejecución, pero con más tiempo de ejecución el resultado no es tan preciso es decir, entre más particiones tenga el tiempo, el precio tiende a ser impreciso y tiende a divergir. El modelo Montecarlo es de fácil implementación y es un modelo que arroja un resultado más confiable pero solo sirve para opciones de tipo europeo.

Figura 14. Comparación de modelos entre el modelo diferencial (amarillo), binomial recursivo (azul), Montecarlo (negro) y el valor de la fórmula (verde).



El modelo binomial y el modelo diferencial calculan todos los tipos de opciones, pero la forma en la que están implementados ocasiona que el modelo binomial en un mismo tiempo

de ejecución soporte menos particiones que el modelo diferencial lo que genera que el precio de la opción binomial de tipo americano este subvaluado debido a que se toman menos veces la decisión de ejercer o no, la cual aumentaba el precio de la opción debido a que esa decisión da a elegir el máximo entre dos valores.

Bibliografía

Fernández, Pablo Ariño Miguel Ángel; "Derivados exóticos", Documento de investigación No.308, Marzo, 1996; Centro internacional de Investigación Financiera (CIIF), Universidad de Navarra, Barcelona España.

Wilmott, Paul, "*Paul Wilmott on Quantitative Finance*", John Wiley & Sons Ltd (2000), volumen 1 y 2.

Kwok, Y. K. (Yue - Kuen), "*Mathematical Models of Financial Derivatives*", Springer Finance (1998).

Higham, Desmond J., "*An Introduction to Financial Option Valuation*", Cambridge University Press (2004).

Dubofsky, David A., "*Derivatives, Valuation and Risk Management*", Oxford University Press (2003).

Hull, John C., "*Options, Futures, and other Derivatives*", Prentice Hall, sexta edición.

Gaarder, Espen, "*The Complete Guide to Option Pricing Formulas*", McGraw-Hill (2007).

CAPÍTULO XXXVIII

Extensión del Modelo Black & Scholes con opciones reales y matemática difusa: análisis de un parque eólico en México.

César López Martínez,

Universidad Nacional Autónoma de México

Edgar Ortiz Calisto

Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se parte de la metodología desarrollada por Carlson y Fuller (2000) y Thiagarajah (2007) para avanzar un modelo de valuación de opciones reales con matemáticas difusas (VORD). El modelo incluye variables de incertidumbre del modelo de Black y Scholes (1973) para la evaluación de opciones financieras. VORD modifica dicho modelo para valuar opciones reales empleando distribuciones difusas adaptativas. VORD es aplicado para la valuación de un parque eólico en México. Los resultados confirman la relevancia del modelo: señalan la viabilidad de ésta inversión con resultados robustos, al contrario del resultado obtenido con la aplicación de la técnica tradicional de VPN.

Clasificación JEL: G17, H43.

Palabras Clave: Valor Presente Neto, Opciones Reales Difusas, Distribución Difusa Adaptativa.

1. Introducción

A partir del trabajo desarrollado por Black y Scholes (1973) referente a la valuación de opciones financieras contingentes en mercados financieros y posteriormente con los primeros trabajos de Myers (1977), Brennnan y Schartz (1985), Kulatilaka, (1986) Trigeorgis (1996), Childs, Ott, y Copeland y Antikarov (2003) la teoría de Opciones Reales, se ha vuelto más importante para la valuación de proyectos. Las técnicas tradicionales como el valor presente neto (*VPN*) y la tasa interna de retorno (*TIR*), entre otros, presentan fallas en su metodología de cálculo para valuar activos reales. Una de sus principales faltas es que no toman en cuenta la incertidumbre intrínseca de los flujos de caja del proyecto y esto se debe en principio a que su procedimiento de cálculo es lineal y estático; aun más, ignoran las opciones existentes en una inversión, esto es, la presencia de que el proyecto puede tomar diferentes conformaciones o temporalidades y que en el futuro surjan posibilidades de ampliar, contraer, posponer, enmendar, e incluso abandonar el proyecto (Venegas Martínez y Fundia Ainzestat, 2006). Esta falta de flexibilidad, limita la toma de decisiones estratégicas por parte de los responsables del proyecto (Giddy, 2000).

Durante décadas las inversiones evaluadas mediante el *VPN* en proyectos estratégicos han generado decisiones erróneas debido a la presencia de escenarios de incertidumbre y la falta de consideración sobre la flexibilidad del proyecto, incurriéndose así muchas veces en grandes pérdidas e incluso la bancarrota; simplemente, en muchos casos el *VPN* y otras técnicas convencionales dejan de ser una técnica idónea para muchas empresas y el sector público para sus decisiones de inversión. Problemas de este tipo dentro del sector energético no han sido la excepción. De hecho, las técnicas tradicionales son limitadas desde que este sector ha sido desregulado en muchos países, la demanda mundial por energéticos se ha incrementado exponencialmente en tanto que la oferta es incierta y su producción y venta es muy competitiva; las técnicas tradicionales de evaluación son insuficientes para asir adecuadamente estos factores adicionales de riesgo e incertidumbre (Fernandes, Cunha y Ferreira, 2011).

En el caso de México, el sector energético juega un papel crucial para su desarrollo y estabilidad económica. A nivel mundial juega un papel importante en la oferta de petróleo. En 2013 los ingresos de Pemex ascendieron, México exportó en promedio 2,875 barriles de crudo diariamente, equivalente a 3.31% de la producción mundial. Estos ingresos durante las últimas décadas han significado alrededor del 35% de los ingresos fiscales nacionales. Sin embargo, la fragilidad de la economía se ha incrementado a la par que sus posibilidades de crecimiento se restringen debido a la desmedida dependencia en los ingresos petroleros, aunado a una continua producción decreciente, así como a la baja en los precios internacionales de este bien y su alta volatilidad.

La respuesta a éste reto no radica en tan sólo en incrementar la productividad petrolera. A la par es necesario que México desarrolle alternativas de producción, competitivas a nivel internacional y que a su vez beneficien a los consumidores locales. En éste respecto el reto del sector energético mexicano es el garantizar una oferta suficiente y oportuna y al menor costo posible, y en consonancia con el medio ambiente. Aunque las energías fósiles continuarán siendo las más importantes en las décadas venideras, las fuentes renovables de energía incrementarán su importancia, no solo por el agotamiento de las fuentes tradicionales, sino también debido a sus beneficios en el cuidado del medio ambiente, así como en la disminución de los efectos negativos del cambio climático.

Una alternativa que debe fomentarse es el desarrollo de parques eólicos. A nivel global la energía eólica ha alcanzado un grado de madurez que permite afirmar que se trata de una fuente limpia, competitiva y con una tecnología de aprovechamiento madura (Proyecto TECH4CDM, 2010). Constituye la energía renovable más vendida a nivel internacional por potencia instalada (MW) y por energía generada. Por sus características geográficas México cuenta con condiciones ideales para la generación de

ésta fuente de energía, particularmente en el istmo de Tehuantepec. Estimaciones conservadoras indican que el potencial de éste tipo de energía en México es de 40 GW que debe ser aprovechado. (Secretaría de Gobernación, 2012). Es importante por tanto impulsar las inversiones en energía eólica. Su éxito debe ser garantizado con una correcta evaluación de proyectos como demanda la sociedad aplicando modelos que contemplen cada vez mejor la incertidumbre y flexibilidad de una inversión y de esta manera optimizar el valor del proyecto (Amram y Kulatilaka, 2001). Ésta es la preocupación y contribución del presente trabajo. Fundamentándose en la a metodología desarrollada por Carlsson y Fullér (2000) y Thiagarajah *et al*. (2007) avanza un modelo de valuación de opciones reales difusas (*VORD*) bajo el marco del modelo de Black & Scholes. El modelo VORD hace uso de distribuciones difusas adaptativas y se aplica para la valuación de la opción de invertir en México en un parque eólico de 111 MW de capacidad.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. La Sección 2 identifica los determinantes para el paso de la valuación con la técnica del VPN a opciones reales y su aplicación con matemáticas difusas. La Sección 3 presenta una revisión somera de estudios afines. La Sección 4 examina la relación entre VPN y opciones reales. La Sección 5 define los principales conceptos de matemática difusa, algunas propiedades entre conjuntos, los tipos de distribuciones de posibilidad; además se determina las expresiones para calcular la esperanza, varianza y covarianza de una distribución de posibilidad. En la Sección 6, aplicando los fundamentos matemáticos previos, se incluye la difusividad en las principales variables de incertidumbre del modelo Black & Scholes obteniendo un modelo característico para la valuación de opciones reales difusas. La sección 7 presenta para la valuación de un parque eólico utilizando la teoría de opciones reales y el modelo difuso desarrollado en la sección anterior; además se compara el modelo propuesto con modelos afines que le anteceden. Finalmente la última sección presenta las conclusiones.

