DE BACHELIER A MERTON: 100 AÑOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO EN ECONOMÍA Y FINANZAS

Francisco Venegas Martínez[*]

RESUMEN

En este trabajo se revisan y discuten las contribuciones de Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton a la economía y las finanzas en tiempo continuo. En sus aportaciones, el movimiento Browniano no sólo permite el modelado adecuado de las fluctuaciones propias de diversas variables económicas y financieras, sino también representa una herramienta básica para incorporar elementos de riesgo e incertidumbre en la dinámica de dichas variables. Asimismo, se discuten las relaciones existentes entre dichas aportaciones con las investigaciones de otros prominentes científicos, tales como: Robert Brown, Albert Einstein, Andrey Markov, Andrei Kolmogorov, Paul Lévy, Norbert Wiener y Kiyosi Itô, entre otros. Por último, se lleva a cabo una investigación sobre la evolución de las ideas y formulaciones de los modelos desarrollados por Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton y, simultáneamente, se realiza un análisis comparativo entre dichos modelos.

Clasificación JEL: G1, G12

Palabras clave: Economía financiera, valuación de productos derivados

[*] Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Ciudad de México. Departamento de Finanzas

ABSTRACT

This paper is aimed to review and discuss the contributions from Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes, and Robert Merton to continuous-time economics and finance. In their research, the Brownian motion not only provides a suitable modeling of the proper movements of many economic and financial variables, but also it is a very helpful tool to incorporate elements of risk and uncertainty in the dynamic of such variables. Also, the existing relationships between these contributions and the research from other prominent scientists, such as, Robert Brown, Albert Einstein, Andrey Markov, Andrei Kolmogorov, Paul Lévy, Norbert Wiener and Kiyosi Itô, are discussed. Finally, the paper investigates the evolution of the ideas and formulations of the developed models by Bachelier, Samuelson, Black, Scholes, and Merton, and, simultaneously, carries out a comparative analysis among such models.

JEL Classification: G1, G12

Keywords: Financial economics, contingent claims pricing

1. INTRODUCCIÓN

Es por todos conocido que en 1969, el Banco Central de Suecia crea el premio Nobel en economía y un año después, en 1970, Paul Anthony Samuelson[1] obtiene dicho premio. Asimismo, en 1997, Robert Merton[2] y Myron Scholes[3] comparten el premio Nobel. Tristemente, el reconocido matemático y economista Fischer Black,[4] con quien Myron Scholes participó en la investigación laureada, había fallecido dos años antes, a saber, el 30 de agosto de 1995. Es

---

[1] Paul Anthony Samuelson obtuvo su doctorado en economía por la Universidad de Harvard.

[2] Robert Merton obtuvo la maestría en matemáticas aplicadas en el California Institute of Technology y el doctorado en economía por el MIT.

[3] Myron Scholes obtuvo un MBA y un doctorado en la Universidad de Chicago.

[4] Fischer Black obtuvo su doctorado en Matemáticas Aplicadas por la Universidad de Harvard en 1964.

importante destacar que Robert Merton fue asistente de Paul Samuelson en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) durante dos años (de 1968 a 1970) y, también en ese entonces, Myron Scholes era profesor asistente en el MIT. De esta manera, Samuelson, Scholes y Merton coinciden en lugar y tiempo. Por otro lado, muchos años antes, Louis Bachelier muere en 1946 y, evidentemente, el premio Nobel en economía todavía no existía. Sin embargo, no hay duda de que la capacidad y las contribuciones de Louis Bachelier excedían los requerimientos para dicho reconocimiento.

La organización del presente trabajo es como sigue. En las próximas 3 secciones se proporciona una revisión del contexto histórico, social y económico en el que Louis Bachelier realiza su trabajo de investigación. En el transcurso de la sección 5, se presenta una reseña histórica sobre el fenómeno del movimiento Browniano y su evolución conceptual. En la sección 6 se discute la contribución de Albert Einstein en la explicación del movimiento Browniano. En la sección 7 se establece la relación incidental entre el trabajo de Samuelson y el de Bachelier. A través de la sección 8, se discute cómo se conectan entre sí los trabajos de Black, Scholes y Merton, así como las circunstancias en que esto sucede. En la sección 9 se presenta un modelo probabilista desarrollado por Bachelier para estudiar la dinámica estocástica del precio de un activo y determinar el valor de una opción de compra sobre dicho activo. En la sección 10 se presentan las ideas principales del trabajo de Einstein sobre el movimiento Browniano y se comparan sus resultados con los de Bachelier. En la sección 11 se introduce el trabajo de Samuelson sobre valuación de opciones, en el cual el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, situación que impide que el precio del activo subyacente tome valores negativos, como en el caso de modelo de Bachelier. En la sección 12 se presenta el trabajo de Black y Scholes, en el cual, bajo condiciones de equilibrio, desarrollan un modelo para valuar una opción de compra y cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico Browniano. En su investigación, dos parámetros desconocidos considerados en el trabajo de Samuelson, ya no aparecen en el precio de la opción. En esta misma sección se proporciona una derivación alternativa de Black y Scholes, que emplea el

CAPM, para obtener su fórmula de valuación. A través de la sección 13 se presenta el trabajo de Merton, el cual extiende en varias direcciones el modelo de Black y Scholes, entre las que destacan: tasas de interés estocásticas, pago continuo de dividendos, un análisis de opciones americanas, generalización de la fórmula de Samuelson para opciones perpetuas y la valuación de opciones con barreras. Por último, en la sección 14 se presenta un conjunto de conclusiones.

2. LOUIS BACHELIER

Louis Bachelier (1870-1946), de nacionalidad francesa, por sus excepcionales contribuciones a la teoría financiera ha sido llamado el "Padre de las matemáticas financieras modernas" Su tesis doctoral "Théorie de la Spéculation", presentada en 1900 en la Sorbonne de París distingue a las finanzas como una ciencia sujeta al rigor matemático. Louis Bachelier se adelantó a su tiempo con la introducción de conceptos como: movimiento Browniano, proceso Markoviano, esperanza condicional y martingala. Lo sorprendente es que todos estos conceptos fueron redescubiertos y popularizados por prominentes matemáticos, varios años después. Por ejemplo, los procesos Markovianos[5] aparecen en 1906, la noción formal de esperanza condicional es introducida por Kolmogorov[6] en 1933, y el concepto de martingala es elaborado por Lévy[7] hasta 1937.

Es importante resaltar que entre las contribuciones de la tesis de Bachelier a las matemáticas financieras, también destacan: el modelado de la dinámica de los precios de acciones de la bolsa de París a través del

---

[5] Andrey Andreyevich Markov (1856-1922), ilustre matemático ruso, en su ensayo "Extension of the Law of Large Numbers to Dependent Events", publicado en 1906, formaliza el concepto de lo que hoy se conoce como proceso Markoviano.

[6] Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), prominente matemático ruso, en su monografía "Foundations of Probability" introduce y formaliza el concepto de esperanza condicional.

[7] Paul Lévy (1886-1971), distinguido matemático francés, en su obra "Théorie de l'addition des variables aléatoires", publicada en 1937, presenta formalmente el concepto de martingala.

movimiento Browniano, la primera representación gráfica del precio de un contrato de opción, la formulación de mercados eficientes, la primera fórmula de valuación de un contrato de opción y la primera definición cuantitativa de riesgo de mercado.

Sin duda, Louis Bachelier se adelantó a su tiempo. Cuando varias ramas de la física eran sometidas al rigor matemático y la matemática pura alcanzaba el culmen de una época, era imposible pensar en una "teoría matemática" que estudiara el comportamiento de los precios de activos financieros, y mucho menos pensar en "modelos matemáticos" que describieran los movimientos de dichos precios. Sin embargo, Louis Bachelier convencido de la importancia del estudio de los mercados financieros, a través de modelos matemáticos, prosiguió con su apasionante aventura obteniendo resultados que, en la actualidad, siguen sorprendiendo. Tristemente, Bachelier y su trabajo permanecieron en el anonimato durante muchos años. Poco se sabe, hasta la fecha, de este enigmático y misterioso personaje. Louis Bachelier murió sin reconocimiento alguno de la élite científica francesa de aquellos tiempos. No fue sino hasta la década de los sesenta cuando a través, principalmente, del trabajo de Paul Samuelson se dieron a conocer las aportaciones de Bachelier, lamentablemente, mucho tiempo después de su muerte.

Por último, es justo mencionar que Bachelier tomó algunas ideas de trabajos anteriores para su investigación. Por ejemplo, el trabajo del economista y financiero francés Jean Joseph Nicolás Regnault, quien utilizaba el pseudónimo de Jules Regnault, "Calcul des chances et philosophie de la Bourse" publicado en 1863, ya mencionaba que la desviación promedio de los precios de las acciones era proporcional a la raíz cuadrada del tiempo en que fueron tomadas las observaciones, propiedad central del movimiento Browniano.

3. UN POCO MÁS SOBRE LA VIDA DE LOUIS BACHELIER

Una frase que vendría bien para comenzar esta sección es que "las estrellas, a pesar de todo, siempre brillan". En 1889, cuando Louis tenía 19 años, justo después de terminar su preparatoria, sus padres mueren, razón por la cual tuvo que abandonar sus estudios y hacerse cargo de sus dos hermanos y del negocio familiar (comercio). Bajo estas circunstancias, Louis no pudo continuar sus estudios. Sin embargo, al hacerse cargo del negocio familiar, tuvo la oportunidad de conocer el mundo de los mercados financieros, experiencia que marcaría su interés por el comportamiento de los precios de diferentes activos, incluyendo algunos productos derivados. Otro evento que retrasaría la carrera académica de Louis ocurre en 1891 cuando se enlista en el ejército para llevar a cabo su servicio militar. No fue sino hasta 1892, a la edad de 22 años, que Louis pudo continuar con su educación universitaria en la Sorbonne gracias a una recomendación de Emile Borel para conseguir una beca. Al principio, como era de esperarse, Louis no se distinguió por ser un estudiante brillante (sus calificaciones eran inferiores a las de sus compañeros: Langevin y Liénard). A pesar de casi cuatro años de interrupción, Louis Bachelier pudo avanzar rápidamente y en 1895 obtuvo la licenciatura en matemáticas y en 1897 la maestría en física matemática. El 29 de marzo de 1900, ya como candidato a doctor en matemáticas en la Sorbonne, presentó su tesis "Théorie de la Spéculation" a la Facultad de Ciencias de la Academia de París. Sus sinodales fueron, nada menos que Henri Poincaré, Paul Appel y Joseph Boussinesq. Sin embargo, en ese tiempo las finanzas no eran vistas como una ciencia (matemática) y los comentarios de Hadamard, Borel, Lebesgue, Lévy y Baire no se hicieron esperar para menospreciar su trabajo, cuando todo giraba en torno de la física matemática y la matemática pura.

