UNA INTRODUCCIÓN A LOS PROCESOS DE LÉVY Y SU APLICACIÓN A LA VALUACIÓN DE OPCIONES

Francisco Venegas-Martínez*

RESUMEN

La presente investigación intenta proporcionar una introducción asequible sobre los procesos de Lévy y se concentra, principalmente, en la valuación de productos derivados cuando el precio del activo subyacente es conducido por dichos procesos. Asimismo, se discuten varios resultados analíticos de la función característica de una distribución infinitamente divisible, los cuales son muy útiles en la valuación de opciones financieras en ambientes no Gaussianos. A diferencia de la metodología de valuación de Black-Scholes, que utiliza funciones de densidad, en este caso la valuación se lleva a cabo mediante el uso de funciones características. Por último, se proporcionan fórmulas explícitas de valuación de opciones sobre subyacentes guiados por procesos regulares de Lévy.

Clasificación JEL: G13

Palabras clave: Productos derivados

---

* El autor agradece los comentarios y sugerencias de los dictaminadores anónimos, los cuales mejoraron sustancialmente el presente artículo.

Profesor Investigador de la Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI III). Correo electrónico: <fvenegas@ipn.mx>.

ABSTRACT

This paper intends to provide a friendly introduction to Lévy processes and mainly focuses on valuing contingent claims when the price of the underlying asset is driven by such processes. Moreover, several analytical results on the characteristic function of an infinitely divisible distribution are discussed, which are very useful in pricing financial options living out of the Gaussian world. In contrast with the Black-Scholes pricing methodology that uses density functions, this approach uses characteristic functions. Finally, explicit formulas for valuing options on assets following Lévy regular processes are provided.
JEL classification: G13
Keywords: Contingent claims

1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de Lévy se aplican en muchas y muy diversas áreas de las ciencias naturales y sociales. Por ejemplo, en biología se utilizan para modelar el movimiento de poblaciones de animales y su dispersión; en física se emplean para modelar la dinámica de sistemas continuos de partículas, en especial, bosones y fermiones; en actuaría se utilizan para modelar el comportamiento de un activo ligado a un producto de reaseguramiento; y en finanzas se utilizan para modelar la dinámica de precios de activos subyacentes. El presente trabajo se concentra en la valuación de opciones financieras en mercados no Gaussianos.

El tamaño considerable que han alcanzado los mercados de opciones financieras se debe, en gran medida, a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar o salir rápidamente del mercado. Estos instrumentos presentan un alto grado de liquidez, es decir, un vendedor casi siempre encuentra un comprador y viceversa, así como un alto nivel de apalancamiento, esto es, la inversión inicial es pequeña comparada con la de otros instrumentos disponibles en el mercado.

Los derivados financieros permiten a los agentes económicos administrar el riesgo de mercado con costos bajos de transacción. Además, el riesgo crédito de estos instrumentos es mínimo debido a la asociación de la bolsa de futuros con una cámara de compensación y liquidación, la cual, a cambio de una comisión, actúa como contraparte de todas las partes y administra el riesgo de incumplimiento de las obligaciones generadas en los contratos.

Lo normal en la práctica es que los rendimientos de los diferentes activos disponibles en la economía no sigan una distribución normal. En este sentido, los procesos de Lévy producen mejores resultados en el modelado del comportamiento de dichos rendimientos. Por lo tanto, una valuación más realista de diversos instrumentos financieros derivados requiere que el precio del activo subyacente sea conducido por un proceso de Lévy. A continuación se proporcionan varias fórmulas explícitas de la prima de opciones de compra y venta sobre subyacentes guiados por procesos regulares de Lévy, lo cual sin duda será un referente de gran utilidad para la valuación diaria que realizan los intermediarios financieros en sus portafolios y coberturas.

La presente investigación está organizada de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce el lema de Itô y la noción de ecuación diferencial estocástica; en la sección 3 se lleva a cabo el planteamiento de evaluación de una opción financiera; en el transcurso de la sección 4 se introduce la noción de función característica y se estudian varias de sus propiedades; a través de la sección 5 se determinan explícitamente las funciones características de algunas distribuciones útiles en el estudio de las matemáticas financieras; en las secciones 6 y 7 se estudia el concepto de transformada inversa de Fourier, el cual es útil en la determinación de las funciones de distribución acumulada y de densidad asociadas a una variable aleatoria; en las secciones 8 y 9 se discute la fórmula de Lévy-Khinchin para funciones características de distribuciones infinitamente divisibles; en la sección 10 se presentan varios ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles y sus ternas características de Lévy; en el transcurso de la sección 11 se plantea el problema de valuación de opciones europeas de compra cuando el precio del subyacente sigue un proceso de Lévy; en las secciones 12 y 13 se introducen los procesos regulares de Lévy y el papel que desempeñan en el proceso de valuación de activos contingentes; en la sección 14 se generaliza la fórmula de valuación de opciones de Merton-Black-Scholes para procesos regulares de Lévy; por último, en la sección 15 se presentan las conclusiones, así como las limitaciones y sugerencias para futuras investigaciones. Un apéndice contiene detalles sobre las ecuaciones de Cauchy-Riemann, el teorema de Cauchy y el teorema del residuo.

2. LEMA DE ITÔ Y ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS (AMBIENTES GAUSSIANOS)

Un movimiento Browniano estándar (de dimensión 1) es un proceso W_t, definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \Phi, \mathsf{P})$, que satisface:

1) $W_0 = 0$ con probabilidad uno;
2) W_t es una función continua en t;
3) Si $0 \leq t_0 < \ldots < t_n$, los incrementos $W_t - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son variables aleatorias independientes;
4) Si $0 < s < t$, los incrementos $W_t - W_s$ son normalmente distribuidos con media cero y varianza $t - s$.