2. Del Valor Presente Neto a Opciones Reales y matemáticas difusas

En principio el método de *VPN* tiene como regla general aceptar el proyecto si el $VPN > 0$ o rechazar si el $VPN < 0$; una importante duda surge cuando el $VPN \approx 0$ ya que en este caso el valor se encuentra cercano al punto de umbral cero y no existe suficiente certeza sobre si aceptar o rechazar el proyecto sea una decisión favorable para los agentes económicos interesados en la inversión. Es aquí cuando se presenta la necesidad de usar herramientas que permitan esclarecer mejor sobre la factibilidad económica-financiera de proyectos de energía, contemplando factores preponderantes como es la volatilidad en los precios de commodities, o simplemente tomando en cuenta si es conveniente desde el punto de vista financiero posponer la inversión y esperar un tiempo para llevarla a cabo. La teoría de opciones reales sobrepone tales cuestionamientos; ésta teoría surgió como una extensión de la teoría de opciones financieras aplicada para la evaluación de inversiones reales. El término "opción real" fue originalmente acuñado en la literatura financiera por Myers (1977), y se consolidó posteriormente con los trabajos de los autores citados anteriormente, a cuyo conjunto debe añadirse a Kulatilaka y Perotti (1998), Amram y Kulatilaka (2001), Boer (2002), Mun (2002), y Triantis y Borrison (2002) Se define a opciones reales como el conjunto de alternativas disponibles que se tiene cuando se administra un proyecto de inversión y que permiten tomar cursos de acción diferentes después de conocer algún tipo de incertidumbre pasada y bajo diversos escenarios. El termino hace referencia al uso y manejo de activos reales o físicos y sus principios de valuación son similares en cómo se valúan opciones financieras en los mercados financieros.

En este respecto, cabe resaltar que entre los métodos más utilizados para valuar opciones reales se encuentran los métodos analíticos y los numéricos; con los primeros se llega a soluciones de forma cerrada para el valor de la opción. Los métodos numéricos se acercan al valor del activo subyacente mediante aproximaciones numéricas. Una clasificación general de estos métodos se contempla en Hommel y Lehmann (2001); otra clasificación más amplia la presenta López Martínez (2014) quien incluye aproximaciones utilizando métodos de la inteligencia artificial como redes

neuronales, lógica difusa, neurodifusas y algoritmos genéticos. Los métodos de inteligencia artificial se emplean principalmente en áreas de ingeniería e informática; en la literatura económico-financiera también existen importantes trabajos que se apoyan en estos métodos para encontrar soluciones a problemas de éstas áreas (Bacchini, García-Fronti, y Márquez, 2007).

3. Estudios relacionados

La literatura sobre matemáticas difusas y opciones reales difusas enfocadas a la evaluación de proyectos es amplia y variada. Un antecedente importante es el trabajo de Buckley (1987) quien avanzó el uso de conjuntos borros para la representación de valor futuro borroso, valor presente borroso y tasa interna de rendimiento borrosa. Posteriormente Carlsson y Fuller (1999) formularon un método para determinar el presupuesto de capital con flujos de caja borrosos. Desde éste punto de partida más tarde estos mismos autores presentan un modelo de valuación con opciones reales fundamentado en un modelo de Black y Scholes borroso. Continuando con éstas líneas de investigación, Lin *et al.* (2007) por medio de algoritmos genéticos optimizan portafolios de inversión en mercados de capitales; Nikookar *et al.* (2012) utilizan opciones difusas para la fijación de presupuestos de capital bajo escenarios de incertidumbre.

En otros estudios recientes, Wang y Hwang (2007) desarrollan un modelo para seleccionar un portafolio borroso de investigación y desarrollo (I&D), utilizando un enfoque de opciones reales; su aplicación es para la cobertura contra la incertidumbre característica de la I&D. Igualmente, Enevoldsen (2011) presenta la valuación de un proyecto biotecnológico con opciones reales utilizando cuantificaciones borrosas. Por su parte, Pushkar y Mishra (2011) presentan un modelo matemático para optimizar el valor borroso de una opción para un proyecto de múltiples etapas de tecnología de la información. El proyecto avanza en un programa cero-uno borroso que maneja tanto la incertidumbre como la flexibilidad. Finalmente, respecto al sector forestal Lliades

(2005) utiliza un modelo difuso para el análisis de riesgo de incendios forestales; y Milanesi y Broz (2013) emplean la lógica borrosa para la toma de decisiones en el sector forestal, utilizando el método de fuzzy pay-off.

Respecto al sector energético, existe un creciente interés; investigaciones que merecen resaltarse incluyen a Martínez González y Quintero Hernández (2012) quienes analizan diversos métodos para evaluar distintas alternativas energéticas; su análisis incorpora a la lógica difusa para reducir la subjetividad del proceso de selección. Bednyagin y Gnansounou (2011) aplican opciones reales para la valuación de un programa de fusión de energía. Liang *et al* (2006) presentan un modelo para evaluar la generación de inversiones energéticas en China empleando una exhaustiva utilización información con un enfoque de estimación borroso y un procesos de análisis jerárquico. Kraemer y Madlener (2009) aplican la teoría de opciones reales borrosas para determinar la ventaja relativa de invertir en planta de gas natural de ciclo combinado versus una planta de carbón con y sin tecnología de conversión de captura y almacenamiento de carbón. Finalmente, cabe mencionar el estudio de Jaber, Mumllok y Awad (2005); los autores aplican la metodología de lógica difusa para analizar la conservación de energía en un sector residencial

En cuanto a proyectos de inversión en energía eólica, Mohamed, Eskhander, y Ghali (2001) vinculan un sistema de conversión de energía eólica con sistema asincrónico (AC–DC–AC). Emplean una técnica de control de lógica difusa para diseñar el monitoreo de la conversion. Por su parte, Calderaro *et al.* (2008) presentan una metodología, generada en la información para generar un modelo fuzzy Tagai-Sugeno-Kang para el máximo aprovechamiento de energía de turbinas con viento variable. Madlener, Glenks, y Weber (2014) aplican la teoría de conjuntos borrosos para la generación de portafolios óptimos de generación de energía eólica.

Otras investigaciones relevantes incluyen a Fernández Jiménez (2007), Hoyos, Farfán, Tilca y Cadena (2007), y Mutllu, Akpinar, y Bañikci (2009). Fernández Jiménez presenta varios modelos avanzados que incluyen conjuntos borrosos, para la predicción a corto plazo de la producción eléctrica en parques eólicos de España. Hoyos, Farfán, Tilca y Cadena presentan la simulación de un controlador difuso para un sistema pequeño de generación eléctrica eólico para viviendas familiares. Finalmente, Mutllu, Akpinar, y Bañikci presentan los resultados de una simulación y medidas de calidad de una subestación de parque eólico de Turquía, basándose en un controlador de lógica difusa.

4. Opciones Reales

Las decisiones de inversión en el sector energético en la economía global del presente son de carácter dinámico, complejo e incierto; esto imposibilita el uso de la herramienta del *VPN* en su forma convencional, conforme a lo resaltado anteriormente. Sin embargo, es preciso señalar que la flexibilidad integrada en las inversiones añade valor al proyecto. La metodología de opciones reales añade al VPN el valor la opción; la expresión que valúa y toma en cuenta las opciones del proyecto está dada por:

$$VPN_{estratégico} = VPN_{base} + Valor\ de\ la\ Opción \tag{1}$$

Esta ecuación descriptiva indica que si al método de *VPN* se agrega el valor que resulta de valuar la(s) opción(es) que integran el proyecto, se obtiene el valor real del proyecto $VPN_{estratégico}$. En este sentido, cabe además resaltar que esta nueva formulación del valor del proyecto incorpora al riesgo, integrado en los parámetros de valuación de las opciones reales. La mayoría de los agentes económicos son aversos al riesgo y frecuentemente sucede que cuanto mayor es la cantidad que está en juego más es el

temor por perder lo que se tiene, conforme a la teoría Prospectiva de la Utilidad.[1] Con el uso de la metodología de opciones reales se identifica y administra el riesgo, convirtiéndolo así en un factor favorable para la toma de decisiones.[2] A pesar de que las opciones reales surgen de los principios para valuar opciones financieras, existen similitudes pero también diferencias, resumidas en la Tabla 1.