4. LAS DÉCADAS PERDIDAS DE LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS Y LA PROBABILIDAD

Todavía en la década de los setenta y principios de los ochenta del siglo XX, lo que hoy se conoce como matemáticas financieras no era una disciplina de interés para la mayoría de los departamentos de matemáticas en el mundo. Mucho menos lo era, por ejemplo, la teoría de productos derivados, la cual era vista como un área carente de rigor y muy lejos de los temas relevantes de entonces: topología algebraica, geometría diferencial, análisis funcional, variable compleja, álgebra moderna, etc. La situación actual es muy distinta, casi todos los departamentos de matemáticas en el mundo tienen un área de matemáticas financieras e incluso un programa de postgrado en matemáticas financieras.

La teoría de la probabilidad atravesó por una situación similar a las matemáticas financieras. Al respecto, Kiyosi Itô (1915-), uno de los matemáticos más destacados del siglo xx y progenitor del cálculo estocástico, relata cómo nació su interés por la probabilidad:[8]

> "Desde que inicié mis estudios en matemáticas (a principios de la década de los treinta) me atraía mucho la idea de descubrir las leyes estadísticas que residían en los fenómenos aleatorios. Yo sabía que la teoría de la probabilidad era el medio para describir dichos fenómenos y, por lo tanto, me aboqué a ella. En aquella época, pocos matemáticos veían a la probabilidad como una disciplina con rigor matemático. Cuando era estudiante, había pocos investigadores en probabilidad, entre ellos Andrei Kolmogorov de Rusia y Paul Lévy de Francia".

5. DE ROBERT BROWN A LOUIS BACHELIER. BREVE RESEÑA HISTÓRICA DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

En 1827, el botánico escocés Robert Brown (1773-1858), mientras examinaba partículas de polen en el microscopio, observó que cuando estas se encontraban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma errática. En un principio, Brown pensó que las partículas tenían movimiento propio e incluso vida. Debido a lo atractivo del tema, las investigaciones en el área se multiplicaron y pronto, lamentablemente para Brown, apareció evidencia en contra de su teoría. El fenómeno se asoció no sólo con partículas de polen, sino también con partículas de materia inorgánica como polvo fino de algunos minerales. En 1829, dos años

[8] Itô, K. (1998). *My Sixty Years in Studies of Probability Theory. Speech of the Kyoto Prize in Basic Sciences.*

después de su descubrimiento, Robert Brown se retracta de su teoría sobre partículas vivas con movimiento propio expresando que: "...desconozco lo que causa que partículas muy pequeñas de materia sólida, orgánica o inorgánica, suspendidas en agua, o en otros líquidos, exhiban movimientos irregulares". Las investigaciones entonces se dirigieron a causas muy diversas: la atracción y repulsión entre partículas suspendidas, la inestabilidad del equilibrio del líquido en el que las partículas se encontraban suspendidas, la acción capilar de las partículas e, incluso, la presencia de burbujas minúsculas en el líquido o en las partículas. Sin embargo, muchas de estas posibilidades fueron rechazadas casi de inmediato y muchas otras aparecieron sin buenos resultados.

6. DE ROBERT BROWN A ALBERT EINSTEIN

Durante casi dos siglos no se produjo una explicación satisfactoria de lo que causaba el movimiento Browniano. No fue sino hasta principios del siglo XX cuando se demostró que el movimiento irregular de las partículas de polen se debía al golpeteo aleatorio de las moléculas invisibles de agua sobre las partículas de polen.

En 1905, el físico judío-alemán Albert Einstein (1879-1955), escribe tres artículos seminales en física sobre el efecto fotoeléctrico, la relatividad especial y la mecánica estadística. Por el primero, la Academia Sueca le otorgó el premio Nobel en 1921, por el segundo obtuvo el reconocimiento de unificar la mecánica clásica con la electrodinámica y por el tercero la satisfacción de haber resuelto un problema que llevaba casi dos siglos sin respuesta: el movimiento Browniano. Einstein proporcionó la explicación y formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de una partícula suspendida en un líquido es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. Bachelier se anticipó a Einstein con una formulación matemática del movimiento Browniano, tan elegante como la de Einstein, abordando un problema completamente diferente al del movimiento errático de partículas de polen suspendidas en agua.

7. PAUL SAMUELSON Y LOUIS BACHELIER (EL REENCUENTRO DE LAS ESTRELLAS)

Una de las limitaciones más importantes del trabajo de Bachelier es que los precios de los activos pueden tomar valores negativos. Este inconveniente es enmendado por Paul (Anthony) Samuelson hasta 1965. De hecho, Paul Samuelson[9] a través de su trabajo sobre la valuación de warrants[10] da a conocer la investigación de Bachelier. Alrededor de 1960, Samuelson, en una visita a la Sorbonne, lee la tesis de Bachelier y este acontecimiento influye de manera fundamental en su trabajo posterior sobre precios de opciones.

En 1965, Paul Samuelson publica su artículo "Rational Theory of Warrant Prices", en donde se introduce el concepto de movimiento económico Browniano, lo que en la actualidad se conoce como movimiento geométrico Browniano. Cuando Samuelson resuelve el problema de Bachelier, eliminando la posibilidad de que un activo tenga precios negativos, se crean nuevos inconvenientes con la aparición de parámetros desconocidos. En el artículo de Samuelson, en donde el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano y el precio de la opción se calcula como el valor presente de la esperanza del pago al vencimiento, el valor de la opción depende de dos parámetros desconocidos. El primer parámetro es el rendimiento medio esperado del subyacente, el cual es un parámetro de tendencia relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes. El segundo, es el rendimiento que pagan las opciones que se utiliza para traer a valor presente el pago esperado de la opción al vencimiento.

---

[9] Premio Nobel de economía en 1970. El trabajo de Paul Samuelson es considerado crucial para el desarrollo de la teoría económica moderna. En su obra "Foundations of Economic Analysis", publicada en 1947, establece la formulación matemática de muchos de los conceptos esenciales de la disciplina económica. A partir de su trabajo, la matemática ha sido el medio para que la teoría económica pueda expresarse.

[10] Un warrant es un contrato de opción que emite una empresa y que otorga el derecho de comprar sus acciones a un precio preestablecido y dentro de un plazo determinado. Cuando el warrant se acompaña de la emisión de un bono, el contrato otorga el derecho de convertir el bono en acciones. Los warrants tienen vencimientos que oscilan, usualmente, entre 2 y 12 años.

8. ROBERT MERTON, FISCHER BLACK Y MYRON SCHOLES (LA FÓRMULA PERFECTA)

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes publicaron su artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" en el *Journal of Political Economy*. Posiblemente, la selección del *Journal* fue poco afortunada o inadecuada para el título del trabajo. La investigación estuvo en proceso de dictaminación por dicho *Journal* durante casi dos años. Robert Merton, Eugene Fama y Merton Miller ya habían revisado el trabajo de Black y Scholes y amparaban la relevancia del mismo. Bajo el supuesto de equilibrio general, Black y Scholes obtuvieron una fórmula para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, y cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Los inconvenientes del artículo de Samuelson fueron entonces corregidos, ya no hay parámetros desconocidos en el precio de la opción y, más importante aún, no surgieron limitaciones adicionales. La fórmula perfecta se había encontrado. En el mismo artículo, Black y Scholes proporcionan una derivación alternativa de su fórmula de valuación empleando el CAPM (Capital Asset Pricing Model).

En su artículo, Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y lineal, cuya solución es el precio de una opción europea cuando la condición final es el valor intrínseco de la opción. En la investigación de Black y Scholes, esta ecuación diferencial parcial es transformada en la ecuación de difusión de calor, la cual tiene soluciones explícitas. Desde entonces, la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes ha sido muy popular, pues representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados, ya que para diferentes condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de muchos productos derivados disponibles en el mercado.

Sin duda, es también importante destacar el artículo de Robert Merton, "Theory of Rational Option Pricing" publicado en 1973 en el *Bell Journal of Economics and Management Science*, en donde se obtienen resultados similares a los de Black y Scholes y varias extensiones. Merton continuó su trabajo sobre valuación de opciones en una serie de artículos verdaderamente impresionantes.

Por sus excepcionales contribuciones a lo que hoy se conoce como matemáticas financieras en tiempo continuo, Robert Merton y Myron Scholes se hicieron acreedores al premio Nobel en 1997. Tristemente, para entonces Fischer Black tenía dos años de fallecido. En consideración a las contribuciones de Merton, el modelo Black y Scholes, bien podría llamarse de Black, Merton y Scholes. Es también justo mencionar que Robert Merton y Fischer Black se han distinguido por la cantidad y calidad de sus contribuciones tanto a las finanzas como a la economía.

A continuación se revisan, en cierto detalle, las investigaciones de Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton. Con el propósito de que el lector pueda seguir el proceso evolutivo de las ideas y formulaciones, se simplifican algunos supuestos y se utiliza la notación convencional moderna. La notación empleada por Bachelier en ocasiones es complicada y difícil de seguir.

9. LA TESIS DE BACHELIER

La primera parte de su tesis contiene una descripción de los productos derivados disponibles en el mercado francés en su tiempo, tales como contratos forward y opciones. Posteriormente, desarrolla un modelo probabilista del movimiento del precio de un activo y establece el principio de valuación de que la "esperanza condicional de la ganancia del especulador es cero". El término condicional se refiere a que la información actual es tomada como dada. Implícitamente, Bachelier, acepta en este principio que el mercado valúa activos utilizando martingalas. Asimismo, establece que el precio evoluciona como un proceso de Markov homogéneo en el tiempo. También, muestra que la función de densidad asociada a este proceso satisface la condición actualmente conocida como ecuación Chapman-Kolmogorov, y verifica que la densidad Gaussiana con varianza creciente linealmente en el tiempo es solución de esta ecuación. No discute la unicidad, pero da algunos argumentos para confirmar su conclusión. Es importante destacar que Bachelier muestra que la familia de funciones de densidad asociadas al proceso que conduce el precio satisface la ecuación de calor. Por último, el modelo probabilista que describe el movimiento del precio de un activo es aplicado para valuar varios tipos de opciones (francesas) cuyas primas se pagan al vencimiento.[11] El razonamiento de Bachelier no es muy riguroso, pero sus argumentos intuitivos son excelentes y, básicamente, correctos.