En el marco de la definición anterior, la integral estocástica, o integral de Itô,

$$V_t = \int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s,$$

es el proceso estocástico tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(W_t - W_{t_{i-1}}) - V_t\right]^2 = 0,$$

donde $(W_s)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar y $0 = t_0 < t_1 < t_2 < .... < t_n = t$ es una partición del intervalo $[0, t]$, tal que $0 = t_i - t_{i-1} = t/n$, $i = 1,2,..., n$. Observe que la convergencia es en media cuadrática. Es sumamente importante enfatizar que el integrando, $f(s)$, el cual puede ser determinista o estocástico, está evaluado en el extremo izquierdo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Esta elección es natural en finanzas ya que, con ello se asegura que el futuro no interviene en las acciones presentes. Un ejemplo típico de la función f es $f(s) = g(W_s)$. Observe que, en el caso de la integral de Riemann-Stieltjes, se obtiene el mismo valor para la integral cuando se toma cualquier punto extremo del intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, incluso cualquier punto intermedio. Sin embargo, en el caso de la integral estocástica, los resultados pueden cambiar según se utiliza $f(t_{i-1})$ ó $f(t_i)$. La definición de integral estocástica requiere que la función $f(s)$ se valúe siempre en t_{i-1}. Cuando $f(s) = g(W_s)$, se supondrá que el valor de $f(s)$ depende sólo de los valores pasados de $W_u, u \leq s$. En este caso se dice que f es predecible. Asimismo, se supondrá que

$$\int_0^t f(s)^2 \mathrm{d}s < \infty \text{ casi donde quiera}$$

y

$$\int_0^t \mathrm{E}\left[f^2(s)\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

La condición sobre la primera integral garantiza que la integral de Itô, $\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s$, esté bien definida, y la condición sobre la segunda integral asegura que la varianza de $\int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s$ se mantenga finita. Evidentemente, si $f(s)$ es determinista, las dos condiciones anteriores coinciden.

A continuación se presenta un resultado básico del cálculo estocástico, el llamado lema de Itô sobre cambio de variable. Sea

$$X_t := x_0 + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s$$

con $X_0 = x_0$, donde $\mu_s = \mu(X_s, s)$ y $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$. Suponga que $\int_0^t |\mu_s| \mathrm{d}s$ es definida como una integral ordinaria casi dondequiera y $\int_0^t \mathrm{E}\left[\sigma_s^2\right] \mathrm{d}s < \infty$ de tal manera que la integral estocástica, $\int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s$, tenga varianza finita. Es usual y conveniente expresar dicha ecuación en la forma de una ecuación diferencial estocástica, es decir,

$$\mathrm{d}X_t = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t, \qquad X_0 = x_0,$$

teniendo siempre en mente que el objeto de estudio del cálculo estocástico es la integral estocástica. Considere ahora una función $f = f(X_t, t)$ con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\begin{aligned} f(X_t, t) &= f(x_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s} \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_s} \sigma_s^2 \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s \mathrm{d}W_s \\ &= f(x_0, 0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial X_s} \mu_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_s} \sigma_s^2 \right) \mathrm{d}s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X_s} \sigma_s \mathrm{d}W_s, \end{aligned}$$

lo cual se puede expresar, brevemente, en términos de una ecuación diferencial estocástica como

$$\mathrm{d}f(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X_t} \mu_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^2}{\partial X_t} \sigma_t^2 \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial X_t} \sigma_t \mathrm{d}W_t.$$

Por último, se enfatiza que una ecuación diferencial estocástica representa solamente una notación simplificada de una integral estocástica.

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE VALUACIÓN EN EL MUNDO GAUSSIANO

Considere un proceso de Wiener $\{W_t\}_{t\in[0,T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con una filtración $(\Omega,\Phi,\{\Phi_t^W\}_{t\in[0,T]},\mathsf{P})$. Se supone que el precio del subyacente al tiempo t, S_t, es guiado por el movimiento geométrico Browniano, en un ambiente neutral al riesgo, a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}W_t. \tag{1}$$

Si $f_{S_T|S_t}(s|S_t)$ es la función de densidad de S_T, condicional a S_t, y

$$c(S_t,t) = E\left\{e^{-r(T-t)}\max\left(S_T - k,0\right)|\Phi_t\right\} \tag{2}$$

es el precio de una opción europea de compra, entonces (2) se transforma en

$$\begin{aligned} c(S_t,t) &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\max\left(s-K,0\right)f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^{\infty}\left(s-K,0\right)f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^{\infty}sf_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s - Ke^{-r(T-t)}\int_{\{s>K\}}f_{S_T|S_t}(s|S_t)\mathrm{d}s \\ &= e^{-r(T-t)}E\left[S_T 1_{\{S_T>K\}}|S_t\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathsf{P}\left\{S_T > K|S_t\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

El primer término representa el valor presente del valor esperado del subyacente cuando la opción está dentro del dinero y, el segundo, el valor presente del precio de ejercicio por la probabilidad de que la opción esté dentro del dinero. Si S_t satisface (1), una simple aplicación del lema de Itô conduce a

$$\mathrm{dln}\,(S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t,$$

lo que, a su vez, implica (4)

$$S_T = S_t e^{\sigma(W_T - W_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \tag{5}$$

Esta expresión lleva a dos hechos importantes. En primer lugar, el proceso $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\{\Phi_t\}_{t\geq 0}$, ya que (5) es invertible, en el sentido que es posible despejar W_t en dicha ecuación. Por lo tanto,

$$\Phi_t^w = \sigma(W_s|s \leq t) = \sigma(S_s|s \leq t) = \Phi_t^s.$$

En segundo lugar, la función de densidad de S_T, condicional a S_t, está dada por:

$$f_{S_T|S_t}(s|S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)^2\right\}. \tag{6}$$

Después de sustituir (6) en (3) se tiene que

$$c(S_t, t) = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{7}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{8}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

y

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Como puede observarse en la ecuación (8), las cantidades d_1 y d_2 se encuentran relacionadas entre sí. Por último, se menciona que en Venegas-Martínez (2005) se generalizan las fórmulas anteriores cuando σ es vista como una variable aleatoria, en cuyo caso se utiliza el principio de máxima entropía e inferencia Bayesiana.