Tabla 1. Elementos para la valuación de opciones reales y opciones financieras.

Parámetro	**Opción Real**	**Opción Financiera**
S_T	Valor presente de los flujos de efectivo esperados en *t*.	Precio del bien subyacente
X	Costo (valor presente) de la inversión del proyecto en *t*. El nivel al que se va a operar.	Precio del ejercicio o precio pactado. El nivel al que se va operar.
R	Costo del capital ponderado (WACC).	Tasa de interés libre de riesgo. Costo del capital ponderado (WACC)
σ	Volatilidad de los flujos de efectivo del proyecto.	Volatilidad del subyacente.
$T\text{-}t$	Tiempo de madurez del proyecto. Fecha en la que vence el contrato.	Tiempo total para la maduración. Fecha en la que vence el contrato.

Fuente: Adaptado de Mum (2002).

[1]

[2] Lo expresado en la ecuación (1) es explícito en la opción con opciones reales aplicando el método binomial. La evaluación de empresas o proyectos aplicando la fórmula de Black y Scholes integra los dos componentes de la ecuación (1) en sus resultados. Al respecto vale recordar que el modelo binomial converge a la fórmula de Black y Scoholes.

La variable que tiene mayor peso en el valor de una opción (real y financiera) es la volatilidad, σ, en la medida en que esta aumenta o disminuye se refleja de la misma manera en el valor de la opción. Las otras variables S_T, X, R y T, también tienen un notable efecto aunque menor en el valor de la opción; así, para valorar una opción real difusa en el presente trabajo se toman en cuenta todos los parámetros de la Tabla 1, a excepción de la variable tiempo.

5. Matemática difusa: principios y definiciones[3]

La lógica difusa parte de bases que corresponden con la teoría clásica de los conjuntos ordinarios, muchas de las leyes y axiomas por las que se rige la lógica clásica también son aplicables a la lógica difusa y sistemas difusos. Sin embargo, existen importantes conceptos que se diferencian y los cuales complementan la base teórica del modelo difuso de opciones reales que se desarrolla.

Definición 1. *(Conjunto Borroso)* Si X es una colección de objetos denotados por un grado de pertenencia x, entonces un conjunto borroso $\tilde{A}$ en X es un conjunto de pares ordenados:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x, \mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in X \right) \right\} \tag{2}$$

Donde $\mu_{\tilde{A}}(x)$ se conoce como función de membresía la cual mapea X al espacio de membresías M. Su rango es un subconjunto no negativo de números reales cuyos valores extremos son finitos. La familia de conjuntos difusos se denota por F. Así se tiene que $\mu_{\tilde{A}}(x)$ representa el grado de pertenencia de x en el conjunto difuso $\tilde{A}$. Desde el marco de referencia tradicional, esto se denota como:

[3] Esta sección se basa en los trabajos de Klir y Yuan (1995); Buckley, Eslami y Feuric (2002); y Reina (2008).

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A \\ 0 & ,x \notin A \end{cases}$$

Donde la función de membresía $\mu_{\tilde{A}}(x)$ solo puede tomar el valor de *0* o *1*. El valor *0* se usa para representar un grado de pertenencia nula y el valor *1* para representar pertenencia absoluta. La diferencia respecto a la lógica difusa es que la función de membresía puede tomar cualquier valor dentro del intervalo [0,1].

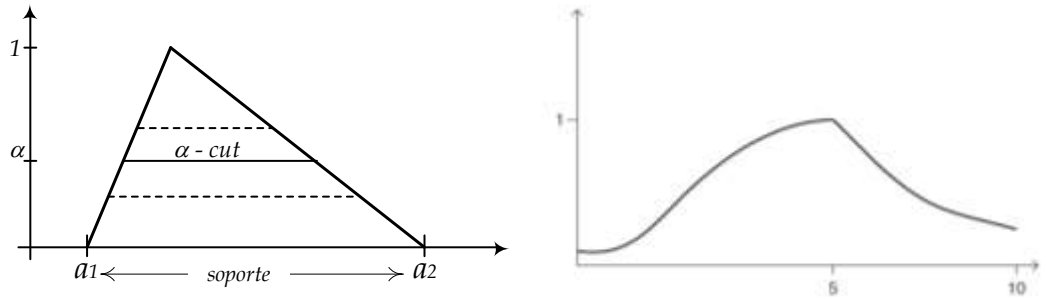
Definición 2. *(α - cut)* Si $\tilde{A}$ es un conjunto difuso en X y $\alpha \in [0,1]$. La alfa cortada, *α-cut* del conjunto difuso $\tilde{A}$ es el conjunto ordinario A^{α} dado por

$$A^{\alpha} = \left\{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \right\} \tag{3}$$

Definición 3. *(supp(Ã))* El soporte de un conjunto difuso *Ã, S(Ã)* es el conjunto ordinario de toda $x \in X$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$.

El conjunto de elementos que pertenecen al conjunto difuso Ã, al menos para el grado *α*, es conocido como *α-cut*, como se representa en la figura 2 (a).

Figura. 1. Representación difusa: a) distribución triangular, b) distribución tipo LR



a) b).

Fuente: Fullér (2000).

Definición 4. *(Conjunto difuso - LR)* Un número difuso Ã es de tipo-*LR* si existen dos funciones de referencia *L* y *R*, así como escalares *a>0*, *b>0*, con

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & , x \le m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & , x \le m \end{cases} \tag{4}$$

La figura 2 (b) muestra un conjunto Ã tipo LR.

Definición 5. *(Conjunto difuso vacio)* El subconjunto difuso de *X* es definido como el subconjunto difuso $\emptyset$ de *X* tal que $\varnothing(x) = 0,\ \forall\, x \in X$.

Definición 6. *(Punto difuso)* Sea $\tilde{A}$ un número difuso. Si *supp(A)={x₀}* entonces $\tilde{A}$ es llamado un punto difuso y se usa la notación $\tilde{A} = \overline{x}_0$.

Entre las principales operaciones aritméticas utilizando conjuntos difusos de forma trapezoidal, dado los conjuntos $\tilde{\mathrm{A}} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, son las que a continuación se describen:

$$\tilde{\mathrm{A}} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4) \tag{5.1}$$

$$\tilde{\mathrm{A}} - \tilde{B} = (a_1 + b_2, a_2 + b_1, a_3 + b_4, a_4 + b_3) \tag{5.2}$$

$$\tilde{\mathrm{A}} \bullet \tilde{B} = (a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2,\ \ a_3 \cdot b_3,\ \ a_4 \cdot b_4) \tag{5.3}$$

$$\tilde{\mathrm{A}} / \tilde{B} = (a_1 / b_4, a_2 / b_3,\ a_3 / b_2, a_4 / b_1) \tag{5.4}$$

$$\lambda\, \tilde{\mathrm{A}} = (\lambda a_1, \lambda a_2,\ \lambda a_3, \lambda a_4) \qquad , \lambda > 0 \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

$$\mu \tilde{\mathrm{A}} = (\mu a_2,\ \mu a_1,\ |\mu|\, a_4,\ |\mu|\, a_3) \qquad , \mu < 0 \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

$$\left[\lambda\, \tilde{\mathrm{A}}\right]^{\alpha} = \lambda \left[\tilde{\mathrm{A}}\right]^{\alpha} \qquad , \lambda > 0 \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Muchas de las propiedades anteriores son de utilidad para el desarrollo de la expresión que valúa opciones reales difusas en la siguiente sección.

5.1 Distribuciones difusas de posibilidad

El término "incertidumbre" puede ligarse con aquellas situaciones en la cual no se tiene o es limitado el conocimiento acerca de los estados de la naturaleza que podrían ocurrir. La mayoría de las decisiones que se toman en el mundo real toman lugar en situaciones donde la información y la secuencia de ellas no son propiamente conocidas, por lo tanto resulta más real y de utilidad manejar información difusa[4] para expresar situaciones en las que se exige toma de decisiones teniendo como base información incompleta o desconocida. La matemática difusa empieza a desarrollarse a partir de que Zadeh (1965) introduce el concepto de difusividad. El razonamiento humano y también muchos fenómenos físicos utilizan valores de verdad que no necesariamente son deterministas, es decir 0 o 1, verdadero-falso, etc. Por lo tanto la lógica difusa procura crear aproximaciones matemáticas para la resolución de cierto tipo de problemas, procurando ofrecer resultados exactos a partir de datos imprecisos.