9.1 LEY DE LA PROBABILIDAD DEL PRECIO DE UN ACTIVO

En esta sección se presenta el modelo probabilista desarrollado por Bachelier para estudiar la dinámica estocástica del precio de un activo. Para ello, se utiliza la notación convencional moderna.

Sea S_{t1} el precio de un activo en el tiempo $t_1 > 0$. Suponga que S_{t1} es una variable aleatoria definida sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Asimismo, suponga que S_{t1}, tiene una función de densidad condicional $f_{S_{t1}|S_0}(s \mid S_0)$, entonces la probabilidad de que en el tiempo t_1, el precio del activo, S_{t1}, se encuentre en el intervalo $[s, s+ \mathrm{d}s]$, dado S_0, se puede escribir como

$$\mathrm{P}\{s \leq S_{t1} \leq s + \mathrm{d}s \mid S_0\} = \int_s^{s+ds} f_{S_{t1}|S_0}(u \mid S_0)\mathrm{d}u = f_{S_{t1}|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s + o(\mathrm{d}s), \quad (1)$$

donde $o(\mathrm{d}s)/\mathrm{d}s \to 0$ cuando $\mathrm{d}s \to 0$. En lo que sigue, es conveniente denotar la cantidad $f_{S_{t1}|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s$ mediante $p(s, t_1 \mid S_0, 0)\mathrm{d}s$. Así,

$$\mathrm{P}\{s \leq S_{t1} \leq s + \mathrm{d}s \mid S_0\} \approx p(s, t_1 \mid S_0, 0)\mathrm{d}s\,. \quad (2)$$

[11] Este tipo de opciones no debe confundirse con las opciones parisinas (o parisienses), las cuales son esencialmente una combinación entre las opciones con barreras y las asiáticas. Las opciones parisinas tienen características predominantes de las opciones con barreras, a que pueden activarse o desactivarse (surgir o extinguirse) cuando el subyacente alcanza una barrera preestablecida. La característica que las opciones parisinas comparten con las opciones asiáticas es que el subyacente es un valor extremo (máximo o mínimo) del precio de un activo, el cual además debe permanecer fuera o dentro de la barrera por un tiempo predeterminado. Hubiera sido realmente sorprendente, e impresionante, que Bachelier estudiara este tipo de opciones.

De la misma manera,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{u \leq S_{t2} + s \leq u + \mathrm{d}u \mid S_{t1} = s\} \\
&= \mathrm{P}\{u - s \leq S_{t2} \leq u - s + \mathrm{d}u \mid S_{t1} = s\} \\
&= f_{S_{t1+t2}|S_0}(u \mid S_{t1})\mathrm{d}u + o(\mathrm{d}u).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Si se denota $f_{S_{t1-t2}|S_0}(u \mid S_{t1})$ por $p(u,t_1+t_2 \mid s,t_1)\mathrm{d}u$, se tiene que

$$
\mathrm{P}\{u \leq S_{t2} + s \leq u + \mathrm{d}u \mid S_{t1}\} \approx p(u,t_1+t_2 \mid s,t_1)\mathrm{d}u. \tag{4}
$$

De esta manera, la probabilidad condicional de que S_{t1+t2} se encuentre en $[u + \mathrm{d}u]$, dado S_0, se calcula como

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{u \leq S_{t1+t2} \leq u + \mathrm{d}u \mid S_0\} \\
&= \int_{s\in\mathrm{R}} \mathrm{P}\{u \leq S_{t2} + s \leq u + \mathrm{d}u \mid S_{t1} = s\}\mathrm{P}\{s \leq S_{t1} \leq s + \mathrm{d}s \mid S_0\}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

9.2 ECUACIÓN DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

En virtud de (2) y (4), y bajo el supuesto de que los errores de aproximación son despreciables, la ecuación (5) puede escribirse como

$$
p(u,t_1+t_2 \mid S_0,0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u,t_1+t_2 \mid s,t_1)p(s,t_1 \mid S_0,0)\mathrm{d}s. \tag{6}
$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de Chapman-Kolmogorov (para el caso continuo). La única función que satisface (5) está dada por

$$
p(u,t+h \mid s,h) = q(t)e^{-\pi q(t)^2(u-s)^2}, \tag{7}
$$

donde $q(\cdot)$ es una función del tiempo por determinar. Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(u,t+h \mid s,h)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-\pi q(t)^2(u-s)^2}\mathrm{d}u = 1,$$

En particular,[12]

$$p(s,t_1 \mid S_0,0) = q(t_1)e^{-\pi q(t_1)^2(s-S_0)^2}, \tag{8}$$

Observe que si $s=0$, se tiene que $p(u,t_1+t_2 \mid s,t_1) = q(t_1)$.

De la misma forma,

$$p(0,t_1+t_2 \mid s,t_1) = q(t_2)e^{-\pi q(t_2)^2(u-s)^2}. \tag{9}$$

A continuación se verifica que (7) satisface (6). Observe primero que, a partir de (8) y (9), se tiene que

$$\begin{aligned} p(u,t_1+t_2 \mid S_0,0) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(t_2)e^{-\pi q(t_2)^2(u-s)^2} q(t_1)e^{-\pi q(t1)^2(u-s)^2}\mathrm{d}s,\\ &= q(t_1)q(t_2)e^{-\pi\left[q(t_2)^2u^2+q(t_1)^2S_0^2\right]}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left[\left(q(t_1)^2+q(t_2)^2\right)s^2+2\left(q(t_2)^2u+q(t_1)^2S_0\right)s\right]}\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{10}$$

Si se define el cambio de variable

$$w = s\sqrt{q(t_1)^2+q(t_2)^2} - \frac{q(t_2)^2u+q(t_1)^2S_0}{\sqrt{q(t_1)^2+q(t_2)^2}},$$

[12] Bachelier, por simplicidad, supone $S_0=0$.

entonces.

$$p(u,t_1+t_2 \mid S_0,0)$$
$$=\frac{q(t_1)q(t_2)}{\sqrt{q(t_1)^2+q(t_2)^2}}\exp\left\{-\pi\left[q(t_2)^2u^2+q(t_1)^2S_0^2\right]+\frac{\pi\left[q(t_2)^2u+q(t_1)^2S_0\right]^2}{q(t_1)^2+q(t_2)^2}\right\},$$

dado que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi w^2}\,\mathrm{d}w=1$.

En consecuencia,

$$p(u,t_1+t_2 \mid S_0,0)=\frac{q(t_1)q(t_2)}{\sqrt{q(t_1)^2+q(t_2)^2}}\exp\left\{-\pi\frac{q(t_1)^2q(t_2)^2}{q(t_1)^2+q(t_2)^2}(u-S_0)^2\right\} \tag{11}$$

Por otro lado, en virtud de (7), se obtiene que

$$p(u,t_1+t_2 \mid S_0,0)=q(t_1+t_2)e^{-\pi q^2(t_1+t_2)^2(u-S_0)^2} \tag{12}$$

Así,

$$q^2(t_1+t_2)=\frac{q^2(t_1)q^2(t_2)}{q^2(t_1)+q^2(t_2)}. \tag{13}$$

Si se igualan las derivadas parciales de (12) con respecto de t_1 y t_2, es decir

$$\frac{\partial q^2(t_1+t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial q^2(t_1+t_2)}{\partial t_2},$$

entonces, se satisface

$$\frac{q'(t_1)}{q^3(t_1)} = \frac{q'(t_2)}{q^3(t_2)}. \tag{14}$$

En otras palabras, el cociente $q'(t)/q^3(t)$ es independiente de t, es decir, es independiente del tiempo. Así, $q'(t)/q^3(t) = a$ =constante. La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$q(t_1) = \frac{b}{\sqrt{t}}, \tag{15}$$

donde b es una constante positiva. Si se redefine b como $b = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$p(u, t+h \mid s, h) = q(t)e^{-\pi q(t)^2(u-s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{-(u-s)^2}{2t}\right\}. \tag{16}$$

Si se toma en cuenta que $p(s, t+h \mid S_h, h) = f_{S_t \mid S_h}(s \mid S_h)$, se tiene que

$$f_{S_t \mid S_0}(s \mid S_0) = p(s, t \mid S_0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{\frac{-(u-S_0)^2}{2t}\right\}. \tag{17}$$

Esta es la función de densidad que obtuvo Bachelier para el precio de un activo financiero con $S_0 = 0$. Por último, observe que la ecuación de Chapman-Kolmogorov se puede escribir, en forma alternativa, como

$$f_{S_{t1+t2} \mid S_0}(s \mid S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{S_{t1+t2} \mid S_{t1}}(s \mid S_{t1}) f_{S_{t1} \mid S_0}(S_{t1} \mid S_0) \mathrm{d}S_{t1}. \tag{18}$$

9.3 ECUACIÓN DE FOURIER

Joseph Fourier (1768-1830), de nacionalidad francesa, fue el primero en desarrollar la teoría de conducción del calor. La ecuación de difusión de calor, o simplemente la ecuación de calor, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden con soluciones explícitas. Estas soluciones describen cómo se difunde, al transcurrir el tiempo, el calor en una varilla de longitud infinita después de que ha sido calentada en un tiempo inicial.

Con el propósito de obtener la ecuación de difusión de calor que obtuvo Bachelier, los argumentos originales de su tesis se simplifican. Considere la ecuación (16)

$$p(u,t \mid s,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ \frac{-(u-s)^2}{2t} \right\}, \tag{19}$$

se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{(u-s)^2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) p(u,t \mid s,0) \tag{20}$$

y

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 t} = \left(\frac{(u-s)^2}{t^2} - \frac{1}{t} \right) p(u,t \mid s,0). \tag{21}$$

Por lo tanto,

$$2\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, \qquad -\infty < u < \infty, \qquad t \geq 0. \tag{22}$$

Si se define $P(u,t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(u,t\mid s,0)\mathrm{d}s$, también se cumple, trivialmente, que

$$2\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \qquad -\infty<u<\infty, \qquad t\geq 0. \tag{23}$$

Evidentemente, si se hace el cambio de variable $t=2\tau$,

$$p(s,2\tau\mid u,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left\{\frac{-1}{4\tau}(s-u)^2\right\}$$

y se escribe

$$V(u,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} p(u,2\tau\mid s,0)\mathrm{d}s, \tag{24}$$

se sigue que

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}, \qquad -\infty<u<\infty, \qquad \tau\geq 0. \tag{25}$$

Las ecuaciones (22), (23) y (25) tienen el formato de la ecuación diferencial parcial de Fourier $c^2\partial\varphi/\partial t=\partial^2\varphi/\partial u^2$ donde c es una constante. En particular, (25) es conocida como la ecuación de difusión de calor si además se impone como restricción $V(u,0)\equiv 1$.