4. FUNCIONES CARACTERÍSTICAS Y SUS PROPIEDADES

Las funciones características han sido herramientas muy útiles en el desarrollo de la teoría de probabilidad, sobre todo en lo que respecta al estudio de teoremas límite. En esta sección se presenta la definición de función característica de una variable aleatoria y se discuten algunas de sus principales propiedades.

La función característica , $\varphi_X(u)$, $u \in \mathrm{IR}$ de una variable aleatoria, X, se define como el valor esperado de e^{iuX}, donde $i = \sqrt{-1}$. Es decir,

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &\stackrel{def}{=} E\left[e^{iuX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \mathrm{d}F_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ux)\, \mathrm{d}F_X(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} sen(ux)\, \mathrm{d}F_X(x), \end{aligned} \tag{9}$$

donde $F_X(x)$ es la función de distribución acumulada de X. La integral se interpreta en el sentido de Riemann-Stieltjes. En caso de que $F_X(x)$ sea absolutamente continua con densidad $F_X'(x) = f_X(x)$, entonces (9) se transforma en

$$\varphi_X(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_X(x)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Es decir, $\varphi_X(u)$ es la transformada de Fourier de la función de densidad, $f_X(x)$. La primera propiedad relevante de $\varphi_X(u)$ es que ésta siempre existe y $|\varphi_X(u)| \leq 1$ con igualdad en $u = 0$. En efecto, observe primero que el módulo $|e^{iux}|$ satisface

$$|e^{iux}|^2 = |\cos(ux) + isen(ux)|^2 = \cos^2(ux) + sen^2(ux) = 1.$$

En consecuencia,

$$|\varphi_X(u)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\mathrm{d}F_X(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{iux}|\mathrm{d}F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F_X(x) = 1.$$

Se puede ver también, sin mucha dificultad, que $\varphi_X(u)$ es absolutamente continua en todo IR.

Otra propiedad de la función característica es que $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$. En particular, si X es simétrica con respecto al origen, entonces $\varphi_X(u)$ es una función real par. Claramente,

$$\varphi_X(-u) = E\left[e^{-iuX}\right] = E\left[\overline{e^{iuX}}\right] = \overline{E\left[e^{iuX}\right]} = \overline{\varphi_X(u)}. \tag{11}$$

Por otro lado, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, no necesariamente idénticamente distribuidas, entonces la función característica de su suma es igual al producto de las funciones características de cada uno de los sumandos. Esto se puede ver como sigue. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(u) &= \mathrm{E}\left[e^{iuS_n}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{iuX_1} e^{iuX_2} \cdots e^{iuX_n}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[e^{iuX_1}\right]\mathrm{E}\left[e^{iuX_2}\right] \cdots \mathrm{E}\left[e^{iuX_n}\right] \\
&= \varphi_{X_1}(u)\varphi_{X_2}(u)\cdots\varphi_{X_n}(u) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \varphi_{X_i}(u).
\end{aligned} \tag{12}$$

La tercera igualdad se debe a la independencia de los sumandos. Por último, sea X una variable aleatoria tal que los primeros n momentos $\mathrm{E}\left[X^k\right] = M_k$, $k = 1,2,\ldots,n$, existen, es decir, $\mathrm{E}\left[\left|X^k\right|\right] < \infty$ para $k = 1,2,\ldots,n$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\varphi_X(u)\Big|_{u=0} = i^k M_k. \tag{13}$$

Así pues, la ecuación (13) relaciona las derivadas de la función característica con los momentos de la distribución.

5. FUNCIONES CARACTERÍSTICAS DE ALGUNAS DISTRIBUCIONES

En esta sección se determinan explícitamente las funciones características de algunas distribuciones útiles en el estudio de las finanzas.

5.1 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sea $X \sim N(0,1)$, $x \in \mathrm{IR}$, es decir,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2iux-u^2)}\,\mathrm{d}x, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_{\wedge} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{14}$$

donde $\wedge$ es la línea horizontal, $z = x - iu$, $x \in \mathrm{IR}$ en el plano complejo C. Es usual denotar

$$\int_{\wedge} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty-iu}^{+\infty-iu} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z.$$

La función $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ es entera, es decir, es analítica (holomorfa) en todos los puntos finitos del plano complejo C. Por lo tanto, su integral en cualquier contorno cerrado simple es cero (teorema de Cauchy) y, en particular, en el rectángulo, R, determinado por los vértices $-x-iu$, $x-iu$, x y $-x$.

$$\oint_{\mathsf{R}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z = \left(\int_{-x-iu}^{x-iu} + \int_{x-iu}^{x} + \int_{x}^{-x} + \int_{-x}^{-x-iu} \right) e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Observe ahora que

$$0 \leq \left| \int_{x-iu}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \right| \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^{|u|} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathrm{d}s,$$

lo cual implica que

$$\lim_{|x| \to \infty} \left| \int_{x-iu}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \right| = 0.$$

Es decir, los lados verticales del rectángulo, R , tienden a cero cuando $|x| \to \infty$. Por lo tanto,

$$\int_{-x-iu}^{x-iu} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z = -\int_{x}^{-x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

De esta manera,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\wedge} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = 1.$$

Por lo tanto,

$$\varphi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Ahora bien, en el caso general cuando $Y \sim N\ (\mu, \sigma^2)$, se tiene que $Y = \mu + \sigma X$. Consecuentemente, la ecuación (14) se transforma en

$$\begin{aligned} \varphi_X(u) &= \mathrm{E}\left[e^{iuY}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[e^{iu(\mu+\sigma X)}\right] \\ &= \mathrm{E}\left[e^{iu\mu} e^{iu\sigma X}\right] \\ &= e^{iu\mu}\mathrm{E}\left[e^{iu\sigma X}\right] \\ &= e^{iu\mu}\varphi_X(\sigma u) \\ &= e^{iu\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \\ &= e^{iu\mu} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Como puede observarse, a partir de la expresión (15) se sigue que $\ln[\varphi_{Y}(u)]$ es una ecuación cuadrática en u que involucra los parámetros relevantes de Y.