Generalmente en los problemas financieros del mundo real la incertidumbre y aleatoriedad son características a todo cuestionamiento, para lidiar con estos elementos se recurre a la teoría de probabilidad proporcionando herramientas cuantitativas a estos fenómenos. Sin embargo cuando no se tiene una base de información e inferir probables resultados, surgen limitaciones a la solución de problemas. Dubois (2006) y Dubois *et al.* (2004) señalan como alternativa el uso de la teoría de posibilidad, la cual resulta de mayor utilidad respecto a la teoría de probabilidad, ya que esta teoría puede trabajar con

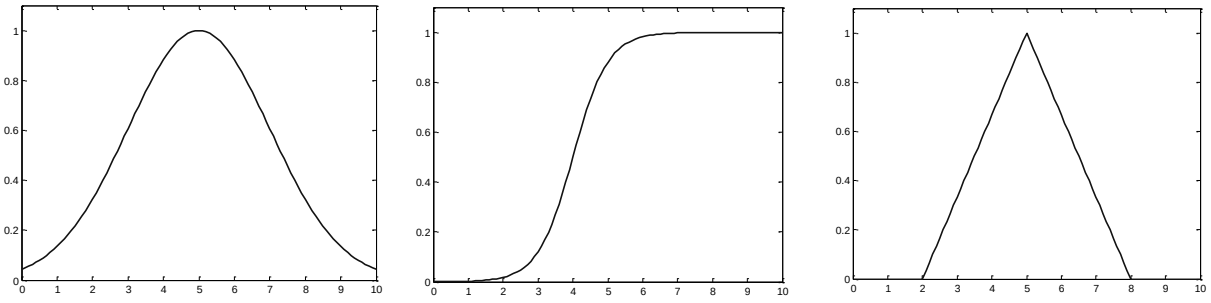
[4] El adjetivo "difuso" se debe a que los valores de verdad no-deterministas utilizados en una afirmación, por lo general, tienen una connotación de incertidumbre. Ej. En la afirmación "*vi un carro bonito*" cabe preguntarse qué tan bonito es, lo cual implica un elemento de incertidumbre. Por lo tanto información difusa ofrece la posibilidad de asignar más valores de verdad a los enunciados que la lógica clásica asignaría solamente como verdadero-falso, bonito-feo, etc.

información incompleta y muchas veces el proceso de cálculo es menos complejo que con el uso de la teoría probabilística. Además la teoría de posibilidad proporciona el marco idóneo para modelar varias clases de información como: números, intervalos, conjuntos aleatorios anidados, así como información lingüística y expresiones inciertas en diferentes escenarios (Prade, Dubois y Sanddri, 1993; Dubois *et* al, 2004). Pero así como la teoría de probabilidad interpreta las sentencias del mundo real desde diferentes puntos de vista, por ejemplo frecuencista, empírico, etc., la teoría de posibilidad establece sentencias que tienen que ver con; *1)* factibilidad, que tan fácil es lograr algo, *2)* plausibilidad, referente a la propensión de que llegue a ocurrir un evento, *3)* nivel gramatical, expresado por el significado del nivel de las sentencias (Ej. es posible que el tren arribe a tiempo), y *4)* marco lógico, se refiere a la consistencia con la disponibilidad de la información.

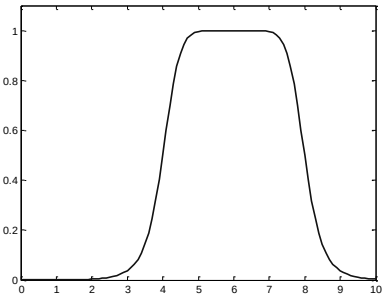
5.2 Principales distribuciones de posibilidad

Una distribución de posibilidad es aquella que asigna a cada elemento *u* de un conjunto *U* de alternativas un grado de posibilidad *(u)* $\in$ [0,1]. Algunas de las distribuciones de posibilidad más empleadas son las siguientes:

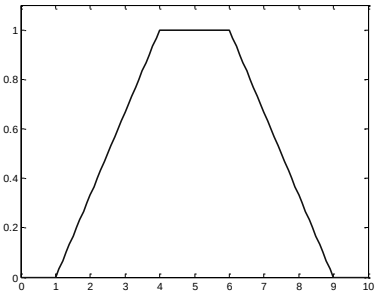
Figura 2. Distribuciones difusas de posibilidad.



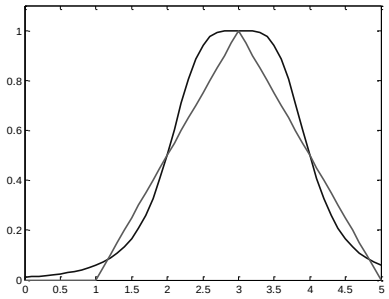
a) Función de Gauss *d) Función sigmoide* *b) Función triangular*



e) Función Gbell



c) Función trapezoidal



f) Función compuesta

Fuente: Elaboración propia

El presente trabajo utiliza principalmente la función de distribución triangular, por lo que para este tipo de distribución su función de membresía está dada por:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & ,a\le x\le b\\ 1 & ,b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} & ,c\le x\le d\end{cases} \tag{6}$$

En muchas ocasiones cuando se trabaja con sistemas difusos, resulta complejo en un principio hallar la función de membresía, no obstante existen formas de manipular y hallar la función mediante el método α-*cut*, Fullér y Carlsson, (2000) y Dutta *et al.* (2011). El método en sí es una forma de manipular diferentes operaciones aritméticas difusas, el procedimiento consiste en hallar el conjunto A^{α} a partir del conjunto trapezoidal en cuestión, así de (6) se obtiene que A^{α} está definido por:

$$A^{\alpha}=[(b-a)\,\alpha+a,\ d-\alpha\,(d-c)\,] \tag{7}$$

A partir de (7) resulta sencillo hallar la función de membresía entre conjuntos difusos. Si $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son dos conjuntos de forma trapezoidal, las operaciones suma, multiplicación, división, logaritmo, raíz y función exponencial estarán definidos simplemente siguiendo operaciones elementales entre conjuntos difusos, tal y como se resume con la expresiones 5. 1 a 5.7.

5.3 Esperanza, Varianza y Covarianza de Posibilidad

Al hacer uso de una distribución de probabilidad para estimar los rendimientos, por ejemplo de un activo, es muy frecuente calcular ciertos indicadores como la media, varianza y desviación estándar; estos ayudan a entender el comportamiento que han tenido los precios del activo en un mercado financiero o el problema que se analiza. En una distribución de posibilidad sucede algo similar, por lo tanto el desarrollo de expresiones para la esperanza matemática, varianza y covarianza entre distribuciones de posibilidad requiere el uso de algunos conceptos enunciados en Carlsson y Fullér (2000), Fullér y Majlender (2003).

Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ es una función de ponderación no negativa, monótona creciente y que satisface la siguiente condición:

$$\int_0^1 f(\alpha)d\alpha = 1 \tag{8}$$

Se tiene que α puede adoptar valores dentro del intervalo *[0, 1]* y que la distribución de posibilidad dado un evento esta necesariamente en $0 \le x_i \le 1$.

Definición 7. *(Valor medio)* El valor esperado de un número borroso $\tilde{A}$ con $A^{\alpha}=[a_1(\alpha), a_2(\alpha)], \alpha \in [0,1]$ dada $f(\alpha)=2\alpha$ es:

$$E_f(\tilde{A}) = \int_0^1 M(U_\alpha) f(\alpha) d\alpha = \int_0^1 \frac{a_1(\alpha)+a_2(\alpha)}{2} f(\alpha) d\alpha$$
$$= \int_0^1 \left(a_1(\alpha)+a_2(\alpha)\right) \alpha \, d\alpha$$
$$= \int_0^1 \left[\left(a_1+a_4\right)+\left(\left(a_2-a_1\right)-\left(a_4-a_3\right)\right)\alpha^{1/n}\right] \alpha \, d\alpha$$

$$= \left[\frac{(a_1+a_4)}{2}\right]\left[\frac{(a_2-a_1-a_4+a_3)n}{2n+1}\right] \qquad (9)$$

La expresión anterior se conoce como función de ponderación del valor medio esperado de posibilidad, donde *f(α)* puede tomar diferentes valores, incluso cero, para diferentes niveles de las alfas cortadas, *α-cuts*.