9.4 PROCESOS MARKOVIANOS

Un proceso estocástico es llamado Markoviano si la distribución de probabilidad de un estado futuro sólo depende de la información actual y no de la anterior. Si se define la variable aleatoria $\Delta^{(h)}S_t=S_{t+h}-S_h$, con $h\geq 0$ arbitrario, se tiene que la distribución de $\Delta^{(h)}S_t$ sólo depende de la información disponible en el tiempo h, es decir, sólo depende del valor de S_h y no de valores anteriores S_m, $m \leq h$. Esto significa que $\Delta^{(h)}S_t$ es un proceso Markoviano.

9.5 PROCESOS HOMOGÉNEOS EN EL TIEMPO

Observe que, a partir de (16), para cualquier $h \geq 0$, se cumple la propiedad

$$p(u, t+h \mid s, h) = p(u, t \mid s, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-(u-s)^2}{2t}\right\}. \tag{26}$$

Si se define ahora la variable aleatoria $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_h$, con h ≥ 0 arbitrario, se tiene, a partir de (26), que $\Delta^{(h)}$ y $\Delta^{(0)}S_t$ tienen la misma distribución $N(0, t)$. Es decir, la distribución de $\Delta^{(h)}S_t$ sólo depende de la diferencia entre $t+h$ y h. Si se denota $x = u - s$, entonces

$$p(x, t \mid 0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{\frac{-x^2}{2t}\right\}.$$

Generalmente, si h y m son números no negativos arbitrarios, entonces $\Delta^{(h)}S_t$ y $\Delta^{(m)}S_t$ tienen la misma distribución.

9.6 MARTINGALAS

Uno de los conceptos más importantes en el estudio de los mercados financieros es el de mercados eficientes, los cuales se definen a través de los procesos martingalas. Observe que en virtud de la condición $\mathrm{E}\left[S_{t+h} - S_h \middle| S_h\right] = 0$, se tiene que

$$\mathrm{E}\left[S_{t+h} \middle| S_h\right] = S_h. \tag{27}$$

Es decir, el mejor pronóstico de S_{t+h}, dado que su valor actual es S_h, es justamente S_h. Un proceso estocástico, $(S_t)_{t\geq 0}$ que satisface (27) para todo $t,\ h \geq 0$ es llamado una martingala.

9.7 MOVIMIENTO BROWNIANO

El movimiento Browniano, así como sus aspectos teóricos y prácticos, es objeto de numerosos estudios en muchas y muy diversas áreas de las matemáticas financieras. Sin lugar a dudas, el movimiento Browniano se encuentra implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo. Para ser más precisos el movimiento Browniano ocupa el 99% en la teoría de valuación de portafolios y productos derivados en tiempo continuo; el 1% restante se refiere a detalles sin importancia.

El antecedente de lo que, actualmente, se conoce como movimiento Browniano se encuentra en el trabajo de Bachelier (1900) y anteriormente en el de Jules Regnault (1863). Considere de nuevo la función de densidad que obtuvo Bachelier, incluyendo un parámetro de volatilidad σ, para el precio de un activo financiero:

$$f_{S_t|S_0}(s \mid S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma}\exp\left\{\frac{-s^2}{2\sigma^2 t}\right\}, \qquad t \geq 0, \tag{28}$$

con $S_0 = 0$. Observe que lo anterior es equivalente a escribir $S_t \sim N(0,\ \sigma t)$. Si se define $W_t \sim N(0,\ t)$, entonces se puede escribir $S_t = \sigma\, W_t$. En este caso, si $t = 0$, entonces $W_0 \equiv 0$. Si ahora se define $\Delta^{(h)}S_t = S_{t+h} - S_h$ y $\Delta^{(h)}W_t = W_{t+h} - W_h$, $h > 0$, se sigue que

$$\Delta^{(h)}S_t = \sigma\ \Delta^{(h)}W_t. \tag{29}$$

Por último, observe que si los cambios son infinitesimales, la ecuación (29) puede ser reemplazada por

$$dS_t = \sigma\, dW_t, \qquad dW_t \sim N(0, dt), \tag{30}$$

lo cual es más acorde con la notación moderna.

9.8 VALUACIÓN DE OPCIONES (FRANCESAS)

En esta sección se emplea el modelo probabilista del precio de un activo para valuar un tipo especial de opciones, las opciones francesas, cuya prima se paga al vencimiento.

Una opción (financiera) de compra, o contrato de opción de compra, es un acuerdo entre dos partes que obliga (legalmente) a una de las partes a vender un activo financiero, mientras que a la contraparte le otorga el derecho, mas no la obligación, de comprar dicho activo a un precio preestablecido en una fecha futura. Se supone que la compra-venta sólo se puede llevar a cabo en la fecha de vencimiento. Se acostumbra decir que el comprador toma una posición larga y el vendedor una posición corta.

Suponga que el contrato de opción se establece al tiempo t (el presente) y que la compra-venta del activo a un precio predeterminado, K, se lleva a cabo en una fecha futura, T. El precio pactado, K, es llamado precio de ejercicio (de la opción). En este caso, es importante mencionar que en el momento en que se celebra el contrato, no se paga la prima (o precio del derecho) sino hasta el vencimiento. Un agente, con expectativas a la alza, que piensa que el precio del activo aumentará, puede especular tomando una posición larga en un contrato de opción sobre dicho activo. Sea S_T el precio del activo financiero en la fecha de vencimiento. Si $S_T < K$, entonces la posición larga no ejerce la opción de compra. Mientras que si $S_T > K$, la posición larga ejerce la opción obteniendo una ganancia S_T - K. En cualquier caso se paga la prima C. El principio que establece Bachelier para valuar la opción es que la esperanza de la ganancia del especulador (la posición larga) es cero,[13] es decir,

$$\int_{-\infty}^{K} - C f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s + \int_{K}^{\infty}(s - K - C) f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s = 0, \tag{31}$$

donde

$$f_{S_T|S_0}(s \mid S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma}\exp\left\{\frac{-(s - S_0)^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

Se ha introducido el parámetro de volatilidad σ para darle, al planteamiento de Bachelier, un pequeño toque de modernidad. La ecuación (31) conduce a

$$\begin{aligned} C &= \int_{K}^{\infty}(s - K) f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s \\ &= \int_{K}^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s - K\mathrm{P}\{S_T \geq K\} \\ &= \int_{K}^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s - K\Phi\left(- K / \sigma\sqrt{T}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Evidentemente, $\Phi(- K / \sigma\sqrt{T})$ es la probabilidad de ejercer la opción.

[13] John Maynard Keynes, 30 años después, en su libro *Treatise on Money* (1930), analiza una situación similar a la de Bachelier, para un productor-especulador que toma una posición larga en un contrato forward. Keynes establece que si la oferta de un bien es igual a su demanda, entonces el precio de contado, S_T, tiene que ser mayor que el precio forward, K, ya que la diferencia, S_T - K, tiene que compensar el riesgo por fluctuaciones en el precio durante el periodo de producción (situación que se conoce como "normal backwardation"). Si S_T es una variable aleatoria y el productor-especulador toma una posición larga en un contrato forward la esperanza de la ganancia del productor-especulador es cero, es decir, $\mathrm{E}[S_T - K \mid S_0]=0$, lo cual implica que, en equilibrio, $K=\mathrm{E}[S_T \mid S_0]$.

Por supuesto, si la prima tuviera que pagarse en el momento en que se inicia el contrato, el precio, c, estaría dado por

$$c = e^{-rT}\int_{K}^{\infty} s f_{S_T|S_0}(s \mid S_0)\mathrm{d}s - e^{-rT}K\Phi\left(-K/\sigma\sqrt{t}\right) \tag{33}$$

donde r es una tasa de interés constante y libre de riesgo. Observe que la ecuación (33) es independiente de parámetros relacionados con las preferencias al riesgo de los agentes que participan en el mercado. Por otro lado, el rendimiento medio esperado de cualquier activo, incluyendo la opción, es la tasa de interés libre de riesgo, r, es decir, los agentes son neutrales al riesgo. Por esta razón, el precio de la opción se descuenta a la tasa r.

10. ALBERT EINSTEIN Y EL MOVIMIENTO IRREGULAR DE UNA PARTÍCULA SUSPENDIDA EN UN LÍQUIDO Y SU RELACIÓN CON LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN DE CALOR

En esta sección se presentan las ideas principales del trabajo de Albert Einstein[14] sobre el movimiento irregular de una partícula suspendida en un líquido y su relación con la ecuación de difusión de calor .

Considere una partícula suspendida en un líquido estacionario. Se supone que los movimientos de la partícula en intervalos diferentes de tiempo son procesos independientes. En lo que sigue, el movimiento de la partícula se referirá a un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con la posición $S_0 = 0$ del centro de gravedad de la partícula en cuestión, al tiempo 0. Suponga que la

[14] Albert Einstein (1879-1955). Premio Nobel de física en 1921. En 1905 escribe su ensayo "On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular kinetic theory of heat" (Uber die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen). En esta investigación Einstein muestra que la distribución normal, con varianza creciente linealmente en el tiempo, conduce los movimientos de una partícula suspendida en un líquido homogéneo y estacionario.

posición S_t, de la partícula en el tiempo $t > 0$, es una variable aleatoria que puede tomar valores positivos o negativos con una función de densidad de probabilidad tal que

$$\Phi(s,0) \equiv p(s,t \mid 0,0) = f_{S_t \mid S_0}(s \mid S_0) \tag{34}$$

y

$$\Phi(s,0) = \Phi(-s,0).$$

Obviamente, $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s,0)\mathrm{d}s = 1$.