5.2 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN POISSON

Sea $X \sim \mathsf{P}(\lambda)$, $x = 0,1,2,...$, es decir,

$$\mathsf{P}_X\{X = x\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,2,...$$

entonces

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\\ &= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{iu})^x}{x!}\\ &= e^{-\lambda}e^{-\lambda e^{iu}}\\ &= e^{-\lambda(e^{iu}-1)}.\end{aligned} \tag{16}$$

La ecuación (16) conduce a $\ln[\varphi_X(u)] = \lambda(e^{iu}-1)$, este resultado se utilizará posteriormente cuando se introduzca el concepto de distribución infinitamente divisible.

5.3 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

Sea $X \sim \mathsf{G}(\alpha,\beta)$, $x \geq 0$, es decir, X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{(iu-\beta)x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{\beta}{\beta-iu}\right)^{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\beta-iu)^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\beta-iu)x}}{\Gamma(\alpha)}\mathrm{d}x \\ &= \left(1-\frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}.\end{aligned} \tag{17}$$

Si en (17) α es un número natural, $\alpha = n$, entonces $[\varphi_X(u)] = \{[1-(iu/\beta)]^{-1}\}^n$, lo cual representa la función característica de una suma de n variables aleatorias exponenciales idénticamente distribuidas con parámetro β.

5.4 FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA INVERSA

Sea $\tau_{a,b}$ la primera vez que un movimiento Browniano con tendencia $b > 0$, $\{W_t + bt\}_{t\geq 0}$, visita un estado $a > 0$. En este caso, se dice que la variable aleatoria $\tau_{a,b}$ tiene una distribución normal inversa con parámetros a y b, y este hecho se denota en forma simplificada mediante $\tau_{a,b} \sim \mathrm{IG}\,(a,b)$. La función de densidad de $\tau_{a,b}$ está dada por:

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}e^{ab}t^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{t}+b^2t\right)\right\}, \qquad x > 0, \tag{18}$$

y su función característica satisface

$$\varphi_X(u) = \exp\left\{-a\left(\sqrt{-2iu+b^2}-b\right)\right\}, \tag{19}$$

Otra forma de escribir (18) es como sigue

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(a-bt)^2}{t}\right\}, \qquad t > 0. \tag{20}$$

En este caso, $\mathrm{E}[\tau_{a,b}] = a/b$ y $\mathrm{Var}[\tau_{a,b}] = a^3/b^3$. La densidad (20) se puede presentar en forma alternativa a través de la definición de un conjunto nuevo de parámetros $\mu = a/b$ y $a = 1/\sqrt{\sigma}$, $\sigma > 0$, de tal forma que

$$f_{\tau_{\mu,\sigma}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma t^3}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2t\mu^2\sigma}\right\}, \qquad t > 0. \tag{21}$$

Observe que ahora $\mathrm{E}[\tau_{\mu,\sigma}] = \mu$ y $\mathrm{Var}[\tau_{\mu,\sigma}] = \mu^3/\sigma$. En particular, *si* $b = 0$, el tiempo de primera visita τ_a a un estado $a > 0$ se define como:

$$\tau_a = \inf\{t / W_t = a\}.$$

La continuidad en las trayectorias de $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es esencial para que la definición anterior tenga sentido. Observe que si

$$\mathrm{M}_t^w = \max_{0\leq s\leq t} W_s,$$

entonces

$$\tau_a \leq t \text{ si y sólo si } \mathrm{M}_t^w \geq a. \tag{22}$$

Ahora bien, claramente,

$$\mathrm{P}\{\mathrm{M}_t^w \geq a\} = \mathrm{P}\{W_t < a, \mathrm{M}_t^w \geq a\} + \mathrm{P}\{W_t \geq a, \mathrm{M}_t^w \geq a\}. \tag{23}$$

El primer sumando de (23) satisface

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{W_t < a, \mathsf{M}_t^w \geq a\} \\
&= \mathsf{P}\{W_t - W_{\tau_a} < 0 \mid \tau_a \leq t\} \mathsf{P}\{\tau_a \leq t\} \\
&= \mathsf{P}\{W_t - W_{\tau_a} \geq 0 \mid \tau_a \leq t\} \mathsf{P}\{\tau_a \leq t\} \\
&= \mathsf{P}\{W_t \geq a, \mathsf{M}_t^w \geq a\}.
\end{aligned} \tag{24}$$

En la segunda igualdad se ha utilizado el hecho de que $\mathrm{P}\{W_{\tau_a} = a\} = 1$, ya que la primera vez que W_t visita al estado $a > 0$, es justamente en el instante τ_a. La tercera igualdad se debe a la simetría de la variable aleatoria $W_t - W_{\tau_a} \sim N\ (0, t - \tau_a)$. La última expresión en (24) es justamente el segundo sumando de (23). Se sigue entonces de (24) que