Definición 8. *(Varianza)* La varianza ponderada de posibilidad de Ã está definida por:

$$Var(\tilde{A}) = \int_0^1 \alpha \left[\left(\frac{a_1(\alpha)+a_2(\alpha)}{2} - a_1(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{a_1(\alpha)+a_2(\alpha)}{2} - a_2(\alpha)\right)^2\right] d\alpha \, ;$$

$$Var\left(\tilde{A}\right) = \int_0^1 \frac{(a_2(\alpha)-a_1(\alpha))^2}{2} \alpha \, d\alpha$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(a_4-a_1\right)-\left(a_4-a_3+a_2-a_1\right)\alpha^{1/n}\right]^2 \alpha \, d\alpha$$

$$= \left[\frac{(a_1+a_4)^2}{4}\right] - \left[\frac{(a_4-a_1)(a_4-a_3+a_2-a_1)n}{2n+1}\right] + \left[\frac{(a_4-a_3+a_2-a_1)n}{2(2n+2)}\right] \qquad (10)$$

Definición 9. *(Covarianza entre dos conjuntos difusos)* La covarianza de posibilidad entre dos conjuntos Ã y $\tilde{B}$ está dada por:

$$Cov\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(a_2(\alpha)-a_1(\alpha)\right)\left(b_2(\alpha)-b_1(\alpha)\right)\right] \alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(a_4 - a_1\right) - \left(\left(a_4 - a_3\right) + \left(a_2 - a_1\right)\right)\alpha^{1/n}\right]\left[\left(b_4 - b_1\right) - \left(\left(b_4 - b_3\right) + \left(b_2 - b_1\right)\right)\alpha^{1/n}\right]\alpha \, d\alpha$$

$$= \left[\frac{a_4(b_4 - b_1) - a_1(b_4 - b_1)}{4}\right] - \left[\frac{(a_4 - a_1)(b_4 - b_3 + b_2 - b_1) + (b_4 - b_1)(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)\, n}{2(2n+1)}\right] + \left[\frac{(a_4 - a_3 + a_2 - a_1)(b_4 - b_3 + b_2 - b_1)\, n}{2(2n+2)}\right] \quad (11)$$

La expresión (11) indica la relación que existe entre dos conjuntos difusos cualesquiera con distribución trapezoidal. Se observa que la covarianza *Cov(Ã, Ã)* entre el mismo conjunto nos lleva a la expresión (10), es decir la *Var(Ã) = Cov(Ã, Ã)*.

6. Modelo difuso para la valuación de una opción real

El modelo Black & Scholes (1973) tiene dos importantes limitantes: supone que la tasa de descuento, así como la volatilidad del subyacente permanecen constantes. Además si se toma en cuenta que la expresión es exclusiva para la valuación de opciones financieras, el uso y aplicación para la valuación de proyectos reales merece ser re-expresada tomando en cuenta aquellas limitantes y su manejo desde otra perspectiva, i.e. para la economía real. Además, con los principios y fundamentos de matemática difusa, se puede manipular las variables de incertidumbre que se señalan en la Tabla 1, a excepción de la variable *T*, como variables difusas y modelar por medio de conjuntos difusos la expresión Black-Scholes para la valuación de una opción real (Cheng-Few, Gwo-Hshiung y Shin-Yung, 2005). Ya que las variables de la Tabla 1 no pueden tratarse como valores únicos cuando se valúa una opción, se recurre a conjuntos difusos los cuales contemplan rangos amplios de posibilidades para el valor que puede tomar una variable.

Sea la tasa de interés *(r)*, volatilidad *(α)*, precio del activo subyacente *(S_0)* y costo de la inversión *(X)* conjuntos difusos de la forma $\tilde{S}_0 = (s_1, s_2, s_3, s_4)_n$, $\tilde{X} = (x_1, x_2, x_3\, x_4)_n$, $\tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4)_n$, $\tilde{\sigma} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_n$, respectivamente. Al incluir la difusividad en las variables de la expresión Black & Scholes se obtiene una expresión general para la valuación de una opción real difusa (*VORD*) que contempla parte de la incertidumbre en la información, es decir:

$$VORD = \tilde{S}_0 e^{-\delta T} N(d_1) - \tilde{X} e^{-\tilde{r} T} N(d_2) \tag{12}$$

Donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(\tilde{S}_0)}{K}\right) + \left(E(\tilde{r}) - \delta + \frac{E(\tilde{\sigma})^2}{2}\right)T}{E(\tilde{\sigma})\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - E(\tilde{\sigma})\sqrt{T}$$

De las expresiones anteriores se tiene que $E(\tilde{S}_0)$, $E(\tilde{X})$, $E(\tilde{\sigma})$ y $E(\tilde{r})$ son valores esperados de *posibilidad* del subyacente, precio de ejercicio, volatilidad y tasa de interés, respectivamente. Por lo tanto al sustituir los conjuntos difusos $\tilde{S}_0$, $\tilde{X}$, $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{r}$ en (12), y después de algunas operaciones entre conjuntos difusos se tiene que:

$$VORD = \left(S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_2 e^{-r_2 T} N(d_2), S_2 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2), S_3 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2), S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_3 e^{-r_3 T} N(d_2)\right) \tag{13}$$

Aplicando el método de cálculo α-*cut* y realizando el desarrollo correspondiente, se llega a la forma general de (12), es decir la expresión que valúa una opción real difusa es:

$$VORD^{\alpha} = \left[VORD_1(\alpha), VORD_2(\alpha)\right]$$

$$VORD^{\alpha} = \left\{S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2) + \left[\left(S_2 - S_1\right) e^{-\delta T} N(d_1) + \left(X_1 e^{-r_1 T} - X_2 e^{-r_2 T}\right) N(d_2)\right]\alpha^{1/n},\right.$$
$$\left. S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2) - \left[\left(S_4 - S_3\right) e^{-\delta T} N(d_1) + \left(X_3 e^{-r_3 T} - X_4 e^{-r_4 T}\right) N(d_2)\right]\alpha^{1/n}\right\} \tag{14}$$

La expresión (14) es una extensión al modelo de Fullér y Majlender (2003) y Thiagarajah *et al.*, (2007), como resultado de utilizar una *función cuadrática adaptativa* y conjuntos difusos trapezoidales; ésta expresión es flexible en el sentido de que se puede adaptar a otras funciones de membresía como triangular, trapezoidal, cuadrada, etc., dependiendo de los valores que *n* y $\alpha \in [0,1]$ lleguen a tomar.

Con la expresión (14) es posible tener mayor certeza de que el valor mínimo del proyecto estará dado por $\left(S_1 e^{-\delta T} N(d_1) - X_2 e^{-r_2 T} N(d_2)\right)$ y el máximo por un valor de $\left(S_4 e^{-\delta T} N(d_1) + X_3 e^{-r_3 T} N(d_2)\right)$, teniendo amplias posibilidades de estar dentro del conjunto $\left[S_2 e^{-\delta T} N(d_1) - X_1 e^{-r_1 T} N(d_2),\ \ S_3 e^{-\delta T} N(d_1) + X_4 e^{-r_4 T} N(d_2)\right]$.

7. Valuación de un parque eólico mediante una opción real difusa

Tomando como punto de partida la metodología desarrollada anteriormente, el análisis del caso práctico se enfoca en la valuación de un parque eólico con capacidad de 111 MW. Los costos (fijos y variables), tarifas eléctricas, producción de energía, tasa de descuento son tomados de López-Martínez (2014), los cuales se referencian a los datos que publica la Agencia Internacional de Energía (*Internacional Energy Agency*), entre otros, respecto a proyectos de energía eólica que se desarrollan en países emergentes o cuyo crecimiento en este sector empieza a despegar, como es el caso de México. Con esta información se estima los flujos de efectivo para los 25 años de vida del proyecto; por simplicidad en la siguiente tabla únicamente se muestra los flujos para los primeros seis años.

Tabla 2. Flujos de efectivo estimados para el parque eólico.

FLUJOS DE EFECTIVO ESTIMADOS DEL PARQUE EÓLICO (millones de USD)							
	0	1	2	3	4	5	6
Ingresos		35.06	36.11	37.19	38.31	39.46	40.64
Costos Variables		8.17	8.41	8.67	8.93	9.19	9.47
Costos Fijos		0	0	0	0	0	0
Depreciación		21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53
EBIT		5.35	6.16	6.99	7.85	8.73	9.64
Tax (ISR)	30%	1.61	1.85	2.10	2.35	2.62	2.89
Depreciación		21.53	21.53	21.53	21.53	21.53	21.53
Inversión	(215.34)						
Flujos de Efectivo	(215.34)	25.28	25.85	26.43	27.03	27.64	28.28

VP0 = $215.464 **WACC =** 12%
VPN = $0.124

Fuente: Elaboración propia con base a información de López Martínez (2014).