Observe que en el planteamiento de Einstein se está utilizando la misma notación que se utilizó para exhibir el trabajo de Bachelier a fin de comparar los modelos de ambos. Si S_{t+h} es la posición de la partícula en el tiempo $t + h$, se sigue que

$$\Phi(u,t+h)\mathrm{d}u = \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u-s,t)\Phi(s,0)\mathrm{d}s, \tag{35}$$

donde $\Phi(u,t+h) = p(u,t+h \mid 0,0)$ y $\Phi(u-s,t) = p(u,t+h \mid s,t)$; y, ahora bien, si h es pequeña, se tiene que

$$\Phi(u,t+h) \approx \Phi(u,t) + h\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial t}. \tag{36}$$

Además, expandiendo $\Phi(u-s,t)$ en potencias de $-s$, se sigue que

$$\Phi(u-s,t) = \Phi(u,t) - s\frac{\partial \Phi(u,t)}{\partial u} + \frac{1}{2}s^2\frac{\partial^2 \Phi(u,t)}{\partial u^2} - \ldots \tag{37}$$

Si se sustituyen (36) y (37) en (35) y se desprecian los errores de aproximación, se puede escribir que

$$\Phi(u,t)+h\frac{\partial\Phi(u,t)}{\partial t}=\Phi(u,t)\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s,0)\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(u,t)}{\partial u^2}\int_{-\infty}^{\infty}s^2\Phi(s,0)\mathrm{d}s. \tag{38}$$

Ahora bien, dado que $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(s,0)\mathrm{d}s=1$, la ecuación (38) satisface

$$h\frac{\partial\Phi(u,t)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(u,t)}{\partial u^2}\int_{-\infty}^{\infty}s^2\Phi(s,0)\mathrm{d}s.$$

Si se define

$$\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}s^2\Phi(s,0)\mathrm{d}s=D,$$

se obtiene

$$\frac{\partial\Phi(u,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2\Phi(u,t)}{\partial t^2}. \tag{39}$$

Esta es la ecuación diferencial de difusión de calor. La constante D en (39) es conocida como el coeficiente de difusión. Por último, si se imponen las condiciones:

$$\Phi(u,0)=0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u,t)\mathrm{d}u=1.$$

la solución de (39) es

$$\Phi(u,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-u^2/4Dt} \tag{40}$$

Por último, observe que si se redefine $D = \sigma^2/2$, la ecuación anterior se transforma en

$$\Phi(u,t) = p(u,t \mid 0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\,\sigma} e^{-u^2/2\sigma^2 t} \tag{41}$$

11. EL MODELO DE SAMUELSON PARA VALUAR OPCIONES EUROPEAS

En 1965, Paul Samuelson publica su artículo "Rational Theory of Warrant Prices" en el *Industrial Managament Review*. El supuesto principal de su investigación es que el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, lo cual impide que el precio del activo subyacente tome valores negativos.

Suponga que la dinámica estocástica del precio del activo subyacente es conducida por un proceso de la forma

$$\mathrm{d}S_t = \alpha S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \qquad \mathrm{d}W_t \sim N(0, \mathrm{d}t), \tag{42}$$

donde $\alpha \geq 0$ (agentes adversos al riesgo) es el rendimiento medio esperado del activo y $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea. En este caso, se puede mostrar que la función de densidad de S_T, dado S_0, está dada por:

$$f^{(\alpha)}_{S_T|S_0}(s \mid S_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma s} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{S_0}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)^2 \right\} \tag{43}$$

Es decir, S_T/S_0 tiene una distribución lognormal con media $(\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$; $\ln(S_T/S_0) \sim N((\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$. Es decir, S_T es conocido en un sentido probabilista.

Es importante destacar que la distribución lognormal satisface la ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$f^{(\alpha)}_{S_T|S_0}(s \mid S_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(\alpha)}_{S_{T-t}|S_u}(s \mid S_u) f^{(\alpha)}_{S_u|S_u}(S_u \mid S_0) \mathrm{d}S_u. \tag{44}$$

Asimismo, es fácil verificar que

$$E[S_T \mid S_0] = \int_0^{\infty} s f^{(\alpha)}_{S_T|S_u}(s \mid S_u) \mathrm{d}s = S_0 e^{\alpha T}. \tag{45}$$

Con un razonamiento similar al de (33), el precio de una opción europea de compra con vencimiento en T, $c(S_0, T; \alpha, \beta)$, está dado por

$$\begin{aligned} c(S_0, T; \alpha, \beta) &= e^{-\beta T} \int_0^{\infty} \max(s-K,0) f^{(\alpha)}_{S_T|S_t}(s \mid S_t) \mathrm{d}s \\ &= e^{-\beta T} \int_K^{\infty} (s-K) f^{(\alpha)}_{S_T|S_t}(s \mid S_t) \mathrm{d}s \\ &= e^{-\beta T} \int_K^{\infty} s f^{(\alpha)}_{S_T|S_t}(s \mid S_t) \mathrm{d}s - K e^{-\beta T} \mathrm{P}\{S_T \geq K\} \qquad (46) \\ &= e^{-\beta T} \int_K^{\infty} s f^{(\alpha)}_{S_T|S_t}(s \mid S_t) \mathrm{d}s - K e^{-\beta T} \Phi(d), \end{aligned}$$

donde β es el rendimiento que pagan las opciones, $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar y

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Se supone que $\beta \geq \alpha \geq 0$. La notación del pago de la opción al vencimiento "max($s-K$, 0)" utilizada actualmente, fue introducida por Samuelson. Observe que la fórmula (46) depende de dos parámetros desconocidos, a saber, α y β. El parámetro α es el rendimiento medio esperado del subyacente, el cual es un parámetro de tendencia relacionado con las preferencias al riesgo de los agentes. El parámetro β es el rendimiento que pagan las opciones que se utiliza para traer a valor presente el pago esperado de la opción al vencimiento. Una forma alternativa de escribir (46) es

$$\begin{aligned} c(S_0,T;\alpha,\beta) &= e^{-\beta T}\int_K^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s \\ &= e^{-\beta T}\int_0^\infty (s-K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s - e^{-\beta T}\int_0^K (s-K) f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s \\ &= e^{-\beta T}\left(S_0 e^{-\alpha T}-K\right)+e^{-\beta T}\left(K\mathrm{P}\{S_T\leq K\}-\int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s\right) \\ &= S_0 e^{(\alpha-\beta)T}-Ke^{-\beta T}+e^{-\beta T}\left(K(1-\Phi(d))-\int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s\right) \\ &= S_0 e^{(\alpha-\beta)T}-Ke^{-\beta T}+e^{-\beta T}\left(K\Phi(-d)-\int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Observe que si, en particular, $\alpha=\beta$, entonces

$$\begin{aligned} c(S_0,T;\alpha,\beta) &= S_0 - Ke^{-\alpha T} + Ke^{-\alpha T}\Phi(-d) - e^{-\alpha T}\int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s \\ &= S_0 - e^{-\alpha T}\int_0^K s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s - Ke^{-\alpha T}\Phi(d) \\ &= S_0 e^{-\alpha T}\int_K^\infty s f_{S_T|S_t}^{(\alpha)}(s\mid S_t)\mathrm{d}s - Ke^{-\alpha T}\Phi(d) \\ &= S_0\Phi\left(d+\sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-\alpha T}\Phi(d). \end{aligned} \tag{48}$$

11.1 EL MODELO DE SAMUELSON DE VALUACIÓN DE OPCIONES PERPETUAS

Una opción perpetua es aquella para la cual $T \to 1$. Observe que

$$\lim_{T\to\infty} \Phi(d) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{T\to\infty} \Phi\left(d + \sigma\sqrt{T}\right) = 1,$$

en cuyo caso, en virtud de (48), el precio de la opción perpetua $c(S_0, \infty; \alpha, \beta) = S_0$. En el caso general, cuando $\beta > \alpha$, Samuelson proporciona la siguiente fórmula exacta para el precio de una opción perpetua

$$c\left(S_0, \infty; \alpha, \beta\right) = \frac{(\gamma - 1)^{\gamma-1}}{\gamma^{\gamma}} S_0^{\gamma}, \tag{49}$$

donde

$$\gamma = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\beta}{\sigma^2} - \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)}.$$

Por último, si se selecciona $\alpha = \sigma^2/2$, se tiene que $\gamma = \sqrt{\beta / \alpha}$

12. EL MODELO DE FISHER BLACK Y MYRON SCHOLES

A principios de la década de los setenta, Fisher Black y Myron Scholes publicaron su artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". En su investigación, bajo condiciones de equilibrio (condiciones de no arbitraje), desarrollaron un modelo para valuar opciones europeas sobre una acción que no paga dividendos y cuya dinámica es conducida por el movimiento geométrico Browniano, como en el modelo de Samuelson. Los parámetros desconocidos α y β, considerados en el trabajo de Samuelson, ya no aparecen en el precio de la opción. En este mismo artículo, Black y Scholes proporcionan una derivación alternativa de su fórmula de valuación empleando el CAPM (Capital Asset Pricing Model).

Black y Scholes obtienen una ecuación diferencial parcial de segundo orden (parabólica) y lineal, cuya solución es el precio de una opción europea. La condición final es el valor intrínseco del instrumento. Esta ecuación es muy popular y representa la base para valuar muchos y muy diversos productos derivados ya que, para diferentes condiciones de frontera, sus soluciones representan los precios de los distintos derivados financieros que se encuentran disponibles en el mercado.

Los supuestos básicos (o condiciones ideales de los mercados de acciones y opciones) del modelo de Black y Scholes son:

i) el activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;
ii) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal;
iii) la volatilidad del precio el activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;
iv) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;
v) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente siempre se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;
vi) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);
vii) El mercado opera en forma continua;
viii) existe un mercado de crédito y un sistema bancario en los que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante para todos los plazos, y libre de riesgo (tasa de interés pasiva igual a la activa); y
ix) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje libres de riesgo.

Bajo estos supuestos, el precio de la opción dependerá sólo del precio de la acción, del tiempo de vencimiento y de un conjunto de parámetros conocidos y constantes. Asimismo, con base en los supuestos anteriores, es posible crear una estrategia de cobertura (dinámica) consistente en una posición larga en la acción y una posición corta en la opción. El valor de una opción europea de compra es, claramente, función de los diferentes parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como: el precio de ejercicio, K, la fecha de vencimiento, T, el precio de contado de la acción en el momento en que se establece el contrato, S_t, la volatilidad, σ , y la tasa de interés, r. Por lo anterior, el precio de la opción se puede escribir como

$$c = c(S_t,\ t;\ K,\ T,\ \sigma,\ r).$$

En lo que sigue, no se hará mención explícita a los parámetros T, K, r y σ, excepto cuando sea necesario. Es decir, el valor de la opción se denotará simplemente como $c = c(S_t,\ t)$.