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\mathsf{M}_t^w \geq a\} &= 2\mathsf{P}\{W_t \geq a, \mathsf{M}_t^w \geq a\} \\
&= 2\mathsf{P}\{W_t \geq a\},
\end{aligned} \tag{25}$$

ya que $\mathsf{M}_t^w \geq W_t$. Así, (25) se transforma en

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\{\mathsf{M}_t^w \geq a\} &= 2\mathsf{P}\{W_t \geq a\} \\
&= \mathsf{P}\{W_t \geq a\} + \mathsf{P}\{W_t \leq -a\} \\
&= \mathsf{P}\{|W_t| \geq a\} \\
&= \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty e^{-z^2/2t} dz.
\end{aligned}$$

Es decir, la distribución de M_t^w coincide con la de $|W_t|$. Por lo tanto, la distribución del tiempo de primera visita, τ_y, se calcula como sigue: si $a > 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
F_{\tau_a}(t) &= \mathsf{P}\{\tau_a \leq t\} \\
&= \mathsf{P}\{\mathsf{M}_t^W \geq a\} \\
&= \mathsf{P}\{|W_t| \geq a\} \\
&= \left(\frac{2}{\pi \mathrm{t}}\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^\infty e^{-z^2/2t}\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-v^2/2}\mathrm{d}v \\
&= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-a^2/2u}\mathrm{d}u,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

donde en la penúltima integral en (26) se utilizó la sustitución $v = z/\sqrt{t}$, de esta forma el límite inferior cambia de a a $a/\sqrt{t}$, y el superior se mantiene. En la última integral se empleó el cambio de variable $\sqrt{u} = a/v$, así el límite inferior cambia de $a/\sqrt{t}$ a cero, y el superior de ∞ a t. Además,

$$
dv = -\frac{1}{2}\frac{a}{u^{3/2}}\mathrm{d}u,
$$

lo que permite intercambiar los límites de integración. Después de derivar (26) con respecto de t, se concluye que

$$
f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\} \qquad t > 0. \tag{27}
$$

Otra forma alternativa de obtener (27) es como sigue. Sea $X \sim N\ (0,1/a^2)$ y defina $T = 1/X^2$, entonces $X = \pm 1/\sqrt{T}$. De esta manera,

$$f_T(t) = f_X(1/\sqrt{T})\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right| + f_X(1/\sqrt{T})\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right| = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\}.$$

Cuando $b = 0$, este razonamiento motiva el nombre de distribución Gaussiana inversa. Sin embargo, en el caso general, $b > 0$, dicho nombre podría ser inadecuado. Observe también que

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = e^{ab}e^{-b^2/2t}f_{\tau_a}(t).$$

6. TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER (DISTRIBUCIÓN)

Sea $\varphi_X(u)$ la función característica de una variable aleatoria X con distribución $F_X(x)$. Si a y b, con $a < b$, son puntos de continuidad de $F_X(x)$, entonces se tiene la siguiente fórmula de inversión de (26):

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi_X(u)\frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{2iu} - \varphi_X(-u)\frac{e^{iua} - e^{-iub}}{2iu}\right)\mathrm{d}u. \qquad (28)$$

En virtud de que (28) se puede reescribir como $\varphi_X(-u) = \overline{\varphi_X(u)}$, se sigue que

$$F_X(b) - F_X(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\varphi_X(u)\frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{2iu}\right]\mathrm{d}u. \qquad (29)$$

7. TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER (DENSIDAD)

Si la función característica de una variable aleatoria X, $\varphi_X(u)$, satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(u)| \mathrm{d}u < \infty,$$

se tiene entonces que X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi_X(x) \mathrm{d}u. \tag{30}$$

La expresión (30) es conocida como la transformada inversa de Fourier. La función de densidad $f_X(x)$ es uniformemente continua y acotada.

8. DISTRIBUCIONES INFINITAMENTE DIVISIBLES

Si $\varphi_X(u)$ es la función característica de una variable aleatoria X, se dice que la distribución de X es infinitamente divisible si para todo $n \in \mathrm{N}$ la función $[\varphi_X(u)]^n$ es, a su vez, la función característica de alguna variable aleatoria.

9. FÓRMULA DE LÉVY-KHINCHIN

La función $\varphi_X(u)$ es la función característica de una distribución infinitamente divisible si, y sólo si $\psi_X(u) \overset{def}{=} \log \varphi_X(u)$ tiene la forma

$$\psi_X(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-iux} - 1 - iux 1_{\{x<1\}}) \nu(\mathrm{d}x), \tag{31}$$

donde

$$1_{\{x<1\}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in (-1,1), \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (-1,1). \end{cases}$$

Este resultado es conocido como la fórmula de Lévy-Khinchin. Observe que en (31) el primer sumando es lineal en u, el segundo es la componente Browniana y el tercero es la componente de salto. La función $\psi_X(u)$ es, frecuentemente, llamada el exponente característico o función característica de cumulantes, o simplemente la función de cumulantes.

10. EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES INFINITAMENTE DIVISIBLES

A continuación se presentan algunos ejemplos de distribuciones infinitamente divisibles con base en la fórmula de Lévy-Khinchin. Cada distribución infinitamente divisible tiene asociada una terna característica $(\gamma, \sigma^2, \nu(\mathrm{d}x))$. Al primer elemento se le conoce como tendencia, al segundo como componente Browniana y al tercero como medida de Lévy. En ocasiones, la terna $(\gamma, \sigma^2, \nu(\mathrm{d}x))$ es llamada la terna de Lévy.