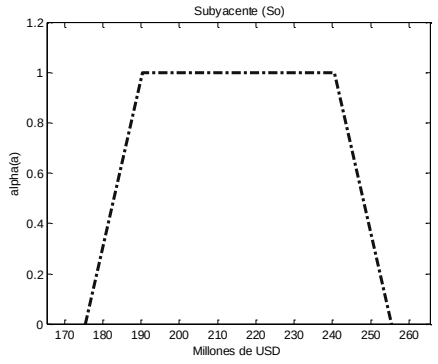
La Tabla anterior muestra que la valuación del proyecto por el método de valor presente neto, es de $0.124 millones de dólares, un valor muy cercano al punto de umbral de la inversión. Aun cuando el valor resulta ligeramente positivo, no se tiene suficiente certeza de que aceptar el proyecto sea una buena decisión. Con tal resultado una posible toma de decisiones podría ser el abandonar el proyecto, lo que no se confirma aplicando el método VORD de la sección anterior empezando con la estimación de los conjuntos difusos $\tilde{S}_0$, $\tilde{X}$, $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{r}$. La estimación de estos conjuntos dentro del sector de energías renovables requiere sino de un buen conocimiento del mercado, si de la experiencia de quienes administran y toman decisiones acerca del el proyecto, en otras palabras y como lo indica la teoría de posibilidad se debe examinar al menos que tan factible y plausible son dichas estimaciones para llevarse a cabo.

De la Tabla 2 se tiene que el valor presente esperado (S_0) de los flujos es 215.46, además existe la posibilidad (principio de plausibilidad) que el valor pueda variar ±25.05 millones, es decir, el centro del conjunto difuso [190.40, 240.50] contiene los valores más posibles del valor presente de los flujos y además el valor más alto que puede alcanzar estar dentro del intervalo [240.50, 255.50], con un valor mínimo dentro de [175.40, 190.40]. De manera similar, el costo esperado de la inversión (X_0) se valoró en 215.34, con la posibilidad de variar ±19.75 millones, es decir el conjunto difuso presenta un soporte de [195.5, 235], un valor máximo dentro de [235, 265] y un valor mínimo posible dentro de [165.5, 195.5]. La tasa de descuento esperada (r_0 = 12%) se obtiene de CONCAMIN (2010) y CRE (2012), además se espera que este valor pueda variar en el proyecto ±1%, obteniéndose un soporte de [0.11, 0.13], valor máximo [0.13, 0.145] y mínimo de [0.095, 0.11].

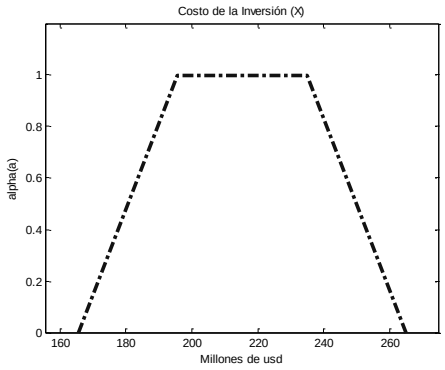
Para el cálculo de la volatilidad se siguió el procedimiento descrito por Copeland y Antikarov (2003), capítulos 9 a 11, y desarrollado en López Martínez (2014), lo cual representa un valor esperado de σ_0 = 35% y una variación de ±2 % por lo que el soporte es [0.33, 0.37], con un valor máximo posible de [0.37, 0.45] y un valor mínimo posible dentro del rango [0.31, 0.33]. Otra manera de proceder con la estimación de los límites de los conjuntos difusos es precisamente cuando dentro del proyecto se encuentra

personal altamente calificado, dotado de suficiente experiencia y conocimiento del mercado, cuya visión le puede permitir establecer de manera empírica los soportes y rangos del conjunto. Por lo que el valor medio esperado P_0 de la variable en cuestión puede obtenerse como $P_0 = \left((a_1 + a_4)/2\right) + \left((a_2 - a_1 - a_4 + a_3)/3\right)$, donde [$a_1$, a_2] es el intervalo difuso con valor mínimo posible de *P*, [a_2, a_3] es el soporte y [a_3, a_4] es el valor más alto de *P*. Finalmente y quizá uno de los métodos con mayor exactitud, consiste en modelar las parámetros del modelo como variables lingüísticas y enunciados de verdad, naturalmente el nivel de complejidad con este método es mayor sin embargo puede presentar un modelo más completo y robusto.

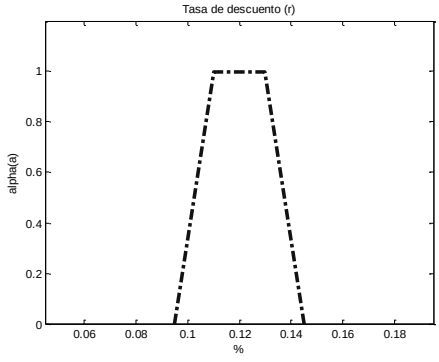
Figura 3. Distribuciones difusas de posibilidad para los parámetros de la inversión.



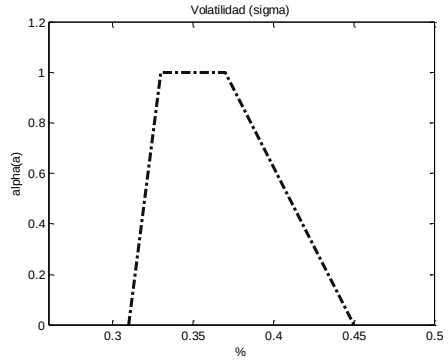
a) Activo subyacente



b) Costo de la inversión



c) Tasa de descuento



d) Volatilidad

Fuente: Elaboración propia

Resumiendo, la representación matemática correspondiente (figura 3) a los parámetros estimados queda de la siguiente manera:

Flujos de efectivo del proyecto $\tilde{S}_0 = [175.40, 190.40, 240.50, 255.50]$.

Tasa de descuento $\tilde{r} = [0.095, 0.11, 0.13, 0.145]$.

Volatilidad $\tilde{\sigma} = [0.31, 0.33, 0.37, 0.45]$.

Costo de la inversión $\tilde{\mathrm{X}} = [165.5, 195.5, 235, 265]$.

Al sustituir cada una de estas distribuciones en la expresión (14):

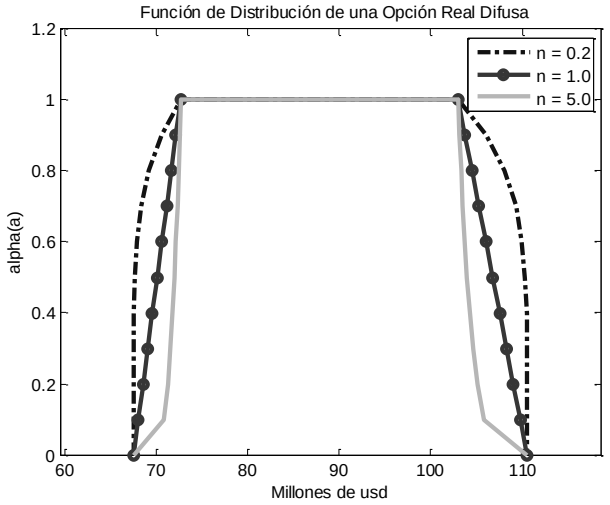
$$VORD^{\alpha} = \Big\{175.40e^{-(0.03)(5)}(0.8323) - (165.5)e^{-(0.095)(5)}(0.5647) + \Big[(190.40 - 175.40)e^{-(0.03)(5)}(0.8323) + \big((165.5)e^{-(0.095)(5)} - (195.5)e^{-(0.11)(5)}\big)(0.5647)\Big]\alpha^{1/n},$$
$$(255.50)e^{-(0.03)(5)}(0.8323) + (265)e^{-(0.145)(5)}(0.5747) - \Big[(255.50 - 240.50)e^{-(0.03)(5)}(0.8323) + \big((235)e^{-(0.13)(5)} - (265)e^{-(0.145)(5)}\big)(0.5647)\Big]\alpha^{1/n}\Big\}$$

Y simplificando se obtiene:

$$VORD^{\alpha} = \Big\{67.5347 + [5.1722]\alpha^{1/n}, \quad 110.5618 - [7.5468]\alpha^{1/n}\Big\} \tag{15}$$

La expresión anterior puede adaptarse y representar varias funciones de distribución ya que está sujeta a los diferentes valores que α y *n* lleguen a tomar, por lo tanto la expresión es flexible y adaptativa. Teniendo esta ventaja a favor, el valor del proyecto puede representarse por medio de distribuciones tipo triangular, trapezoidal, mixta e incluso distribuciones cuadradas de posibilidad. Para hacer evidente la flexibilidad de la expresión (15) se sustituye para diferentes valores de *n=0.2, 1 y 5;* y $\alpha \in [0,1]$ en la ecuación (15), resultando las distribuciones de posibilidad que se muestran en la figura 6.0.