Suponga que la dinámica del precio del activo subyacente es conducida por un proceso de la forma

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \qquad \mathrm{d}W_t \sim N(0,\ \mathrm{d}t), \tag{50}$$

donde μ y $\sigma > 0$ son, respectivamente, el rendimiento medio esperado y la volatilidad instantánea del activo. Considere ahora un portafolio con w_1 unidades del activo subyacente de precio S_t, y w_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t,\ t)$.

Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces

$$\prod{}_t = w_1 S_t + w_2\, c(S_t,\ t). \tag{51}$$

El cambio en el valor del portafolio, durante el instante $\mathrm{d}t$, debido a fluctuaciones propias del mercado, está dado por

$$\mathrm{d}\prod{}_t = w_1\, \mathrm{d}\, S_t + w_2\, \mathrm{d}\, c. \tag{52}$$

Si, en particular, se eligen $w_1 = 1$ y

$$w_2 = -\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}}, \tag{53}$$

se sigue que

$$\mathrm{d}\prod{}_t = \mathrm{d}S_t - \frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}}\mathrm{d}c. \tag{54}$$

A continuación, se muestra que la selección anterior de w_1 y w_2 diversifica (elimina) completamente el riesgo de mercado. Observe también que, como S_t cambia con el tiempo, el número de opciones en la posición corta también cambia con el tiempo, lo que hace que la cobertura sea dinámica. Si se expande dc en serie de Taylor hasta términos de segundo orden se tiene que[15]

$$\mathrm{d}c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t. \tag{55}$$

Si se sustituye la ecuación (55) en (54), se obtiene que el cambio en el valor del portafolio es

$$\mathrm{d}\prod{}_t = -\frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t. \tag{56}$$

---

[15] En este caso, se aplica la propiedad $\mathrm{d}W_t^2 = \mathrm{d}t$, la cual será justificada en un capítulo posterior.

Como el rendimiento del portafolio es conocido, éste tiene que ser igual a $r\mathrm{d}t$, en condiciones de equilibrio. Por lo tanto.

$$\mathrm{d}\prod{}_t = \left(S_t - \frac{1}{\frac{\partial c}{\partial S_t}} c \right) \mathrm{d}t. \tag{57}$$

Después de igualar las ecuaciones (56) y (57), se tiene que

$$\frac{\partial c}{\partial S_t} = rc - rS_t + \frac{\partial c}{\partial S_t} - \tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \tag{58}$$

junto con la condición final

$$\mathrm{c}(S_t, t) = \max(S_t - K, 0). \tag{59}$$

Con el propósito de resolver la ecuación diferencial parcial anterior, Black y Scholes proponen la siguiente sustitución:

$$\mathrm{c}(S_t, t) = B(t,T)G(u(S_t,\tau),\tau), \tag{60}$$

donde

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)},$$

$$u \equiv u(S_t,\tau) = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \tau$$

y

$$\tau = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2 (T - t).$$

Si se calculan las derivadas parciales que aparecen en la ecuación diferencial parcial (58), se tiene que

$$\frac{\partial c}{\partial t}=rBG-B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2-B\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2$$

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}=B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t}$$

y

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}=-B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t^2}+B\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^2\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2\frac{1}{S_t^2}.$$

Después de sustituir las derivadas parciales anteriores en la ecuación (58), se tiene que

$$\begin{aligned}
&rBG-B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2-B\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2\\
&+rS_t\left[B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t}\right]\\
&+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2\left[-B\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{S_t^2}+B\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^2\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2\frac{1}{S_t^2}\right]-rc=0.
\end{aligned}$$

Dado que $rc=rBG$, la ecuación anterior se simplifica de la siguiente manera

$$-\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2-\frac{\partial G}{\partial \tau}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2+r\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)$$

$$-\frac{\partial G}{\partial u}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2=0$$

Al agrupar términos, se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}-\frac{\partial G}{\partial \tau}\right)\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2$$

$$+\frac{\partial G}{\partial u}\underbrace{\left(-\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)^2+r\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)-\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\right)}_{\substack{\| \\ 0}}=0$$

Por lo tanto, la función G satisface la ecuación de calor

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \tag{61}$$

Observe ahora que si $t = T$, entonces $\tau = 0$, por lo que

$$u=\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)$$

En consecuencia,

$$S_t = K\exp\left\{\frac{\tfrac{1}{2}\sigma^2 u}{r-\tfrac{1}{2}\sigma^2}\right\}$$

De esta manera la condición final de la ecuación de calor está dada por

$$G_0(u) \equiv G(u,0) = K \max\left(\exp\left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 u}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} - 1, 0 \right). \tag{62}$$

En particular, si $u < 0$, se tiene que $G_0(u) = 0$. En conclusión, la ecuación de calor asociada al precio de la opción y su condición de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \quad -\infty < u < \infty, \quad \tau > 0 \\ G(u,0) &= G_0(u), \quad -\infty < u < \infty. \end{aligned} \tag{63}$$

La solución de la ecuación de calor está dada por

$$\begin{aligned} G(u,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s) e^{-\frac{1}{2}\left((s-u)/\sqrt{2\tau}\right)^2} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_s}^{\infty} K \left(\exp\left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 s}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} - 1 \right) e^{-\frac{1}{2}\left((s-u)/\sqrt{2\tau}\right)^2} \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{64}$$

donde

$$\Lambda_s = \left\{ s \;\middle|\; \exp\left\{ \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 s}{r - \frac{1}{2}\sigma^2} \right\} > 1 \right\}$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable: $q = \dfrac{s-u}{\sqrt{2\tau}}$.

De esta manera $s = u + q\sqrt{2\tau}$ y $\mathrm{d}s = \sqrt{2\tau}\,\mathrm{d}q$.

En consecuencia

$$G(u,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K\left(e^{\frac{1}{2}\sigma^2\left(u+q\sqrt{2\tau}\right)/\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}q^2} \sqrt{2\tau}\,\mathrm{d}q,$$

donde

$$\Lambda_q = \left\{ q \,\middle|\, q > -u/\sqrt{2\tau} \right\}$$

Por lo tanto,

$$G(u,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{\frac{1}{2}\sigma^2\left(u+q\sqrt{2\tau}\right)/\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)} e^{-\frac{1}{2}q^2}\, dq - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2}\, dq \qquad (65)$$

$$= L_1 - L_2 .$$

Observe ahora que

$$-u/\sqrt{2\tau} = -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sqrt{2\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 (T-t)}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\frac{2}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{T-t}}\right)$$

$$= -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Lambda_q &= \left\{ q \,\middle|\, q > -u/\sqrt{2\tau} \right\} \\ &= \left\{ q \,\middle|\, q > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ q \,\middle|\, -\infty < q < -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}\end{aligned} \tag{66}$$

De esta manera, la primera integral en (65) satisface

$$L_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_q}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2}q^2} \mathrm{d}q = K\Phi(d_2) \tag{67}$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}q^2} \mathrm{d}q$$

es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar. Para calcular la segunda integral que aparece en la ecuación (65), considere el argumento de la exponencial en el integrando, esto es

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2\left(u+q\sqrt{2\tau}\right)/\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)=\frac{\tfrac{1}{2}\sigma^2}{\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)}\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\ \right)+q\sqrt{2\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}\ \right]$$

$$=\frac{\tfrac{1}{2}\sigma^2}{\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)}\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+q\sigma\sqrt{T-t}\ \right)\right]$$

$$=\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,q$$

Por lo que

$$\begin{aligned}L_2&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty}Ke^{\ln(S_t/K)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,q}e^{-\frac{1}{2}q^2}\,\mathrm{d}q\\&=e^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty}S_te^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}\,q}e^{-\frac{1}{2}q^2}\,\mathrm{d}q\\&=S_te^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}q^2-2\sigma\sqrt{T-t}\,q+\sigma^2(T-t)}\mathrm{d}q\\&=S_te^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(q-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}\mathrm{d}q\end{aligned}\tag{68}$$

Considere ahora el siguiente cambio de variable $z=q-\sigma\sqrt{T-t}$, así $\mathrm{d}z=\mathrm{d}q$ y

$$\begin{aligned}L_2&=S_te^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_q}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(q-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}\mathrm{d}q\\&=S_te^{r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\Lambda_z}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\end{aligned}\tag{69}$$

Observe ahora que

$$q > -u / \sqrt{2\tau}$$

implica

$$z > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Lambda_z &= \left\{ z \,\middle|\, z > -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\} \\ &= \left\{ z \,\middle|\, -\infty < z < \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right\}. \end{aligned} \tag{70}$$

De esta manera, se concluye que

$$\begin{aligned} L_2 &= S_t e^{r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Lambda_z}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1), \end{aligned} \tag{71}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Evidentemente, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ De las ecuaciones (64), (67) y (71) se tiene que

$$G(u,\tau) = L_1 - L_2 = S_t e^{r(T-t)} \Phi(d_1) - K\Phi(d_2) \cdot \tag{72}$$

Finalmente, la ecuación (60) produce

$$
\begin{aligned}
c(S_t,t) &= B(t,T)G(u(S_t,\tau),\tau) \\
&= e^{-r(T-t)}\left(S_t e^{r(T-t)}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)\right) \qquad (73) \\
&= S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),
\end{aligned}
$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Observe que el valor de la opción es independiente del rendimiento esperado de la acción μ. En la ecuación (73) se puede observar que si el precio de la acción aumenta, mayor será el precio de la opción. Asimismo, un incremento en el periodo de maduración, $T-t$, o en la tasa de interés libre de riesgo, r, o bien en la varianza, σ^2, dará lugar a un incremento en el valor de la opción.

12.1 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN BLACK Y SCHOLES MEDIANTE EL CAPM

A continuación se obtiene la ecuación Black y Scholes (73) utilizando el CAPM. El modelo CAPM describe la relación entre el riesgo y el rendimiento esperado de un activo bajo condiciones de equilibrio de mercado.