10.1 LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ES INFINITAMENTE DIVISIBLE

Si $X \sim N \quad (\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\psi_x(u) = iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2. \tag{32}$$

Basta tomar $\gamma = \mu$ y $V(\mathrm{d}x) = \delta(x-0)\,\mathrm{d}x$. Es importante recordar que la delta de Dirac satisface

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(x-0)\mathrm{d}x$$

Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)\mathrm{d}x| < \infty.$$

Así

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-iux}-1-iux1_{\{x<1\}})\delta(x-0)\mathrm{d}x=e^{0}-1-0=0.$$

En este caso, la Delta de Dirac es la densidad de Lévy. La terna característica de la distribución normal es $(\mu,\sigma^{2},\delta(x-0)\mathrm{d}x)$.

10.2 LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON ES INFINITAMENTE DIVISIBLE

Si $X\sim \mathsf{P}\,(\lambda)$, entonces

$$\psi_{X}(u)=\lambda(e^{iu}-1). \tag{33}$$

En este caso, se eligen $\gamma=0,\sigma=0$ y $v(dx)=\lambda\delta(x-1)\mathrm{d}x$. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-iux}-1-iux1_{\{x<1\}})v(\mathrm{d}x)\delta(x-1)\mathrm{d}x=(e^{-iu}-1-iux1_{\{x<1\}})\lambda=\lambda(e^{-iux}-1).$$

Observe que cuando $x=1$, la función indicatriz $1_{\{x<1\}}=0$. De esta manera, la terna característica de la distribución Poisson es $(0,0,\delta(x-1)\mathrm{d}x)$. Un tratamiento que combina la distribución normal con exponente característico (32), asociado a un movimiento geométrico Browniano, con la distribución de Poisson con exponente característico (33) de un proceso de saltos, puede verse en Oksendal and Sulem (2004).

10.3 LA DISTRIBUCIÓN GAMMA ES INFINITAMENTE DIVISIBLE

Si $X\sim \mathsf{G}\,(\alpha,\beta)$, entonces

$$\varphi_{X}(u)=\left(1-\frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}. \tag{34}$$

En este caso, se puede mostrar que la terna característica está dada por

$$(\alpha(1-e^{-\beta})/\beta, 0, \alpha e^{-\beta x} x^{-1} 1_{\{x>0\}} \mathrm{d}x).$$

Si α es un número natural, entonces (34) representa la función característica de la suma de α variables aleatorias exponenciales idénticamente distribuidas con parámetro β.

11. VALUACIÓN MERTON-BLACK-SCHOLES CON FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

A continuación se generaliza la metodología de Merton-Black-Scholes para valuar una opción europea de compra cuando el precio del subyacente no sigue un proceso Gaussiano. En esta generalización, la fórmula de valuación teórica utiliza la función característica del proceso, en lugar de la función de densidad del proceso que conduce el precio del subyacente (referencias complementarias a esta sección son: Boyarchenko y Levendorskii (2002) y como Schoutens (2003)).

Con el fin de motivar e ilustrar las ideas y conceptos centrales sobre los que descansa la extensión de la fórmula de Merton-Black-Scholes, se partirá del supuesto de normalidad y se abandonará justo en el momento en que la teoría alternativa exija de nuevos y más sofisticados planteamientos.

Se supone que el precio, S_t, del activo subyacente, una acción que no paga dividendos, tiene una dinámica estocástica como la definida en (1), una simple aplicación del lema de Itô produce

$$\mathrm{d}(\ln S_t) = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t. \tag{35}$$

Si se discretiza (35) con $\mathrm{d}t = T - t$, entonces

$$\ln S_T = \ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t). \tag{36}$$

Por lo tanto,

$$\ln(S_T) \sim \mathrm{N}(\ln(S_T) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T-t)). \tag{37}$$

En otras palabras, el rendimiento logarítmico también tiene distribución normal, pero con parámetro de tendencia menor que el del subyacente. La fórmula de valuación conduce a

$$c(x,t) = e^{-r(T-t)}\mathrm{E}\left[g(\ln(S_T)) \middle| s\right], \tag{38}$$

donde $x = \ln(S_t)$. Equivalentemente,

$$c(x,t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) g(x+y) \mathrm{d}y, \tag{39}$$

donde, de acuerdo con (37), $Y \sim N \;\; ((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t), \sigma^2(T\text{-}t))$. Por otro lado, si $\varphi_Y(u)$ es la función característica de Y, entonces

$$\varphi_Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuy} f_Y(y) \mathrm{d}y. \tag{40}$$

En este caso, de acuerdo con (30), la transformada inversa de Fourier de (40) está dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \varphi_Y(u) \mathrm{d}u. \tag{41}$$

Si ahora se define $X \sim N\ ((r - \frac{1}{2}\sigma^2), \sigma^2)$, se tiene que

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy + (t-t)\psi_X(u)} \mathrm{d}u. \tag{42}$$

12. PROCESOS REGULARES DE LÉVY (PROPIEDADES HOLOMÓRFICAS DE LA FUNCIÓN DE CUMULANTES)

Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido en un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \Phi, \mathsf{P})$ es un proceso de Lévy si cumple las siguientes propiedades: 1) X_t tiene una distribución infinitamente divisible para todo t ; 2) $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier conjunto finito de tiempos $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ con $t_0 < t_1 < \ldots. < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_0} - X_{t_1}, X_{t_1} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_{n-1}} - X_{t_n}$ son independientes; 3) $(X_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios, es decir, $X_{t+h} - X_{t_1}$ y X_h tienen exactamente la misma distribución; 4) $X_0 = 0$ casi dondequiera; 5) X_t es continua en probabilidad, es decir, $\lim_{h\to 0} \mathsf{P}\left\{\left|X_{t+h} - X_{t_1}\right| \geq \in\right\} = 0$ para todo $\in > 0$ y 6) existe $\Omega_0 \in \Phi$ con $\mathsf{P}(\Omega_0) = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega_0$ se tiene que si $X_t(\omega)$ es vista como función de *t*, entonces $X_t(\omega)$ es continua por la derecha con límite por la izquierda.