Figura 4. Distribución de posibilidad para el valor de la opción real difusa.



Fuente: Elaboración propia

El valor esperado de la opción real difusa yace dentro de estas distribuciones de posibilidad, por lo tanto para calcularla se procede a utilizar la ecuación (9):

$$\mathrm{E}(VORD)=\left[\frac{(a_1+a_4)}{2}\right]+\left[\frac{(a_2-a_1-a_4+a_3)\,n}{2n+1}\right]=\left[\frac{(67.53+110.56)}{2}\right]+\left[\frac{(72.71-67.53-110.56+103.01)\,(1)}{2(1)+1}\right]$$

$$\mathrm{E}(VORD)=88.2564\ \ millones$$

El valor de la opción real bajo el enfoque de difusividad tiene un valor de 88.2564 millones de dólares. El rango de valores posibles de la opción real está comprendido dentro del conjunto de distribución, obtenido de la expresión (15), dado por $VORD=[67.53,\ 72.71,\ 103.01,\ 110.56]$. Es decir el soporte de la distribución de la opción está dentro del intervalo [72.71, 103.01] y es el rango más posible que puede tomar el valor de la opción; pudiendo tener un mínimo posible a la izquierda dentro de [67.53, 72.71] y un valor máximo posible a la derecha comprendido por [103.01, 110.56]. Es importante observar que a diferencia del *VPN*, el modelo *VORD* indica con mayor

certeza que el proyecto debe tomarse ya que es factible financieramente. El resultado confirma la relevancia del modelo VORD.

Valoración de la opción real utilizando modelos adyacentes

La relevancia del modelo VORD resalta comparando sus resultados con aquellos de modelos afines, así como con el modelo de Black & Scholes. La Tabla 3 resume los valores de la opción real utilizando el modelo original de Black & Scholes, los modelos Carlsson y Fullér (2000) y Thiagarajah et *al.* (2007) y el modelo avanzado en la presente investigación.

Tabla 3. Valoración de la Opción Real bajo diferentes modelos.

Modelo	**Valor de la opción (millones de usd)**
Black & Scholes	112.5856
Carlsson & Fuller 2000	87.7223
Thiagarajah et al. 2007	87.4128
VORD	88.2564

Cabe mencionar que las variables estimadas del proyecto han sido las mismas aplicadas a cada modelo. Se observa de la tabla anterior que los resultados de los últimos tres modelos no difieren mucho en el valor de la opción, caso contrario sucede para el modelo Black & Scholes el cual arroja una diferencia significativa, la razón es que el modelo está enfocado a la valuación de opciones financieras y por consiguiente la estimación de sus variables es diferente a la manera en cómo se hace para los últimos tres modelos. El valor obtenido de $ 88.2564 millones utilizando el modelo VORD resulta después de contemplar la incertidumbre en X, S, r y α, por lo cual su valor es más

razonable si tomamos en cuenta que en la realidad los proyectos no presentan certeza absoluta en cada uno de los parámetros modelados, por lo que su representación por medio de conjuntos difusos resulta idóneo como se presenta en el trabajo. Por lo tanto, la falta de certidumbre y también de mayor información en los proyectos se sobrepone con el uso de conjuntos difusos.

8. Conclusiones

La teoría de Opciones Reales constituye un importante desarrollo para la evaluación de proyectos de inversión y valuación de empresas. Su metodología sobrepone algunas deficiencias presentes en técnicas de valuación tradicionales que ignoran la incertidumbre intrínseca de los flujos de caja del proyecto y esto se debe en principio a que su procedimiento de cálculo es lineal y estático. Técnicas tradicionales como el Valor presente Neto, de amplia uso y aceptación, no toman en cuenta igualmente las opciones existentes en una inversión, esto es, el hecho de que el proyecto puede tomar diferentes conformaciones o temporalidades y que en el futuro surjan posibilidades de ampliar, contraer, posponer, enmendar, e incluso abandonar el proyecto Esta falta de flexibilidad, limita la toma de decisiones estratégicas por parte de los responsables del proyecto, los tomadores de decisiones pierden flexibilidad administrativa. Aún más, las técnicas de valuación tradicionales generalmente subvalúan o sobre estiman el valor del proyecto, porque el valor de la opción no se incluye en las estimaciones obtenidas. La metodología de opciones reales coadyuva a sobre poner estos problemas.

Sin embargo, aplicaciones puntuales de ésta técnica no son del todo idóneas en entornos borrosos En éste contexto la matemática difusa es una importante contribución para sobreponer las restricciones del enfoque probabilístico característico de la teoría original de opciones, incluyendo opciones reales. Así, aplicando los principios de la teoría de posibilidades a los espacios borrosos de las inversiones reales surgen nuevas formas de valuación. En el presente trabajo, partiendo de éste principio, y metodologías afines anteriormente desarrolladas, se avanza un modelo de valuación de opciones difusas: VORD bajo el marco del modelo de Black y Scholes. El modelo hace uso de distribuciones difusas adaptativas. La relevancia del Modelo VORD se comprueba con su aplicación a la valuación en un parque eólico en México. Aplicando la técnica del

VPN el resultado es positivo pero en el umbral de cero: $0.124 millones; la decisión de aceptarlo es dudosa. Al contrario, empleando el modelo VORD, el proyecto fue ampliamente positivo; el valor de la opción fue de $88.2564 millones, lo que indica que el proyecto debe tomarse y aprovechar las oportunidades que esta genera para los inversionistas y consumidores. La relevancia del modelo VORD también se confirma comparando su estimación con los resultados de tres modelos afines; los resultados son muy cercanos entre si, en tanto que, cabe destacar que una simple evaluación con el modelo Black & Scholes es excesivamente sobrevaluada.

Una agenda de investigaciones futuras debe contemplar: i) modelar los parámetros de incertidumbre en el modelo Black & Scholes como variables lingüísticas y enunciados de verdad, esto permitiría establecer con mayor precisión los rangos de apertura de un conjunto difuso, ii) la inclusión de la matemática difusa al modelo de Merton y otros modelos de opciones reales más sofisticados, ya que le modelo de Black & Scholes no tiene el alcance para tomar en cuenta, por ejemplo, eventos extremos como las crisis financieras experimentadas en los mercados y en general en la economía global. Considerar estos eventos y alimentar al modelo VORD con la estimación de dichos avances permitiría contemplar de mejor manera la incertidumbre en proyectos dinámicos y para la valuación de opciones reales difusas.

Bibliografía

Amram, M. and N. Kulatilaka (2001). *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Harvard Business School Press.

Bacchini, R.D., García-Fronti, J., & Marquez, E. (2007). Project Valuation Using Fuzzy Real Options. University of Buenos Aires. Disponible en linea: http://mpra.ub.uni-muenchen.de/6443

Bednyagin, D., & E. Gnansounou .(2011). Real options valuation of fusion energy R&D programme. *Energy Policy*, Vol. 39, Issue 1, pp. 116-130.

Black, F. & M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, vol. 81, num. 3, pp. 637-654, 1973.

Boer, F. P. (2002). *The real options solutions: Finding Total Value in a high-risk world. John* Wiley & Sons.

Brennan, M.J., & E. Schwartz (1985). Evaluating Natural Resource Investments. *Journal of Business*, Vol. 58, Num. 2, pp. 135-157.

Buckley, J. J. (1987). The Fuzzy Mathematics of Finance. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 21, Issue 3, pp. 257.273.

Buckley, J. J., E. Eslami., & T. Feuric (2002). *Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Physica-Verlag*.

Calderaro, V., V. Galdi, A. Piccolo & P. Siano (2008). A Fuzzy Controller for Maximum Extraction from Variable Speed wind Power Generation Systems. Electric Power Systems Research, vol. 78, issues 6, pp. 1109-1118.

Carlsson, C. 6 R. Fuller (1999). Capital budgeting problems with fuzzy cash flows. *Mathwae and Soft Computing*, 6, pp. 81-89.

Carlsson, C. 6 R. Fullér (2000). Real Option evaluation in fuzzy environment. *International Symposium of Hungarian Researchers on Computational Intelligence*, Budapest, pp. 69-77.