Suponga, como antes, que la dinámica del precio del activo subyacente está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad dW_t \sim N(0, dt), \tag{74}$$

de esta manera, el rendimiento del activo es

$$dR_S = \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{75}$$

Para calcular el cambio en el precio de la opción por modificaciones en S_t se utiliza la expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden:

$$\begin{aligned} dc &= \frac{\partial c}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial c}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \, dt \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \right) dt + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \, dW. \end{aligned} \tag{76}$$

El rendimiento de la opción está dado por

$$dR_c = \frac{dc}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{dS_t}{S_t}\frac{S_t}{c} = \frac{\partial c}{\partial S_t} dR_S \frac{S_t}{c} \tag{77}$$

De acuerdo con el modelo CAPM, los rendimientos de la opción y del activo subyacente satisfacen, respectivamente, las siguientes relaciones lineales con respecto del rendimiento del mercado, dR_M,

$$E[dR_c] - r dt = \beta_c \left[E[dR_M] - r dt\right] \tag{78}$$

y

$$E[dR_S] - r dt = \beta_c \left[E[dR_M] - r dt\right], \tag{79}$$

donde

$$\beta_S = \frac{Cov(\mathrm{d}R_S, \mathrm{d}R_M)}{Var(\mathrm{d}R_M)} \tag{80}$$

y

$$\begin{aligned}\beta_c &= \frac{Cov(\mathrm{d}R_c, \mathrm{d}R_M)}{Var(\mathrm{d}R_M)} \\ &= \frac{Cov\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}R_S\frac{S_t}{c}, \mathrm{d}R_M\right)}{Var(dR_M)} \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\frac{Cov(\mathrm{d}R_S, \mathrm{d}R_M)}{Var(R_M)} \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S .\end{aligned} \tag{81}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (81) y (79) en (78), se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{d}c}{c}\right] - r\mathrm{d}t &= \beta_c\,(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_M]\text{-}r\mathrm{d}t) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S\,(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_M]\text{-}r\mathrm{d}t) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\beta_S\,(\frac{1}{\beta_S}\,\mathrm{E}[\mathrm{d}R_S]\text{-}r\mathrm{d}t) \\ &= \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{S_t}{c}\,(\mathrm{E}[\mathrm{d}R_S]\text{-}r\mathrm{d}t),\end{aligned} \tag{82}$$

lo cual implica que

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{d}c\right]-rc\mathrm{d}t=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\,(\mathrm{E}[R_S]\text{-}r\mathrm{d}t). \tag{83}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (75) y (81) en la ecuación (83), se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\mathrm{d}c\right]-rc\mathrm{d}t&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t\,(\mathrm{E}[R_S]-r\mathrm{d}t)\\&=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t(\mu-r)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{84}$$

donde se ha considerado que $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t]=0$. Finalmente, si se sustituye la ecuación (76) en la ecuación (84) se tiene

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t+\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t+\frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W\right]-rc\mathrm{d}t=\frac{\partial c}{\partial S_t}S_t(\mu-r)\mathrm{d}t \tag{85}$$

equivalentemente

$$\frac{\partial c}{\partial S_t}+rS_t\frac{\partial c}{\partial S_t}+\tfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}-rc=0$$

13. EL MODELO DE ROBERT MERTON

En 1973, Robert Merton publica el artículo "Theory of Rational Option Pricing" en el *Bell Journal of Economics and Management Science*. En esta investigación se obtienen resultados similares a los de Black y Scholes, y varias extensiones, entre las que destacan: tasas de interés estocásticas, pago continuo de dividendos, un análisis de opciones americanas, generalización de la fórmula de Samuelson para opciones perpetuas y la valuación de opciones con barreras. Varios de los supuestos de Black y Scholes se mantienen en el trabajo de Merton. Una diferencia esencial es que en el modelo de Merton no se supone una tasa de interés constante y libre de riesgo, sino un bono cupón cero cuyos rendimientos son gobernados por un proceso de Gauss-Wiener, lo cual genera una estructura de plazos para la tasa de interés.

Se supone que el precio del subyacente, S_t, es conducido por el movimiento geométrico Browniano

$$\mathrm{d}S_t = \alpha S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}Wt, \quad \mathrm{d}W_t \sim N(0,\mathrm{d}t), \tag{86}$$

donde $\alpha \in \mathrm{IR}$ es el rendimiento medio de la acción, el cual puede ser una variable aleatoria; y. $\sigma > 0$ es la volatilidad instantánea, la cual puede ser una función determinista conocida de t. Asimismo, se supone la existencia de un bono cupón cero cuyo precio al tiempo t, $B_t = B(t, T)$, es conducido también por un movimiento geométrico Browniano de la forma

$$\mathrm{d}B_t = \lambda(t,T)B_t\mathrm{d}t + \delta(t,T)B_t\mathrm{d}V_t \qquad B(T,T) = 1, \quad \mathrm{d}V_t \sim N(0,\mathrm{d}t). \tag{87}$$

Se supone que los procesos $\mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{d}V_t$ se encuentran correlacionados entre sí, de tal manera que

$$Cov(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho \mathrm{d}t. \tag{88}$$

En particular, si $\lambda(t, T) \equiv r$ y $\delta(t, T) \equiv 0$, el precio del bono es

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}. \tag{89}$$

Se supone que todos los agentes que participan en el mercado aceptan los valores de λ y δ. Sobre los parámetros de preferencias de los agentes, α y λ, no se hace supuesto alguno. Por lo anterior, el precio de la opción es función del activo subyacente, del precio del bono cupón cero, del tiempo en que se inicia el contrato, del tiempo de vencimiento y del precio de ejercicio. Concretamente, el precio de la opción satisface $c = c(S_t, B_t, t; T, K)$. El cambio marginal en el precio de la opción, dc, durante el instante dt, se puede expresar a través de una expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden, esto es,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c = {} & \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial c}{\partial B_t} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2}(\mathrm{d}B_t)^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right. \\ & \left. + 2\left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\,\partial t}(\mathrm{d}S_t)(\mathrm{d}t) + \frac{\partial^2 c}{\partial B_t\,\partial t}(\mathrm{d}B_t)(\mathrm{d}t)\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\,\partial B_t}(\mathrm{d}S_t)(\mathrm{d}B_t)\right)\right]. \end{aligned} \tag{90}$$

La sustitución de (86)-(88) en la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c = {} & \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\alpha S_t + \frac{\partial c}{\partial B_t}\lambda B_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2}\delta^2 B_t^2 + \rho\sigma\delta S_t B_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t\, B_t}\right)\mathrm{d}t \\ & + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t\,\mathrm{d}W_t + \frac{\partial c}{\partial B_t}\delta B_t\,\mathrm{d}V_t. \end{aligned} \tag{91}$$

Esta última ecuación se puede rescribir como $\mathrm{d}c = A_1 c\mathrm{d}t + A_2 c\mathrm{d}W_t + A_3 c\mathrm{d}V_t$, donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\alpha S_t + \frac{\partial c}{\partial B_t}\lambda B_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2}\delta^2 B_t^2 + \rho\sigma\delta S_t B_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t\, B_t}\right) \\ A_2 &= \frac{\sigma S_t}{c}\frac{\partial c}{\partial S_t} \\ A_3 &= \frac{\delta B_t}{c}\frac{\partial c}{\partial B_t}. \end{aligned} \tag{92}$$

Considere ahora un portafolio formado por acciones, opciones sobre dichas acciones y bonos. Si w_1 es el número de acciones, w_2 el número de opciones, y w_3 el número de bonos en el portafolio, entonces la inversión total está dada por

$$\Pi_t = w_1 S_t + w_2 c + w_3 B. \tag{93}$$

El rendimiento del portafolio satisface

$$\begin{aligned} \mathrm{d}R_t &= \frac{\mathrm{d}\Pi_t}{\Pi_t} = \left(\frac{w_1 S_t}{\Pi_t}\right)\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} + \left(\frac{w_2 c}{\Pi_t}\right)\frac{\mathrm{d}c}{c} + \left(\frac{w_3 B_t}{\Pi_t}\right)\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} \\ &= \beta_1 \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} + \beta_2 \frac{\mathrm{d}c}{c} + \beta_3 \frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} \end{aligned} \tag{94}$$

donde

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

es decir, la inversión agregada es cero. Si se sustituyen (86), (87) y (91) en (94), se sigue que

$$\mathrm{d}R_t = (\beta_1(\alpha \mathrm{d}t - \sigma \mathrm{d}W_t) + \beta_2(A_1 \mathrm{d}t - A_2 \mathrm{d}W_t + A_3 \mathrm{d}V_t) + \beta_3(\lambda \mathrm{d}t + \delta \mathrm{d}V_t). \tag{95}$$

En virtud de que $\beta_3 = -(\beta_1 + \beta_2)$, se tiene que (95) se transforma en

$$\mathrm{d}R_t = (\beta_1(\alpha - \lambda) + \beta_2(A_1 - \lambda))\mathrm{d}t + (\beta_1\sigma + \beta_2 A_2)\mathrm{d}W_t + (\beta_2 A_3 - (\beta_1 + \beta_2)\delta)\mathrm{d}V_t. \tag{96}$$

A continuación se eligen β_1 y β_2 de tal manera que los coeficientes de $\mathrm{d}W_t$ y de $\mathrm{d}V_t$ se anulen, es decir,

$$\beta_1\sigma + \beta_2 A_2 = 0 \tag{97}$$

y

$$-\beta_1\delta+(A_3-\delta)\beta_2=0. \tag{98}$$

Asimismo, si se supone que los mercados están en equilibrio y la inversión agregada es cero, entonces el coeficiente de dt (96) también es cero, ya que, en caso contrario se estarían generando oportunidades de arbitraje libres de riesgo. Así,

$$\beta_1(\alpha-\lambda)+\beta_2(A_1-\lambda)=0. \tag{99}$$

Las condiciones (97)-(99) se pueden expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & A_1-\lambda \\ \sigma & A_2 \\ -\delta_1 & A_3-\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una solución no trivial del sistema anterior, $\beta_1\neq 0$, $\beta_2\neq 0$, existe si y sólo si al menos dos renglones de la matriz anterior son linealmente dependientes, es decir, si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{A_2}{\sigma}=\frac{A_3-\delta}{-\delta}=\frac{A_1-\lambda}{\alpha-\lambda} \tag{100}$$

La primera igualdad de (100)

$$\frac{A_2}{\sigma}=1-\frac{A_3}{\delta} \tag{101}$$

implica

$$\frac{S_t}{c}\frac{\partial c}{\partial S_t} = 1 - \frac{B_t}{c}\frac{\partial c}{\partial B_t}, \qquad (102)$$

equivalentemente

$$c = S_t\frac{\partial c}{\partial S_t} + B_t\frac{\partial c}{\partial B_t},$$

es decir, c homogénea de grado uno en S_t y B_t. Considere ahora la segunda igualdad de (100). $\frac{A_2}{\sigma} = \frac{A_1 - \lambda}{\alpha - \lambda}$