Un proceso regular de Lévy es un proceso con propiedades holomórficas del integrando de la transformada inversa de Fourier. Si

$$h(z) = e^{\alpha y} e^{-iyz + \psi_X(z + i\alpha)}, \qquad z = u - i\alpha,$$

donde $\psi_X(u)$ es la función de cumulantes de un proceso de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$, se dice que $(X_t)_{t\geq 0}$ es regular, si existen λ_- y λ_+ tales que $h(z)$ es analítica en una banda horizontal, β, determinada por $z = u - i\alpha$, $u \in \mathrm{IR}, \alpha \in (\lambda_-, \lambda_+)$. Además, se debe cumplir que

$$\lim_{|u|\to\infty}\left|\int_{u-i\alpha}^{u} h(z)\mathrm{d}z\right| = 0 \text{ para } \alpha \in (\lambda_-, \lambda_+).$$

Es importante destacar que el movimiento Browniano y el proceso Gaussiano inverso son procesos regulares de Lévy.

13. DESPLAZAMIENTO DE LA LÍNEA DE INTEGRACIÓN EN LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER PARA UN PROCESO REGULAR DE LÉVY

Sea $h(z) = e^{\alpha y} e^{-iyz+(T-t)\psi_X(z+i\alpha)}$, $z = u - i\alpha$, $\alpha \in (\lambda_-, \lambda_+)$ y considere el rectángulo R determinado por los vértices $-u - i\alpha$, $u - i\alpha$, $u, -u$, entonces por el teorema de Cauchy

$$\oint_R h(z)\mathrm{d}z = \left(\int_{-u-i\alpha}^{u-i\alpha} + \int_{u-i\alpha}^{u} + \int_{u}^{-u} + \int_{-u}^{-u-i\alpha}\right) h(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Por otro lado, las condiciones de regularidad conducen a

$$\lim_{|u|\to\infty}\left|\int_{u-i\alpha}^{u} h(z)\mathrm{d}z\right| = 0 .$$

Es decir, cuando $|u| \to \infty$, las integrales sobre los lados verticales del rectángulo se anulan. De esta manera,

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} h(z)\mathrm{d}z = \int_{\infty}^{-\infty} h(u)\mathrm{d}u .$$

En consecuencia,

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{\alpha y} e^{-iy(u-i\alpha)+\psi_X(u-i\alpha+i\alpha)}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y} e^{-iyu+\psi_X(u+i\alpha)}\mathrm{d}u,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iyu+\psi_X(u)}\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha y} e^{-iyu+\psi_X(u+i\alpha)}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy(u+i\alpha)+\psi_X(u+i\alpha)}\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyv+\psi_X(v)}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy+\psi_X(u)}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iyu+\psi_X(u)}\mathrm{d}u. \qquad (43)\end{aligned}$$

14. FÓRMULA DE VALUACIÓN DE MERTON-BLACK-SCHOLES PARA PROCESOS REGULARES DE LÉVY

En esta sección se obtiene la fórmula de valuación de Merton-Black-Scholes-Lévy. Después de sustituir (43) en (39) se obtiene que

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iuy+(T-t)\psi_X(u)} g(x+y)\mathrm{d}u\mathrm{d}y. \qquad (44)$$

Observe que $\psi_X(u)$ ha sido premultiplicada por $T-t$ a fin de introducir el plazo del instrumento. Si se lleva a cabo el cambio de variable de y a $y-x$, y se utiliza el exponente característico $\psi_Y(u)$, entonces (44) se puede escribir como

$$c(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iu(y-x)+(T-t)\psi_X(u)} g(y)\mathrm{d}u\mathrm{d}y. \qquad (45)$$

Si, para fines prácticos, se define

$$\tilde{g}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\mathrm{d}y,$$

entonces (45) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} c(x,t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{-iux+(T-t)\psi_X(u)} \tilde{g}(y)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-r(T-t)} \int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} e^{iux+(T-t)[-r-\psi_X(u)]} \tilde{g}(u)\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{46}$$

Observe ahora que si $g(y)$ es el valor intrínseco de una opción europea de compra, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} g(y)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \max(e^{y} - K, 0)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\ln(K)}^{\infty} (e^{-(iu-1)y} - Ke^{-iuy})\mathrm{d}y \\ &= \int_{\ln(K)}^{\infty} e^{-iuy} dy - K \int_{\ln k}^{\infty} e^{-iuy}\mathrm{d}y \\ &= \frac{e^{-(iu-1)\ln(K)}}{(iu-1)} - \frac{ke^{-iu\ln(K)}}{iu} \\ &= \frac{Ke^{-iu\ln(K)}}{i(u+i)} - \frac{Ke^{-iu\ln(K)}}{iu} \\ &= Ke^{-iu\ln(K)}\left(\frac{1}{i(u+i)} - \frac{1}{iu}\right) \\ &= \frac{Ke^{-iu\ln(K)}}{u(u+i)}. \end{aligned} \tag{47}$$

Después de sustituir (47) en (46) y dado que $x = \ln(S_t)$, se sigue que

$$c(x,t) = -\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha}\frac{e^{iu\ln(S_t/K)+(T-t)\left[-r+\psi_X(u)\right]}}{u(u+i)}\mathrm{d}u. \tag{48}$$

Sea

$$\xi(u) = \exp\left\{iu\ln(S_t/K)+(T-t)\left[-r+\psi_X(u)\right]\right\},$$

entonces el integrando puede reescribirse como

$$H(u) = \frac{\xi(u)}{u(u+i)} = \frac{\frac{\xi(u)}{i}}{u} + \frac{\frac{\xi(u)}{-i}}{u+i} \tag{49}$$