Carlsson C. & R. Fullér (2000). On fuzzy real option valuation. Turku Centre for Computer Science, TUCS Technical Report No 367.

Cheng-Few, L., T. Gwo-Hshiung & W. Shin-Yung (2005). A new application of fuzzy set theory to the Black-Scholes option pricing model, *Expert Systems with Applications* 29, pp. 330-342.

Childs, P. D., S. H. Ott, & A.J. Triantis (1998). Capital budgeting for interrelated projects: A real options approcach. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 33, num. 3, pp. 305-334.

CONCAMIN (2010). Proyectos de generación de energía eléctrica en la modalidad de autoabastecimiento. Confederación de Cámaras Industriales de los Estados Unidos Mexicanos, CONCAMIN, 2010.

Copeland, T., & V. Antikarov (2003). *Real Options: A practioner's Guide.*. Texere..

CRE (2012). Comisión Reguladora de Energía, Documento de consulta DC/02/DGT/2012, México D.F. 2012.

Dubois, D. (2006). Possibility theory and statistical reasoning. *Computational Statistics & Data Analysis* 51, pp. 47-69.

Dubois D., L. Folloy, M. Gilles, & H. Prade (2004). Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets and probabilistic inequalities. *Reliable Computing*, vol. 10, issue 4, pp. 273-297.

Dutta P., H. Boruah & T. Ali (2011). Fuzzy Arithmetic with and without using α-cut method: A comparative study. *International Journal of Latest Trends in Computing*, Vol. 2, Issue 1, pp. 99-107.

Enevoldsen, A. R. (2011). Real Options valuations of a biotech project using fuzzy numbers. *Master Thesis*. Copenhagen Business School.

Fernandes, B., J. Cunha, & P. Ferreiro (2011). The use of Real Options approach in energy sector investments. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 15, pp. 4491-4497.

Fernández Jiménez, L.A. (2007). Modelos avanzados para la predicción a corto plazo de la producción eléctrica en parques eólicos. *Tesis Doctoral*. Universidad de la Rioja.

Fullér R. & P. Majlender (2003). On weighted possibilistic mean and variance of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets & Fuzzy Systems* 136, pp. 363-374.

Giddy, I. H. (2000). Option.Based Corporate Valuation. *Working Paper*. Stern School of Business, New York University.

Hommel U. & H. Lehmann (2001). Die bewertung von investitionsprojeckten mit dem realoptionesansatz: Ein methodenüberblick. Realoptionen in der Unternehmenspraxis pp. 113-129,.

Hoyos, D., R. Farfán, F. Tilca, y C. Cadena.(2006). Propuesta de controlador con lógica diusa para el sistema eólico. *Avances en Energías Renovables y Medio Ambiente*, vol. 10, pp. 5-61.

Jaber, J. O., R. Mumllok, & W. Awad (2005). Evaluation of energy conservation programs in residential sector using fuzzy logic methodology. *Energy Policy*, vol. 33, issue 10, pp. 1329-1338.

Klir, G. J., & B. Yuan. (1995). Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Addison Wesley.

Kraemer, C., & R. Madlener, (2009). Using fuzzy real options valuation for assessing investments in NGCC and CCS conversion technology. *Working Paper*. Institute for Future Energy Consumer Needs and Behavior, Germany.

Kulatilaka, N. & E. C. Perotti (1998). Strategic growth options, *Management Science Review*, Vol. 44, No 8, pp. 1021-1031.

Kulatilaka, N. (1986). *The Value of Flexibility*, Boston University.

Liang, Z., K. Yang, Y. Sun, J. Yuan, H. Zhang, & Z. Zhang, (2006). Decision support for choice optimal power generation projects: Fuzzy comprehensive evaluation model based on the electricity market. *Energy Policy*, vol.34, issue 17, pp. 3359-3364.

Lin, L., L. Cao, J. Wang, & C. Zhang (2007). The applications of genetic algorithms in stock market data minig optimisation, *Working Paper*. Faculty of Information Technology, University of Technology, Sydney.

Lliades, L. S. (2005). A decision support system applying and integrated fuzzy mode for long-term forest fire risk estimation. Environmental Modelling and Software, vol. 20, issue 5, pp. 613-621.

López-Martínez C. (2014). Valuación de opciones reales para una planta de generación eléctrica mediante matemática difusa. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México.

Madlener, R., B Glenks, & V. Weber (2014). Fuzzy portfolio optimization of onshore wind plants. *FNC Working Pape, num.* 10/2011.

Martínez González, D., & L.H. Quintero Hernádez, (2012). Selección de alternativas energéticas para el desarrollo sostenible en comunidades rurales. Caso de estudio: Tepisuac, México. *Memorias*, XVI Congreso Internacional de Ingeniería de Proyectos. Valencia, España, 11-13 de julio de 2012.

Milanesi, J. S., & D. Broz. (2013). Aplicación de la lógica borrosa para la toma de decisiones en el sector forestal. El métododo fuzzy pay-off (FPOM) l. *Memorias*. .XXXIII Jornadas nacionales de Administración Financiera.

Mohamed, A. Z., M.N. Eskhander, & F.A. Ghali (2001). Fuzzy logic control based maximum power tracking of a wind energy system. *Renewable Energy*, vol. 23, issue 2, pp. 235-245.

Mun, J. (2002). *Real Options Analysis: Tools and Techniques for Valuing Strategic Investment and Decisions.* John Wiley & Sons.

Mutllu, Ö. S., E. Akpinar, & A. Bañikci (2006). Power quality analysis of wind farm connected to Alaçati substation in Turkey. Renewable Energy, vol. 34, issue 5, pp. 1312-1318.

Myers Stewart C. (1977). Determinants of Corporate Borrowing, *Journal of Financial Economics*, vol. 5, issue 2, pp. 147-175.

Nikookar, G., S. A. Azarmsa, F. Pooramazan, & A. Shahvazian (2012). A fuzzy real option valuation approach to capital budgeting under uncertainty, *European Journal of Economics, Finance and Administrative Sciences*, issue 45, pp. 86-96.

Prade, H., D. Dubois & S. Sanddri (1993). On possibility/probability transformations. En R. Lowen y M. Rubens, eds. *Fuzzy Logic. Thory and Decision Library*, pp. 103-112.

Proyecto TECH4CDM (2010). La energía eólica en México. Proyecto Tech4CDM: http://awsassets.panda.org/downloads/documentos_la_energia_eolica_en_mexico_fefd89d8.pdf. Accesado 12 de julio de 2015.

Pushkar, S. & A. Mishra (2011). It Project delection model using real option optimization with fuzzy set approach. *Digital EAnterprise and Informationn Systemes. Communications in Computer and Information Science*, vol. 194, pp. 116-128.

Reina, D., (2008). Fundamentos de Matemática Difusa *Documento de Investigación.* Fundacion Universitaria Konrad Lorenz, Colombia.

Bacchini, R.D., García-Fronti, J., & Marquez, E. (2007). Project Valuation Using Fuzzy Real Options. University of Buenos Aires. Disponible en linea: http://mpra.ub.uni-muenchen.de/6443

Secretaría de Gobernación (2012). La energía eólica en México. *Comisión para el diálogo con los Pueblos Indígenas. Una Perspectiva Social sobre el Valor de la Tierra.*

Thiagarajah K., S. S. Appadoo, & A. Thavaneswara. (2007). Option valuation model with adaptive fuzzy numbers. *International Journal of Computers & Mathematics with applications* 53, pp. 831-841.

Trigeorgis (1996). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation.* Cambridge, Mass.: MIT Press.

Triantis, A. & A. Borison (2001). Real options: State of the practice, *Journal of Applied Corporate Finance* 14, pp. 8-24.

Venegas Martínez, F., y A. Fundia Ainzestat (2006). Opciones reales, valuación financiera de proyectos y estrategias de negocios: Aplicaciones al caso mexicano. *Trimestre Económico*, vol. 73, num. 790, pp. 363-405.

Wang, J., & W.-L. Hwang (2007). A fuzzy set approach for R&D portfolio selection using a real options valuation model. *Omega,* vol. 35., num. 3, pp. 247-257.

Zadeh L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control* 8, pp. 338-353.

Zadeh L. A. (1978). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*. Part I: 8, 199-249; Part II: 8, 301-357; Part III: 9, 43-80.

Zimmermann H. J. (2010). Fuzzy Set Theory, *Advanced Review Volume 2*, John Wiley & Sons, pp. 316-332.