Esta ecuación conduce a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2}\delta^2 B_t^2 + \rho\sigma\delta S_t B_t\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\, B_t} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0. \qquad (103)$$

Considere ahora el cambio de variable $X_t = S_t/KB_t$. En este caso, B_t actúa como un numerario. El cambio en X_t está dado por:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= \frac{1}{K}\mathrm{d}\left(\frac{S_t}{B_t}\right) = \frac{1}{K}\left[S_t\mathrm{d}\left(\frac{1}{B_t}\right) + \frac{1}{B_t}\mathrm{d}S_t - (\mathrm{d}S_t)\mathrm{d}\left(\frac{1}{B_t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{K}\left[S_t\left(-\frac{1}{B_t^2}\lambda B_t + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{B_t^3}\right)\delta^2 B_t^2\right)\mathrm{d}t - S_t\left(\frac{1}{B_t^2}\right)\lambda B_t V_t\right] \\
&\quad + \frac{1}{B_t}(\alpha S_t\mathrm{d}t + \alpha S_t\mathrm{d}W_t) - \frac{S_t}{B_t}\rho\sigma\delta,
\end{aligned} \qquad (104)$$

lo cual implica que

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = (\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho\sigma\delta)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t + \delta\mathrm{d}V_t. \qquad (105)$$

Observe que la esperanza del cambio porcentual $\mathrm{d}X_t / X_t$ está dada por

$$E\left[\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t}\right] = (\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho\sigma\delta)\mathrm{d}t_t,$$

ya que $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{E}[\mathrm{d}V_t] = 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\gamma^2 :&= Var\left[\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t}\right] = Var((\alpha - \lambda + \delta^2 - \rho\sigma\delta)\mathrm{d}t_t + \sigma\mathrm{d}W_t + \delta\mathrm{d}V_t)\\ &= Var(\sigma\mathrm{d}W_t - \delta\mathrm{d}V_t)\\ &= \sigma^2 Var(\mathrm{d}W_t) + \delta^2 Var(\mathrm{d}V_t) - 2\sigma\delta Cov(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t)\\ &= (\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{106}$$

Sea $h(X_t, t) = c / KB_t$. De esta manera, $c = h(X_t, t)KB_t$. Si se calculan las derivadas parciales de c, tomando en cuenta que $X_t = S_t / KB_t$, se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} = KB_t \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial c}{\partial X_t}\frac{\partial X_t}{\partial S_t}\\ &= \frac{\partial h}{\partial X_t},\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} &= \frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\\ &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2}\right)\frac{1}{KB_t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial B_t} &= \frac{\partial c}{\partial X_t}\frac{\partial X_t}{\partial B_t}\\ &= -KX_t\frac{\partial h}{\partial X_t},\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial^2 c}{\partial B_t^2} &= \frac{\partial}{\partial B_t}\left(\frac{\partial c}{\partial B_t}\right)\\ &= \frac{K}{B_t}X_t^2\frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial B_t} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left(\frac{\partial c}{\partial B_t}\right)$$
$$= -\frac{1}{B_t} X_t \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2}.$$

Si se sustituyen las derivadas parciales anteriores en la ecuación (106), se tiene que

$$\frac{1}{2}(\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta) X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \qquad (107)$$

Si se considera (106), la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{1}{2}\gamma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Si se utiliza ahora el cambio de variable $\tau = T - t$, $h(X_t, t) = H(X_t, \tau)$, entonces

$$\frac{1}{2}\gamma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2} = \frac{\partial H}{\partial \tau}. \qquad (108)$$

Se establece otro cambio de variable más, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\int_t^{t+\tau} \gamma^2(y)dy$, y se define

$$v(X_t, \tilde{\sigma}^2) = H(X_t, \tau). \qquad (109)$$

En este caso,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial X_t^2} = \frac{\partial H^2}{\partial X_t^2} \qquad y \qquad \frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2}\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{\partial H}{\partial \tau}.$$

Por lo tanto, la ecuación (108) se transforma en

$$X_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X_t^2} = \frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2}. \tag{110}$$

Por último, se define

$$\varphi(u, \tilde{\sigma}^2) = {v(X_t, \tilde{\sigma}^2)}\Big/{X_t}, \tag{111}$$

donde

$$u = \ln(X_t) + \tilde{\sigma}^2. \tag{112}$$

En este caso, $v(X_t, \tilde{\sigma}^2) = \varphi(u, \tilde{\sigma}^2)X_t$ y

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_t^2} = \frac{1}{X_t}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$$

y

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{\sigma}^2} = X_t\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\sigma}^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right).$$

La sustitución de las derivadas parciales anteriores en (110) conduce a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{\sigma}^2}. \tag{113}$$

Observe ahora que

$$
\begin{aligned}
c(S_t, B_t, t) &= KB_t h(X_t, t) \\
&= KB_t H(X_t, \tau) \\
&= KB_t v(X_t, \tilde{\sigma}^2) \\
&= KB_t \varphi(\ln(X_t) + \tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2) X_t.
\end{aligned}
$$

Si se invierten todos los cambios en las variables, se sigue que

$$
c(S_t, B_t, t) = S_t \varphi\left(\ln\left(\frac{S_t}{KB_t}\right) + \frac{1}{2}\int_t^T \gamma^2(y)\mathrm{d}y, \frac{1}{2}\int_t^T \gamma^2(y)\mathrm{d}y \right).
$$

De lo anterior, se tiene que $\max(S_t\text{-}K, 0) = Kh(X_t, 0)$ ó $\max(KX_t\text{-}K, 0) = Kh(X_t, 0)$, de lo cual se obtiene la condición inicial que satisface h, $h(X_t, 0) = \max(X_t\text{-}1, 0)$. Asimismo, $\max(S_t\text{-}K, 0) = S_t\varphi(u, 0)$, lo cual implica $\max(1\text{-}(K/S_t), 0) = \varphi(u, 0)$, así $\varphi(u, 0) = \max(1 - e^{-u}, 0)$, lo cual es la condición final que debe satisfacer φ. La solución de (113) con $\varphi(u, 0) = \max(1 - e^{-u}, 0)$ satisface

$$
\varphi(u, \tilde{\sigma}^2) = \Phi(g_1) + e^{\tilde{\sigma}^2 - u}\Phi(g_1),
$$

donde $g_1 = \dfrac{u}{\sqrt{2\tilde{\sigma}^2}}$, $\quad g_2 = \dfrac{u - 2\tilde{\sigma}^2}{\sqrt{2\tilde{\sigma}^2}}$ y

$$
\Phi(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{T-t} e^{y^2/2}\mathrm{d}y
$$

Es decir,

$$
c(S_t, B_t, t) = S_t\Phi(g_1) - KB_t\Phi(d_2),
$$

donde

$$g_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_t}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}}$$

$$g_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{KB_t}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(T-t)}{\tilde{\sigma}\sqrt{(T-t)}}$$

y

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t}\int^{T}\left(\sigma^2 + \delta^2 - 2\rho\sigma\delta\right)du$$

o, destacando la dependencia de t y T,

$$\tilde{\sigma}^2(t,T) = \frac{1}{T-t}\int^{T}\left[\sigma^2(u,T) + \delta^2(u,T) - 2\rho(u,T)\sigma(u,T)\delta(u,T)\right]du$$

Esta fórmula es más general que la de Black-Scholes debido a la dinámica estocástica del bono cupón cero. En particular, si $\lambda \equiv r$ y $\delta \equiv 0$, se tiene que $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$, $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2$ y

$$c(S_t, B_t, t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{r(T-t)}\Phi(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

14. CONCLUSIONES

Se han revisado y discutido, en detalle, los trabajos de Louis Bachelier, Paul Samuelson, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton sobre valuación de activos y sus derivados en tiempo continuo y en un ambiente estocástico. Asimismo, se examinaron relaciones existentes entre dichos trabajos y las investigaciones de muchos científicos prominentes. También, se llevó a cabo una investigación sobre la evolución de las ideas y formulaciones de los modelos de Bachelier, Samuelson, Black, Scholes y Merton, según el contexto histórico y social en que se desarrollaron dichos modelos. Es importante destacar la coincidencia de Samuelson, Scholes y Merton en el MIT a finales de la década de los sesentas; de otra manera las ideas sobre decisiones óptimas en tiempo continuo y ambientes con incertidumbre no hubieran madurado tan rápido. Por último, se realizó un análisis comparativo entre dichos modelos que permitiera señalar sus limitaciones y ventajas.

Vale la pena señalar que las contribuciones de Robert Merton exceden por mucho a las de Fischer Black y Myron Scholes en calidad y cantidad. El trabajo que Merton realizó en 1973, publicado al mismo tiempo que el de Black y Scholes, no considera una tasa de interés constante y libre de riesgo, sino un bono cupón cero cuyos rendimientos son gobernados por un proceso de Gauss-Wiener, lo cual genera una estructura de plazos para la tasa de interés. Así, el procedimiento de Merton es el parte aguas en el análisis de tasas de interés, anticipándose al reconocido trabajo de Vasicek (1977). Asimismo, Merton lleva a cabo la primera evaluación de opciones con barrera. El trabajo que posteriormente realizara en una gran cantidad de artículos, proporcionó muchas y muy diversas aportaciones a las matemáticas, la economía y las finanzas.

Sin duda, en el interior de muchos existe un Bachelier que vive en el anonimato y que siente una gran pasión por las matemáticas, las finanzas o la economía (o por todas ellas). No obstante, en la mayoría de los casos, falta un valor esencial, la convicción de Bachelier.

BIBLIOGRAFÍA

Bachelier, L. (1900), *Théorie de la Speculation, Th'esis de Docteur és Sciences Mathématiques*, Université Paris Sorbonne, Gauthier-Villars, Paris.

Bachelier, L. (1964), *Theory of Speculation.* Translation of the French edition, P. H. Cootner editor, in The Random Character of Stock Market Prices, Cambridge, the MIT Press, pp. 17-78.

Black, F., and M. Scholes, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", the *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

Einstein, A. (1956). *Investigations on the theory of the Brownian Movement.* Translated by A. D. Cowper, Dover Publicactions, Inc. pp. 12-18.

Merton, R. C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing", *Journal of Economic and Management Sciences*. Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

Samuelson, P. A. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices", *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2, pp.13-39.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, No. 2, pp. 177-188.