Claramente, $u=0$ y $u=-i$ son dos polos de $H(u)$. Considere el rectángulo R determinado por los vértices $-u-i\alpha$, $u-i\alpha$, $u-i\beta$, $-u-i\beta$, con $\alpha\in(1,\lambda_+)$, $\beta\in(\lambda_-,0)$ y $u\in \mathrm{IR}$. Por el teorema del residuo, se tiene que

$$\oint_{\mathsf{R}} H(u)\mathrm{d}u = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\,(f,0)+\mathrm{Res}\,(f,-i)\right] = 2\pi i\left(\frac{\xi(0)}{i}+\frac{\xi(-i)}{-i}\right).$$

Observe también que

$$\oint_{\mathsf{R}} H(u)\mathrm{d}u = \left(\int_{-u-i\alpha}^{u-i\alpha}+\int_{u-i\alpha}^{u-i\beta}+\int_{u-i\beta}^{-u-i\beta}+\int_{-u-i\beta}^{-u-i\alpha}\right)H(u)\mathrm{d}u.$$

En virtud de las condiciones de regularidad, se tiene que las integrales sobre los lados verticales del rectángulo se anulan, en consecuencia

$$\int_{-\infty-i\alpha}^{\infty-i\alpha} H(u)du + \int_{\infty-i\beta}^{-\infty-i\beta} H(u)\,\mathrm{d}u = 2\pi i\left(\frac{\xi(0)}{i}+\frac{\xi(-i)}{-i}\right).$$

Equivalentemente

$$c(x,t) = -\left(\frac{K}{2\pi}\right)2\pi i\left(\frac{\xi(0)}{i}+\frac{\xi(-i)}{-i}\right) - \frac{K}{2\pi}\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u)\,\mathrm{d}u.$$

Note ahora que $r+\psi_X(-i)=0$ y $\psi_X(0)=0$, entonces

$$\frac{\xi(0)}{i} = \frac{\exp\{0-(r(T-t)\}}{i} = \frac{e^{-r(T-t)}}{i}$$

y

$$\frac{\xi(-i)}{-i} = \frac{\exp\{\ln(S_t/K)\}}{-i} = -\frac{S_t}{iK}.$$

Así

$$\begin{aligned} c(x,t) &= -Ki\left(\frac{e^{-r(T-t)}}{i}-\frac{S_t}{iK}\right)+\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -Ke^{-r(T-t)}+S_t-\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} H(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned} \tag{50}$$

La expresión (50) representa la condición de paridad *put-call*. Por lo tanto, el precio de una opción europea de venta satisface

$$p(x,t) = -\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty-i\beta}^{\infty-i\beta} \frac{e^{iu\ln(S_t/K)+(T-t)[-r+\psi_X(u)]}\mathrm{d}u}{u(u+i)}, \qquad \beta\in(\lambda_-,0).$$

15. CONCLUSIONES

A diferencia del típico supuesto de normalidad, los procesos de Lévy producen un modelado más realista sobre el comportamiento de los rendimientos de muchos y muy diversos activos subyacentes. De esta manera, una valuación más cercana a lo observado en los mercados de productos derivados se obtiene bajo el supuesto de que el precio del subyacente es conducido por un proceso de Lévy.

Varias fórmulas explícitas del precio de una opción europea de compra o venta sobre subyacentes guiados por procesos regulares de Lévy han sido obtenidas, lo cual provee un referente para las decisiones de inversión y cobertura de los diferentes agentes que participan en los mercados financieros. Es importante destacar que las fórmulas obtenidas sólo son válidas cuando se cumplen las condiciones de regularidad.

Por supuesto, queda pendiente en la agenda de investigación futura el desarrollo de fórmulas explícitas de otros productos derivados más complicados como son opciones, con barreras, *look-back*, parisinas, etc.

BIBLIOGRAFÍA

Boyarchenko, S. I. and Levendorskii, S. Z. (2002). *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability*. World Scientific Publishing Company, New Jersey, USA.

Oksendal B. K. and A. Sulem, (2004). *Applied Stochastic Control on Jump Diffusions*. Springer-Verlag, Berlin.

Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance (Pricing Financial Derivatives). Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons Ltd, England.

Venegas-Martínez, F. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

APÉNDICE

ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN, TEOREMA DE CAUCHY Y TEOREMA DEL RESIDUO

Sea $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $z = x + iy$. De esta manera, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$. Observe que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

de donde

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}.$$

Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$

se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

Observe ahora que sobre el eje real $\partial f / \partial y = 0$, así

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Por otro lado, sobre el eje imaginario $\partial f / \partial y = 0$, se sigue que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Si f es diferenciable en C , entonces la derivada tiene que ser la misma para un dz dado, sin importar la dirección. En este caso, se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Asimismo, se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Similarmente,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Suponga ahora que $f(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann dentro de un contorno $\wedge$ que encierra una región N. De esta forma,

$$\begin{aligned}\oint_{\wedge} f(z)\mathrm{d}z &= \oint_{\wedge} (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) \\ &= \oint_{\wedge} u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\oint_{\wedge} v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Una simple aplicación del teorema de Green conduce a

$$\oint_{\wedge} g(x,y)\mathrm{d}x + h(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{N}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

lo cual lleva a

$$\oint_{\wedge} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Suponga que $f(z)$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann y considere la siguiente expansión en serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Si $\wedge$ es un contorno cerrado que contiene a z_0, entonces, utilizando el teorema de Cauchy, se tiene que

$$\oint_{\wedge} f(z)\mathrm{d}z = a_{-1} \oint_{\wedge} \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z.$$

En efecto, a partir de la parametrización $z = e^{it} + z_0$ se sigue que

$$\oint_{\wedge} \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

Así,

$$\oint_{\wedge} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i a_{-1}.$$

En este caso, a_{-1} es llamado el residuo de f en z_0.